BIBLIOTECA DE MATEMATICĂ

Gheorghe ANDREI

Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ [x]

{x} PARTEA FRACȚIONARĂ

Volumul 1

Editura Paralela 45

Scanned with OKEN Scanner

Redactare: Olimpia Filip, Daniel Mitran
Tehnoredactare: Ovidiu Mictar
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ANDREI, GHEORGHE
Partea întreagă [x] : partea fracţionară {x} / Gheorghe Andrei, Constantin Caragea ; pref. de Radu Gologan. - Piteşti : Paralela 45, 2018
2 vol.
ISBN 978-973-47-2693-6
Vol. 1. - 2018. - Conţine bibliografie. - ISBN 978-973-47-2694-3

I. Caragea, Constantin
II. Gologan, Radu N. (pref.)

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018
Prezenta lucrare foloseşte denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conţinutul este protejat de legislaţia privind dreptul de proprietate intelectuală.

Scanned with OKEN Scanner

Gheorghe ANDREI Constantin CARAGEA

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA ÎNTREAGĂ [x]
PARTEA FRACŢIONARĂ {x}

VOLUMUL I

Editura Paralela 45

CUPRINS

		Enunțuri	Soluții
Prefață		7	
Introducere		9	
Capitolul I	Proprietăți	11-30	
Capitolul II	Aplicații de bază	31-38	39-57
Capitolul III	Progresii în care intervin partea întreagă și partea fracționară	58-60	61-68
Capitolul IV	Aplicații ale identității lui Hermite	69-96	
Capitolul V	Partea întreagă și partea fracționară a unor expresii cu radicali	97-101	102-118
Capitolul VI	Egalități și identități	119-126	127-156
Capitolul VII	Mulțimi	157-161	162-181
Capitolul VIII	Ecuații	182-207	208-318
Capitolul IX	Ecuații cu parametri	319-329	330-386
Capitolul X	Ecuații cu mai multe necunoscute	387-389	390-400
Capitolul XI	Inecuații	401-403	404-417
Capitolul XII	Sisteme	418-428	429-449
Bibliografie		450	

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

De-a lungul a aproape jumătate de secol, profesorii constănţeni Gheorghe Andrei şi Constantin Caragea au şlefuit matematic minţile a mii de foşti elevi, nu neapărat atunci avizi de matematică, dar azi intelectuali de vază, unii dintre ei făcând cinste României pe multe continente. Alţii sunt în prezent matematicieni renumiţi, ce duc mai departe faima şcolii româneşti de matematică.

Profesorii Andrei şi Caragea sunt renumiţi azi şi prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar şi prin problemele propuse la toate etapele olimpiadelor româneşti.

Culegerea de faţă este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr. De această noţiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică. De exemplu, chestiunile legate de ordinul de aproximare a unui număr iraţional cu un număr raţional conţin încă multe probleme deschise.

Cele nouăsprezece capitole ale cărţii fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noţiunea de parte întreagă sau parte fracţionară. Acestea conţin peste 1700 de probleme, prezentate gradat şi având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu şi liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta minţile deschise ale copiilor.

Radu Gologan

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Cartea este o adevărată megaculegere de probleme care se adresează elevilor și profesorilor pasionați de matematică, în dorința de a obține performanțe sporite.

Ea are rolul de a ușura activitatea de căutare și selectare a problemelor cu partea întreagă și partea fracționară din diferite culegeri și publicații de matematică, întrucât această megaculegere este destul de cuprinzătoare. Ea reprezintă un izvor și un stimulator de abordare creatoare a altor probleme pe această temă.

Cu această ocazie aducem mulțumiri și felicitări tuturor autorilor multor probleme deosebite și fără de care cartea ar fi fost mai săracă și incompletă.

Au fost multe situații care ne-au pus „probleme" în găsirea soluțiilor, dar au fost și probleme asemănătoare propuse însă de „autori" diferiți. (Ne cerem anticipat scuze dacă am omis unii autori de probleme.)

Această carte este centrată pe un singur capitol de matematică: ***Partea întreagă și partea fracționară***, temă aproape inexistentă acum 30-40 de ani și mult mai frecventă în ultimii 15-20 de ani, atât în manuale, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cât și în concursurile școlare. Prin cantitatea și varietatea problemelor și mai ales prin abordarea diferențiată a temelor cuprinse în cele 19 capitole, cartea reprezintă o adevărată enciclopedie a acestei teme.

Lucrarea acoperă un gol bibliografic, deoarece până acum elevii și profesorii nu aveau la îndemână un astfel de vast material de studiu.

Prima carte pe această temă a apărut la noi în țară în anul 1996, la Editura GIL, autori fiind Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu și Constantin Caragea, și anume, *Probleme de algebră – gimnaziu și liceu. Funcțiile „partea întreagă" și „partea fracționară"*, urmată fiind de cartea regretatului profesor Mihai Onucu Drîmbe, *200 de identități și inegalități cu „partea întreagă"*, Editura GIL, 2003.

Prin multele probleme de nivel ridicat, prezenta culegere poate sta la baza formării competențelor sporite în acest domeniu. Ea ar trebui să se afle la oricare centru de excelență, în orice școală unde se pregătesc olimpici și chiar în posesia oricărui elev capabil și doritor de performanță.

În fiecare capitol există o ierarhizare a problemelor, în funcție de gradul de dificultate, și anume: „probleme elementare", nemarcate, probleme

Scanned with OKEN Scanner

mai dificile, cu o steluță, iar cele foarte dificile, cu două sau trei steluțe. Desigur, problemele de nivel standard, nemarcate, pot fi considerate ca „repere" necesare abordării celor mai dificile dintre ele.

Chiar dacă unele probleme sunt asemănătoare sau îmbracă o „haină mai veche", ele au fost totuși puse cu respectul cuvenit istoriei lor și care confirmă progresul abordărilor pe această temă în ultimii 20-30 de ani.

Sunt destule probleme care apar în unul sau două capitole, deoarece ele pot fi încadrate tematic în aceste capitole. În cadrul aceleiași teme, megaculegerea cuprinde 19 capitole diferențiate pe anumite subteme. Vom enumera câteva: Cap. I – Proprietăți, Cap. II – Aplicații de bază, completat cu Cap. V – Partea întreagă și partea fracționară a unor expresii cu radicali și Cap. VI – Egalități și identități, Cap. XV – Inegalități, Cap. VIII, IX, X – Ecuații, ecuații cu parametri, respectiv ecuații cu mai multe necunoscute, Cap. XII – Sisteme, Cap. XIII – Elemente de aritmetică, Cap. XIV – Sume, Cap. XVI și XVII – Șiruri, respectiv funcții, care conțin probleme ce aduc o completare a capitolelor respective din clasele a IX-a, a X-a și a XI-a. Capitolul XIX – Paragrafe speciale cuprinde chiar câteva paragrafe speciale care pun în evidență o gamă largă de aplicabilitate a funcției „partea întreagă" și „partea fracționară": funcția de rotunjire, funcția lui Legendre cu aplicații, funcțiile $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$ (cu notațiile consacrate), spectrul unui număr, puncte laticiale etc.

Megaculegerea conține peste 1700 de probleme și proprietăți importante cu aplicativitate imediată la alte probleme. Pentru ca această carte să fie accesibilă unui număr mai mare de elevi și profesori, soluțiile sunt destul de detaliate, iar multe dintre probleme au câte două sau trei soluții.

Pentru alcătuirea acestei culegeri de probleme, s-a depus o muncă susținută pe parcursul mai multor ani, consultându-se un uriaș material bibliografic, iar ca urmare, autorii înșiși și-au sporit competențele în acest domeniu.

Așteptăm soluții deosebite sau abordări interesante, precum și noi probleme pe această temă, ce vor fi cuprinse într-o viitoare ediție (e-mail: profandreigheorghe@gmail.com).

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 1 | Proprietăţi

Definiţia 1:

Numim partea întreagă a unui număr real x, cel mai mare număr întreg, mai mic decât x. Acest număr se notează cu $[x]$.

Prin urmare, oricare ar fi numărul real x, există o infinitate de numere întregi mai mici decât x. Din mulţimea acestora, alegem pe cel mai mare întreg, care evident depinde de x şi se notează $[x]$.

În baza axiomei lui Arhimede putem enunţa următoarea definiţie.

Definiţia 2:

Pentru orice număr real x, există un număr întreg m (unic determinat) astfel încât $m \leq x < m+1$. Numărul m se numeşte parte întreagă a lui x, adică $m = [x]$.

Avem $[x] = \begin{cases} m, & \text{pentru } m \leq x < m+1 \\ -m, & \text{pentru } -m \leq x < -m+1 \end{cases}, m \in \mathbb{N}.$

P_1. Toate numerele reale cuprinse între două numere întregi consecutive au aceeaşi parte întreagă: $[x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m+1), (\forall)\, m \in \mathbb{Z}$.

P_2. Numerele $x, y \in \mathbb{R}$ aparţin aceluiaşi interval $[m, m+1)$ dacă şi numai dacă $[x] = [y]$.

P_3. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc inegalităţile:

a) $[x] \leq x < [x] + 1$;

b) $x - 1 < [x] \leq x$.

P_4. a) $x < 0 \Leftrightarrow [x] < 0$;

b) $x \geq 0 \Leftrightarrow [x] \geq 0$.

Definiţia 3:

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul $x - [x] = t \in [0,1)$ se numeşte partea fracţionară a numărului real şi se notează cu $\{x\}$.

Avem $x - [x] = \{x\} \Leftrightarrow x = [x] + \{x\}$.

Observaţie: Oricare ar fi expresia E, se pot scrie inegalităţile analoage lui **P_3**:

$$[E] \leq E < [E] + 1 \text{ şi } E - 1 < [E] \leq E$$

şi prin urmare $E = [E] + \{E\}$.

P_5. a) $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$;

b) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ (punctele fixe ale funcției $[\cdot]$);

d) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in [0,1)$ (punctele fixe ale funcției $\{\cdot\}$).

P_6. a) $[[x]] = [x], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$;

b) $\{\{x\}\} = \{x\}, (\forall) x \in \mathbb{R}$;

c) $[\{x\}] = \{[x]\}, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Proprietățile P_5, P_6 rezultă din definițiile părții întregi și părții fracționare.

P_7. Dacă $[a] = [b]$, atunci $|a - b| < 1$. Reciproca nu este adevărată.

Soluție: Dacă $[a] = [b] = m \Rightarrow a, b \in [m, m+1) \Rightarrow |a-b| < 1$ sau din $[a] = [b] \Leftrightarrow a - \{a\} = b - \{b\} \Rightarrow a - b = \{a\} - \{b\} \in (-1,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow |a-b| < 1$.

P_8. $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{a-b\} = 0$.

Soluție: Din $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a - [a] = b - [b] \Leftrightarrow a - b = [a] - [b] \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{a-b\} = 0$. De fapt dacă $a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a$ și b au aceeași parte fracționară.

P_9. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $[m + x] = m + [x]$.

Demonstrație: Din $[x] \le x < [x] + 1 \Rightarrow m + [x] \le x + m < m + [x] + 1$ deci $m + x$ este cuprins între doi întregi consecutivi, prin urmare

$$[m + x] = m + [x].$$

Observație 1:

Are loc și afirmația reciprocă: Dacă $[m + x] = m + [x]$, atunci $m \in \mathbb{Z}$. Într-adevăr din $[m + x] = [m] + \{m\} + [x] \Rightarrow \{m\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{m\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

P_{10}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $\{m + x\} = \{x\}$.

Demonstrație: Se utilizează egalitatea precedentă. Din
$[m + x] = m + [x] \Rightarrow m + x - \{m + x\} = m + x - \{x\} \Rightarrow \{m + x\} = \{x\}$.

Observație: Are loc și afirmația reciprocă: dacă $\{m + x\} = \{x\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.
Din $\{[m] + \{m\} + x\} = \{x\} \Rightarrow \{\{m\} + x\} = \{x\} \Rightarrow \{m\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{m\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

P_{11}. a) Funcția $[\cdot]: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ este crescătoare.

b) Funcția $\{x\}: \mathbb{R} \to [0,1)$ este periodică și strict crescătoare pe orice interval de forma $[m, m+1], m \in \mathbb{Z}$.

c) Dacă $f(x) = [x] \Rightarrow Imf = \mathbb{Z}$.

d) Dacă $g(x) = \{x\} \Rightarrow Img = [0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: a) Fie $x < y \Rightarrow [x] \leq x < y < [y]+1 \Rightarrow [x] < [y]+1 \Rightarrow [x] \leq [y]$.

b) Calculăm $\{x+1\} = \{x\}$ în baza lui P_{10} rezultă că $T = 1$ este perioada principală (dacă ar exista $0 < T_0 < 1$ perioada funcției, atunci $\{x+T_0\} = \{x\}$ $(\forall)x \in \mathbb{R}$ și, pentru $x = 0, \{T_0\} = 0$, $T_0 = 0$, fals).

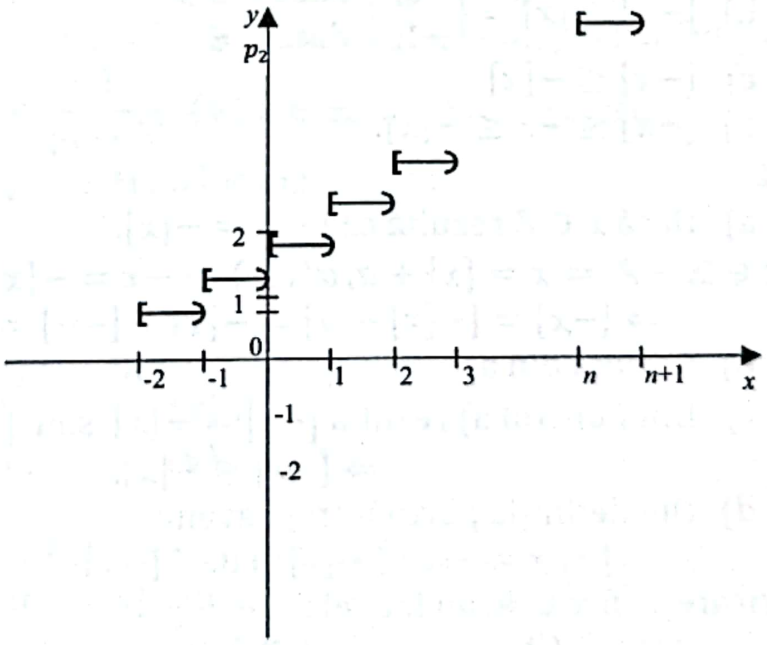
Pe intervalul $[0,1) \Rightarrow \{x\} = x$ care este strict crescătoare și fiind periodică rezultă că $\{x\}$ este strict crescătoare pe orice interval $[m,m+1)$ cu $m \in \mathbb{Z}$.

c) Evident $[x] \in \mathbb{Z}$.

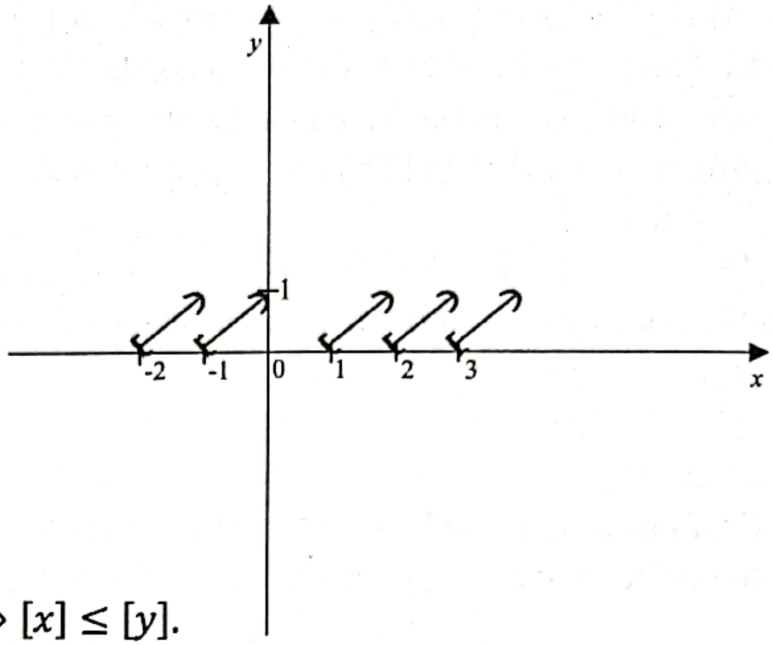
d) $\{x\} \in [0,1)$.

P_{12}. Graficul funcției $[x]$ este format din segmente orizontale închise la stânga deschise la dreapta, paralele cu axa OX (un grafic în „trepte")

$$[x] = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ -2 \ , \ x \in [-2,-1) \\ -1 \ , \ x \in [-1, \ 0) \\ \ 0 \ , \ x \in [\ 0, \ 1) \\ \ 1 \ , \ x \in [\ 1, \ 2) \\ \dots\dots\dots \\ n \ , \ x \in [n,n+1) \end{cases}.$$



P_{13}. $\{x+m\} = \{x\}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq \{x\} < 1$, graficul următor:



P14. a) Dacă $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
b) Dacă $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
c) $[x] < [y] \Rightarrow x < y$.
d) Dacă $x, y \in [m, m+1)$ și $x \neq y \Rightarrow [x] = [y]$ și $\{x\} \neq \{y\}$.

P15. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc relațiile:

a) $[-x] = \begin{cases} -[x], & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

b) $[-x]+[x] = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $[-x] \leq -[x]$;

d) $[-x] \leq -x \leq -[x]$.

Soluție:

a) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ rezultă că $[-x] = -[x]$.

Dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow x = [x] + \alpha, \alpha(0,1) \Rightarrow -x = -[x] - \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow [-x] = [-[x] - \alpha] = -[x] + [-\alpha] = -[x] - 1.$

b) Rezultă din a).

c) Din punctul a) rezultă $[-x] = -[x]$ sau $[-x] = -[x] - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [-x] \leq -[x]$.

d) Din definiția părții întregi avem:
$[x] \leq x \Rightarrow -x \leq -[x]$ și deci $[-x] \leq -x \leq -[x]$.

P16. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

a) $\{-x\} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ 1-\{x\}, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

b) $\{-x\}+\{x\} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $\{1-\{x\}\} = 1-\{x\}, (\forall) x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție: Se utilizează $\mathbf{P_{15}}$.

a) Dacă $x \in \mathbb{Z}$, evident. Fie $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow -x = [-x] + \{-x\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{-x\} = -x - [-x] = -x - (-[x] - 1) = 1 - \{x\}$.

b) și c) rezultă din punctul a).

$\mathbf{P_{17}}$. Fie $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $[x + a] = [x], (\forall)x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = 0$.

b) Să se arate că $\{x + a\} = \{x\} + a, (\forall)x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = 0$.

Soluție:

a) Presupunem că $a \neq 0$. Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] = 0 \Rightarrow a \in (0,1)$ și pentru $x = 1 - a \Rightarrow [1 - a] = [1 - a + a] \Rightarrow 0 = 1$, fals. Prin urmare, $a = 0$.

b) Presupunem că $a \neq 0$, atunci pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{a\} = a \Rightarrow a \in$ $\in (0,1)$, iar pentru $x = 1 - a$, rezultă $0 = 1$, fals. Prin urmare, $a = 0$.

$\mathbf{P_{18}}$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) $[x + a] = [x + b], (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b$;

b) $[xa] = [xb], (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b$.

Demonstrație:

În ambele cazuri o implicație este evidentă.

a) Fie $[x + a] = [x + b], (\forall)x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = -a \Rightarrow [b - a] = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow b \geq a$ pentru $x = -b \Rightarrow [a - b] = 0 \Rightarrow a \geq b$ deci $a = b$.

b) Presupunem prin absurd că $a \neq b$, atunci din: $[ax] = [xb] \Rightarrow$ $\Rightarrow |xa - xb| < 1 \Rightarrow [x] < \dfrac{1}{|a - b|}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$, fals. Prin urmare, $a = b$.

$\mathbf{P_{19}}$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ au loc inegalitățile:

a) $[nx] \geq n[x]$;

b) $[x] \leq \dfrac{[nx]}{n}$;

c) $n[-x] \leq [-nx] \leq -n[x]$;

d) $[mx] = \begin{cases} m[x], & (\forall)\, m \in \mathbb{Z}_+ \\ \leq m[x], & (\forall)\, m \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$.

Soluție:

a) Din $[x] \leq x \Rightarrow n[x] \leq nx \Rightarrow n[x] \leq [nx]$.

b) Rezultă din punctul a) sau din:

$$[x] = \left[\frac{nx}{n}\right] = \left[\frac{[nx]}{n}\right] \leq \frac{[nx]}{n}. \left(\text{S-a utilizat } \left[\frac{x}{n}\right] \equiv \left[\frac{[x]}{n}\right]\right).$$

c) Avem $[-x] \leq -x \Rightarrow n[-x] \leq -nx \Rightarrow n[-x] \leq [-nx] \leq -n[x]$.
(S-au utilizat punctul a) și $[-x] \leq -x$.)

d) Din a) și c) rezultă d).

Scanned with OKEN Scanner

P_{20}. Să se demonstreze că:

a) Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

b) Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că dacă: $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], (\forall)x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m = n$.

c) Fie $m \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că dacă $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right], (\forall)x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $m \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se arate că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ atunci:

$$\left[\frac{[mx]}{m}\right] = \left[\frac{[nx]}{n}\right], (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

e) Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n} \Rightarrow [x] = \left[\frac{m}{n}\right]$.

f) Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*, a \neq b$. Să se arate că $\left[\frac{x}{a}\right] + \left[\frac{[x]}{b}\right] = \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{[x]}{a}\right]$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$.

<u>Demonstrație:</u>

a) Fie $x \in \mathbb{R}$, atunci există $n \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq r < n - 1$ astfel încât:

$$[x] = nq + r \Rightarrow \frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n} \Rightarrow \left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[q + \frac{r}{n}\right] = q \text{ întrucât } 0 \leq \frac{r}{n} < 1.$$

Pe de altă parte $x = [x] + \{x\} = nq + r + \{x\} \Rightarrow \frac{x}{n} = q + \frac{r + \{x\}}{n} \Rightarrow \left[\frac{x}{n}\right] =$

$$= q + \left[\frac{r + \{x\}}{n}\right] = q \text{ întrucât } 0 \leq \frac{r + \{x\}}{n} < 1 \Rightarrow \left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

a') (Soluție alternativă)

Din $[x] \leq x \Rightarrow \frac{[x]}{n} \leq \frac{x}{n} \Rightarrow \left[\frac{[x]}{n}\right] \leq \left[\frac{x}{n}\right]$ (1). Notând $\frac{x}{n} = a \Leftrightarrow x = na$

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{na}{n}\right] = [a] = \frac{n[a]}{n} \leq \frac{[na]}{n} = \frac{[x]}{n} \Rightarrow \left[\left[\frac{x}{n}\right]\right] \leq \left[\frac{[x]}{n}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{x}{n}\right] \leq \left[\frac{[x]}{n}\right] \text{ (2).}$$

Din (1)și (2) rezultă $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ (s-a utilizat inegalitatea $[nx] \geq n[x]$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$).

Scanned with OKEN Scanner

a'') (Soluție alternativă)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

$$f(x) = \left[\frac{[x]}{n}\right] - \left[\frac{x}{n}\right]. \text{ Calculăm}$$

$$f(x+n) = \left[\frac{[x+n]}{n}\right] - \left[\frac{x+n}{n}\right] = \left[\frac{[x]+n}{n}\right] - \left[\frac{x+n}{n}\right] =$$

$$= \left[\frac{[x]}{n}\right] + 1 - \left[\frac{x}{n}\right] - 1 = \left[\frac{[x]}{n}\right] - \left[\frac{x}{n}\right]$$

și prin urmare f este periodică cu perioada $T = n$.

Pentru $\forall\, x \in [0,n) \Rightarrow 0 \leq \frac{[x]}{n} < 1$ și $0 \leq \frac{x}{n} < 1$ deci $f(x) = 0, \forall x \in [0,n)$, dar și pentru $x = n$ rezultă $f(n) = 0$. Așadar, $f(x) = 0,\ \forall\, x \in [0,n)$ și prin urmare $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Florin Popovici

b) O implicație rezultă din a).

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], (\forall)x \in \mathbb{R}$. Dacă $x = mn \Rightarrow [n] = [m]$ și cum $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m = n$ sau utilizând punctul a), avem:

$$\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right] \Rightarrow \left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{x}{n}\right], (\forall)x \in \mathbb{R}. \text{ Pentru } x = m \text{ și } x = n \Rightarrow$$

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{n}{m}\right] = 1 \Rightarrow m \geq n \text{ și } m \leq n \Rightarrow m = n.$$

c) Evident dacă $m \in \mathbb{N}^*$ rezultă a).

Reciproc, din $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$ considerăm $x = m > 0 \Rightarrow \left[\frac{[m]}{m}\right] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{[m]}{m} \Rightarrow m \leq [m] \leq m \Rightarrow [m] = m \Rightarrow m \in \mathbb{N}^*$. Evident m nu poate fi negativ. Într-adevăr dacă $m < 0$, fie $n > -m$ și pentru

$$x = \frac{-m}{n} \Rightarrow \left[\frac{x}{m}\right] = \left[-\frac{1}{n}\right] = -1 \text{ și } [x] = \left[\frac{-m}{n}\right] = 0$$

$$\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{0}{m}\right] = 0 \Rightarrow 0 = -1, \text{fals.}$$

d) Se utilizează a) și avem $\left[\frac{[kx]}{k}\right] = \left[\frac{kx}{k}\right] = [x], (\forall)k \in \mathbb{N}^*$ și $(\forall)x \in \mathbb{R}$ și prin urmare ambii termeni sunt egali cu $[x]$.

Scanned with OKEN Scanner

e) Utilizând teorema împărțirii lui m la n rezultă că:

$$m = nq + r, q \in \mathbb{Z} \quad 0 \le r \le n-1$$

Avem $q \le \frac{m}{n} \le x < \frac{m+1}{n} < \frac{nq+r+1}{n} \le q+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow q \le \frac{m}{n} \le x < q+1 \Rightarrow \left[\frac{m}{n}\right] = [x].$$

Sau din $m \le nx < m+1 \Rightarrow [nx] = m \Rightarrow [x] = \left[\frac{nx}{n}\right] = \left[\frac{[nx]}{n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right]$.

f) Evident dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ egalitatea are loc în baza punctului a).

Reciproc, pentru $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left[\frac{[x]}{b}\right] = \left[\frac{x}{b}\right], (\forall)x \in \mathbb{R}$, atunci în baza punctului c) rezultă că și $b \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^* - \mathbb{N}^*$ cu $a \ne b$, atunci considerând $a < b$ pentru $x = a \Rightarrow$

$$1 + \left[\frac{[a]}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{[a]}{a}\right] \Rightarrow 1 + 0 = 0, \text{fals.}$$

P_{21}. Pentru orice x real și n natural, există $r \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$ astfel încât:

$$[nx] = n[x] + r.$$

Soluție:

Fie $x = [x] + \{x\} = [x] + t, t \in [0,1)$ și $0 < nt < n$.

Avem $[nx] = [n[x] + nt] = n[x] + [nt] = n[x] + r$,

unde $r = [nt] \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$.

P_{22}. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, există q întreg cu $|q| < \max\{m,n\}$ astfel încât $[mx] - [nx] = (m-n)[x] + q$.

Soluție:

Utilizând exercițiul precedent rezultă că există $r_1 \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}$ și $r_2 \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$ astfel încât să avem $[mx] = m[x] + r_1$ și $[nx] = n[x] + r_2 \Rightarrow [mx] - [nx] = (m-n)[x] + r_1 - r_2 = (m-n)[x] + q$, unde $0 \le r_1 < m$, $0 \le r_1 < n \Rightarrow |r_1 - r_2| < \max(m,n)$, adică $\Rightarrow |q| = |r_1 - r_2| < \max(m,n)$.

P_{23}. Câtul împărțirii lui $m \in \mathbb{Z}$ la $n \in \mathbb{N}^*$ este $\left[\frac{m}{n}\right]$, iar restul este $n\left\{\frac{m}{n}\right\}$.

Soluție:

Notăm cu q și r câtul și restul împărțirii lui m la n, adică $m = nq + r$ și $q \le \frac{nq+r}{n} = \frac{m}{n} < \frac{nq+n}{n} = q+1$, de unde deducem că $0 \le r < n$.

Obținem: $q = \left[\frac{m}{n}\right]$. Avem $n\left\{\frac{m}{n}\right\} = n\left(\frac{m}{n} - \left[\frac{m}{n}\right]\right) = n\left(\frac{nq+r}{n} - q\right) = r$.

Scanned with OKEN Scanner

P_{24}. Numărul multiplilor unui număr natural n mai mici decât un număr real pozitiv x este $\left[\frac{x}{n}\right]$.

Soluţie:

Considerăm şirul multiplilor lui n: $n, 2n, 3n, \cdots, kn, \cdots$. Există un număr natural m astfel încât: $mn \leq x < (m+1)n$,

unde $m \leq \frac{x}{n} < m+1$, deci $m = \left[\frac{x}{n}\right]$.

P_{25}. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ şi orice $m \in \mathbb{Z}$, avem:

a) $\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m-1}{n}\right] \Leftrightarrow n \nmid m$;

b) $\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1 \Leftrightarrow n|m$.

Soluţie:

a) Va fi suficient să demonstrăm implicaţiile:

$$n \nmid m \Rightarrow \left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m-1}{n}\right], \qquad n|m \Rightarrow \left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m-1}{n}\right] + 1,$$

întrucât implicaţiile inverse se demonstrează prin reducere la absurd.

Fie cazul $n \nmid m$ şi $\left[\frac{m}{n}\right] = h \Rightarrow h < \frac{m}{n} < h+1 \Leftrightarrow nh < m < n(h+1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow nh \leq m-1 < n(h+1) \Leftrightarrow h \leq \frac{m-1}{n} < h+1 \Leftrightarrow \left[\frac{m-1}{n}\right] = h,$$

deci $\left[\frac{m-1}{n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right]$.

b) Cazul $n|m \Rightarrow \frac{m}{n} = h$. Avem: $h - 1 = \frac{hn-n}{n} < \frac{hn-1}{n} =$

$$= \frac{m-1}{n} < h \Rightarrow \left[\frac{m-1}{n}\right] = h - 1 = \left[\frac{m}{n}\right] - 1.$$

c) Fie $m, k, n \in \mathbb{N}$ cu $m, k \leq n$.

Să se arate că $\left[\frac{n}{k}\right] = m \Leftrightarrow \left[\frac{n}{m+1}\right] < k \leq \left[\frac{n}{m}\right]$.

Soluţie:

Fie $\left[\frac{n}{k}\right] = m \Rightarrow m \leq \frac{n}{k} < m+1 \Rightarrow \frac{n}{m+1} < k \leq \frac{n}{m} \Rightarrow k \leq \left[\frac{n}{m}\right]$ (1) şi

$$\left[\frac{n}{m+1}\right] \leq \frac{n}{m+1} < k \quad (2).$$

Din (1) şi (2) rezultă $\left[\frac{n}{m+1}\right] < k \leq \left[\frac{n}{m}\right]$.

Reciproc, fie $\left[\frac{n}{m+1}\right] < k \leq \left[\frac{n}{m}\right] \Rightarrow \left[\frac{n}{m+1}\right] \leq k-1$ (*) şi

$k \leq \left[\frac{n}{m}\right] \leq \frac{n}{m}$ (**).

Scanned with OKEN Scanner

Din (∗) rezultă $\frac{n}{m+1}-1<\left[\frac{n}{m+1}\right]\leq k-1\Rightarrow\frac{n}{m+1}<k\leq\frac{n}{m}\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\leq\frac{n}{k}<m+1\Leftrightarrow\left[\frac{n}{k}\right]=m.$$

P_{26}. Să se arate că oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$ au loc relațiile:

1) $\{\{a\}+b\}=\{a+\{b\}\}=\{a+b\}$;
2) $\{\{a+b\}+c\}=\{a+\{b+c\}\}=\{a+b+c\}$;
3) $[[a]+b]=[a+[b]]=[a]+[b]$.

Soluție:

Dacă $\{x\}=x-[x],(\forall)x\in\mathbb{R}$ și $\{x+k\}=\{x\},(\forall)\,x\in\mathbb{R},(\forall)\,k\in\mathbb{Z}$.

1) Avem $\{\{a\}+b\}=\{a+b-[a]\}=\{a+b\}$
și $\{a+\{b\}\}=\{a+b-[b]\}=\{a+b\}$.
2) Analog, avem $\{\{a+b\}+c\}=\{a+b+c-[a+b]\}=$
$=\{a+b+c\}$
și $\{a+\{b+c\}\}=\{a+b+c-[b+c]\}=$
$=\{a+b+c\}$.
3) Din $[x+k]=k+[x],(\forall)x\in\mathbb{R},(\forall)k\in\mathbb{Z}$,
atunci $[[a]+b]=[a]+[b]$ și $[a+[b]]=[b]+[a]$.

P_{27}. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $\left[\frac{n+m}{2}\right]-\left[\frac{n-m}{2}\right]=m$;

b) $\left[\frac{n+m}{2}\right]+\left[\frac{n-m+1}{2}\right]=n$.

Soluție:

a) Avem $\frac{n+m}{2}-\left\{\frac{n+m}{2}\right\}-\frac{n-m}{2}+\left\{\frac{n-m}{2}\right\}=$

$$=m+\left\{\frac{n-m}{2}\right\}-\left\{\frac{n+m}{2}\right\}=m+\left\{\frac{n-m}{2}+m\right\}-\left\{\frac{n+m}{2}\right\}=$$

$$=m+\left\{\frac{n+m}{2}\right\}-\left\{\frac{n+m}{2}\right\}=m.$$

b) Membrul stâng se mai scrie, ținând seama de punctul a) și de identitatea lui Hermite, astfel:

$$\left[\frac{n+m}{2}\right]-\left[\frac{n-m}{2}\right]+\left[\frac{n-m}{2}\right]+\left[\frac{n-m+1}{2}\right]=$$

$$=m+\left[\frac{n-m}{2}\right]+\left[\frac{n-m}{2}+\frac{1}{2}\right]=m+n-m=n.$$

Gheorghe Andrei

P_{28}. Să se arate că $x, y \in \mathbb{R}$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ rezultă:

$$\left[\frac{x+y}{n}\right] = \begin{cases} \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right], & \text{dacă } 0 \leq \left\{\frac{x}{n}\right\} + \left\{\frac{y}{n}\right\} < 1 \\ \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right] + 1, & \text{dacă } 1 \leq \left\{\frac{x}{n}\right\} + \left\{\frac{y}{n}\right\} < 2 \end{cases}.$$

Soluție:

Avem $\frac{x+y}{n} = \frac{x}{n} + \frac{y}{n} = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right] + \left\{\frac{x}{n}\right\} + \left\{\frac{y}{n}\right\} = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right] + \alpha + \beta$ cu $\alpha, \beta \in [0,1)$.

Prin urmare, dacă $0 \leq \alpha + \beta < 1 \Rightarrow \left\{\frac{x+y}{n}\right\} = \left[\frac{x}{n}\right] + \left\{\frac{y}{n}\right\}$, iar dacă

$$1 \leq \alpha + \beta < 2 \Rightarrow \left[\frac{x+y}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{y}{n}\right] + 1.$$

P_{29}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{Z}$ au loc relațiile:

a) $\{n\{x\}\} = \{nx\}$;

b) $[nx] = n[x] + \{nx\}$.

Demonstrație:

a) Avem $\{n\{x\}\} = \{n(x - [x])\} = \{nx - n[x]\} = \{nx\}$.

b) Avem $[nx] = [n([x] + \{x\})] = [n[x] + n\{x\}] =$
$= n[x] + [n\{x\}] = n[x] + \{nx\}$.

P_{30}. Să se demonstreze că exponentul numărului prim p din descompunerea canonică a lui $n!$ este: $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$.

Demonstrație:

Numărul factorilor produsului $n!$, multipli ai lui p, este $\left[\frac{n}{p}\right]$, dintre ei vor fi $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ multipli ai lui p^2, iar din aceștia din urmă, vor fi $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ multipli ai lui p^3 ș. a. m. d.

Suma numerelor indicate va da tocmai exponentul cerut, deoarece fiecare factor al produsului $n!$ multipli ai lui p^m, însă nu și ai lui p^{m+1}, se socotește în modul indicat de m ori ca multipli ai lui $p, p^2, p^3, \cdots, p^m$. Se observă ușor că suma precedentă este finită deoarece există un $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n < p^k$ și $\left[\frac{n}{p^m}\right] = 0, (\forall)\, m \geq k$.

P_{31}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea:

a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$;

b) $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$.

(identitatea lui Hermite)

Scanned with OKEN Scanner

a) Demonstrația 1:

Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

Avem $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + \left[[x] + t + \frac{1}{2}\right] = 2[x] + \left[t + \frac{1}{2}\right] =$

$$= \begin{cases} 2[x], & \text{dacă } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2[x] + 1, & \text{dacă } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}.$$

Calculăm $2[x] = [2(k + t)] = [2k + 2t] = 2k + [2t] =$

$$= \begin{cases} 2[x], & \text{dacă } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2[x] + 1, & \text{dacă } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$ de unde rezultă identitatea.

Demonstrația 2:

Arătăm că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) =) [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - [2x]$ este periodică cu perioada principală $T = \frac{1}{2}$.

Într-adevăr $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x + 1] + [2x + 1] =$

$$= \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] - [2x] = f(x) \text{ și } f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Fie $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci $f(x_0) = [x_0] + \left[x_0 + \frac{1}{2}\right] - [2x_0] = 0 + 0 - 0 = 0$,

deci $f(x) = 0, (\forall)\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ de unde rezultă că $f(x) = 0, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Observație: Vezi capitolul „Aplicații identitatea lui Hermite".

b) Se procedează analog.

P32. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile:

a) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = \{2x\} + \frac{1}{2}$;

b) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} = \{3x\} + 1$;

c) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} + \left\{x + \frac{2}{n}\right\} + \cdots + \left\{x + \frac{n-1}{n}\right\} = \{nx\} + \frac{n-1}{2}$.

Soluție: În identitățile lui Hermite se exprimă partea întreagă în funcție de partea fracționară.

Scanned with OKEN Scanner

P_{33}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] \text{(identitatea lui Hermite).}$$

Demonstrația 1:

Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

Există un întreg m astfel încât $\frac{m}{n} \leq t < \frac{m+1}{n}$, $(*)\ m - 1 \leq m < n$.

Scriem partea din stânga a egalității sub forma:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-m-1}{n}\right] + \left[x + \frac{n-m}{n}\right] + \cdots +$$
$$+ \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [k+t] + \left[k + t + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[k + t + \frac{n-m-1}{n}\right] +$$
$$+ \left[k + t + \frac{n-m}{n}\right] + \cdots + \left[k + t + \frac{n-1}{n}\right].$$

Observăm că primii $n - m$ termeni au partea întreagă k, deoarece cel mai mare dintre ei are partea întreagă k. Într-adevăr:

$$x + \frac{n-m-1}{n} = k + t + \frac{n-m-1}{n} < k + \frac{m+1}{n} + \frac{n-m-1}{n} =$$
$$= k + 1 \Rightarrow \left[x + \frac{n-m-1}{n}\right] = k.$$

Prin urmare, suma primilor $n - m$ termeni este $(n - m)k$. Ceilalți m termeni au partea întreagă $k + 1$ și deci suma lor este $m(k + 1)$. Așadar, suma din stânga este $nk + m$.

Membrul drept este: $[nx] = [n(k + t)] = [nk + nt] = nk + [nt] = nk + m$

deoarece din $(*) \Rightarrow \frac{m}{n} \leq t < \frac{m+1}{n} \Rightarrow m \leq nt < m + 1 \Rightarrow [nt] = m$

prin urmare avem egalitatea.

Demonstrația 2:

Pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, fixat, considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx].$$

Arătăm că f este periodică cu $T = \frac{1}{n}$. Într-adevăr:

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x+1] - \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right] =$$
$$= [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx] = f(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left[x + \frac{i}{n}\right] = 0, i = 0,1,2, \ldots, n-1$, deci $[xn] = 0$,

de unde rezultă că $f(x) = 0, (\forall)x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ și prin urmare $f(x) = 0$,

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Observație: Proprietățile $\mathbf{P_{34}}, \mathbf{P_{35}}, \mathbf{P_{36}}$ rezultă ca aplicații din $\mathbf{P_{33}}$.

$\mathbf{P_{34}}$. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$, atunci are loc egalitatea

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right] = m.$$

Soluție:

Se obține din identitatea lui Hermite pentru $x = \frac{m}{n}$.

$\mathbf{P_{35}}$. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{m}{n}\right] = [nx]$,

$(\forall)x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $m = n - 1$.

Soluție:

Dacă $m = n - 1$ se obține identitatea lui Hermite.

Reciproc, pentru $x = 1 \Rightarrow [n] = n = 1 + \left[1 + \frac{1}{n}\right] + \left[1 + \frac{2}{n}\right] + \cdots +$

$$+ \left[1 + \frac{m}{n}\right] \geq m + 1 \Rightarrow n \geq m + 1 \Rightarrow m \leq n - 1.$$

Dacă $m < n - 1$, atunci pentru $x = \frac{1}{n}$, obținem $\left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{m+1}{n}\right] =$

$= 0 + \cdots + 0 = 1$, fals. Deci, $m = n - 1$.

Marius Perianu

$\mathbf{P_{36}}$. Fie $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$ fixat.

Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{a}\right] + \left[x + \frac{2}{a}\right] + \cdots + \left[x + \frac{m-1}{a}\right] = [ax] \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Soluție:

Pentru $x = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{2}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{m-1}{a}\right] = 0, \quad (1)$

rezultă că a nu poate fi negativ, deci $a > 0$.

Prin urmare, $\left[\frac{k}{a}\right] = 0, k = \overline{1, m-1}$.

Pentru $x = \frac{1}{a} \Rightarrow \left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{2}{a}\right] + \left[\frac{3}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{m-1}{a}\right] + \left[\frac{m}{a}\right] = 1 \quad (2)$.

Din (1) rezultă $\left[\frac{m}{a}\right] = 1 \Rightarrow a \leq m$ (3).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 1$ în relația dată obținem:

$$1 + \left[1 + \frac{1}{a}\right] + \left[1 + \frac{2}{a}\right] + \cdots + \left[1 + \frac{m-1}{a}\right] = [a], \quad (4)$$

$$\Rightarrow m + \left[\frac{1}{a}\right] + \left[\frac{2}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{m-1}{a}\right] = [a] \Rightarrow [a] = m \Rightarrow m \leq a < m+1. \quad (5)$$

Din (3) și (5) rezultă $a = m$ și atunci relația devine:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{m}\right] + \left[x + \frac{2}{m}\right] + \cdots + \left[x + \frac{m-1}{m}\right] = [mx],$$

adică identitatea lui Hermite.

P_{37}. Fie $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se arate că:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+2}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}.$$

Soluția 1:

Din identitatea $\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right] = m$

se trece la partea fracționară, adică:

$$\frac{m}{n} - \left\{\frac{m}{n}\right\} + \frac{m+1}{n} - \left\{\frac{m+1}{m}\right\} + \cdots + \frac{m+n-1}{n} - \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = m$$

$$\Rightarrow S = \left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{m}\right\} + \cdots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} =$$

$$= \frac{m + m + 1 + \cdots + m + n - 1}{n} - m = \frac{nm + \frac{n(n-1)}{2}}{n} - m = \frac{n-1}{2}.$$

Soluția 2:

Prin inducție, după m. Fie $E(n,m)$ suma din stânga. Pentru $m = 0$ egalitatea evidentă

$$E(n,0) = \left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{2}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

Presupunând egalitatea adevărată pentru m, atunci pentru $m+1$, avem

$$E(n, m+1) = \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+2}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+n}{n}\right\} =$$

$= E(n,m)$, deoarece $\left\{\frac{m+n}{n}\right\} = \left\{\frac{m}{n} + 1\right\} = \left\{\frac{m}{n}\right\}$.

G.M. nr. 1/1988

P_{38}. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ cu $(m,n) = 1$.

Atunci are loc egalitatea $\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{2m}{n}\right\} + \left\{\frac{3m}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}$.

Soluție: Deoarece $(m,n) = 1$, atunci pentru orice k,

$$1 \leq k < n-1, \left\{k\frac{m}{n}\right\} \neq 0 \text{ și } \left\{(n-k)\frac{m}{n}\right\} \neq 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și cum $k\frac{m}{n}+(n-k)\frac{m}{n}=m$ rezultă $\left\{\frac{km}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-k)m}{n}\right\}=1$

astfel că din $S=\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\cdots+\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}$ și

$$S=\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}+\left\{\frac{(n-2)m}{n}\right\}+\cdots+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\left\{\frac{m}{n}\right\}$$

rezultă $2S=n-1\Rightarrow S=\frac{n-1}{2}$.

P$_{39}$. Dacă m și n sunt două numere naturale prime între ele, atunci:

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{2n}{m}\right]+\cdots+\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

K.F. Gauss

Soluția 1:

Din teorema împărțirii, avem:

$$\begin{aligned} m&=nq_1+r_1 && \text{cu } 0\le r_1<n\\ 2m&=nq_2+r_2 && \text{cu } 0\le r_2<n\\ 3m&=nq_3+r_3 && \text{cu } 0\le r_3<n\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)m=nq_{n-1}+r_{n-1} \qquad \text{cu } 0\le r_{n-1}<n$$

și deoarece $(m,n)=1$ rezultă că $r_i\neq r_j$ pentru $i\neq j$ și $r_i\neq 0$.

Deci, resturile $r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}$ sunt, într-o anumită ordine, numerele $1,2,\ldots,n-1$. Adunând membru cu membru egalitățile precedente și ținând seama că $q_i=\left[\frac{im}{n}\right]$, găsim:

$$\frac{1}{2}(n-1)nm=n(q_1+q_2+\cdots+q_{n-1})+\frac{1}{2}(n-1)n,$$

$$\text{deci: } q_1+q_2+\cdots+q_{n-1}=\frac{(m-1)(n-1)}{2};$$

$$\left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{2m}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{(n-1)m}{n}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Schimbând rolurile lui m și n între ele, rezultă și cealaltă egalitate.

Soluția 2:

Să reprezentăm în plan punctele de coordonate întregi cuprinse în interiorul dreptunghiului $OABC$, unde $A(n,0),B(n,m),C(0,m)$. Numărul

acestor puncte este $(m-1)(n-1)$. Pe diagonala OB nu sunt puncte de coordonate întregi deoarece $(m,n)=1$. Dacă numărăm câte puncte sunt sub diagonală, de abscisă k, este numărul de puncte de coordonate întregi de pe segmentul MN care are lungimea $k\frac{m}{n}$ (rezultă din asemănarea triunghiurilor OMN și OAB).

Deci, vor fi $\sum_{k=0}^{n-1}\left[k\frac{m}{n}\right]$ puncte de coordonate întregi sub diagonală.

Avem în total $(m-1)(n-1)$ puncte, iar sub diagonală vor fi $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$.

Așadar: $$\sum_{k=0}^{n-1}\left[k\frac{m}{n}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Analog $$\sum\left[\frac{kn}{m}\right]=\frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Soluția 3: Se poate utiliza $\mathbf{P_{38}}$.

$\mathbf{P_{40}}$. Să se demonstreze identitatea:

$\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{h\cdot q}{p}\right]+\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{k\cdot p}{q}\right]=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$, unde p,q impare, $p,q\geq 3$, $(p,q)=1$.

Edmund Landau

Soluție 1:

Considerăm mulțimea $M=\{kp-hq\}$, unde $k=1,2,\ldots,\frac{q-1}{2}$ și $h=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$ și care posedă deci $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ elemente. Toate aceste elemente sunt diferite de zero și diferite câte două.

Într-adevăr, dacă presupunem că $kp-hq=0\Rightarrow kp=hq\Rightarrow p|hq$, dar $(p,q)=1\Rightarrow p|h$ ceea ce este imposibil întrucât $1\leq h\leq\frac{p-1}{2}$.

Dacă presupunem că $k_1p-h_1q=k_2p-h_2q$ pentru $k_1\neq k_2$ sau $h_1\neq h_2$ rezultă:

$(k_1-k_2)p=(h_1-h_2)q\Rightarrow p|q\ (h_1-h_2)$, dar $(p,q)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow p|h_1-h_2$ însă $1\leq h_1,h_2\leq\frac{p-1}{2}\Rightarrow 0\leq(h_1-h_2)\leq p-1$, deci relația

$p|h_1 - h_2$ nu poate avea loc, aşadar trebuie ca $h_1 = h_2$ de unde rezultă: $k_1 = k_2$, contradicţie cu presupunerea făcută. Să evaluăm numărul numerelor pozitive şi negative din mulţimea M.

Fie $kp - hq > 0 \Rightarrow h < \frac{kp}{q}$, deci pentru k fixat, h poate lua $\left[\frac{kp}{q}\right]$ valori şi prin urmare, în total vor fi în mulţimea M, $\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]$ numere pozitive. În mod analog, în mulţimea M vor fi $\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{hq}{p}\right]$ numere negative.

Rezultă deci relaţia: $\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right] + \sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{hq}{p}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$, unde $(p, q) = 1$.

Soluţie 2:

Dacă f este o funcţie continuă şi pozitivă definită pe intervalul $[p, q]$, atunci suma $\sum_{\substack{q<x<p \\ x\in\mathbb{Z}}} [f(x)]$ reprezintă pentru $x \in \mathbb{Z}$ numărul punctelor de coordonate întregi situate în domeniul plan $q < x \leq p, 0 < y \leq f(x)$. Egalitatea din enunţ are loc pentru numerele impare p şi q, prime între ele. Egalitatea din enunţ este echivalentă cu egalitatea $n_1 + n_2 = n$, unde n_1, n_2 şi n reprezintă numărul punctelor de coordonate întregi respectiv din domeniile plane:

$$0 < x < \frac{q}{2}, 0 < y < \frac{p}{q}x;\ 0 < y < \frac{p}{2}, 0 < x < \frac{p}{q}y;\ 0 < x < \frac{q}{2}, 0 < y < \frac{p}{2}.$$

(Se poate utiliza, ca suport intuitiv, reprezentarea grafică a domeniilor.)

P_{41}. Dacă n este un număr natural oarecare, atunci exponentul lui p în $n!$ $(p < n)$ este:

$$\alpha = \min_{1\leq i\leq k} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p_i^j, \beta_i}\right] ((\forall)) \text{ unde } p = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$

$(p_1, p_2, \cdots, p_k$ sunt numere prime).

A.M. Legendre

Scanned with OKEN Scanner

Soluție:

Evident, dacă $p > r, \alpha = 0$, iar dacă $p = n$, atunci $\alpha = 1$ (p prim).

Vom determina exponentul α_i al lui p_i în $n!$ $(i = 1,2, \dots, k)$; deoarece între p_i numere naturale consecutive există unul și numai unul divizor cu p_i (p_i prim) rezultă că până la n sunt $\left[\frac{n}{p_i}\right]$ numere divizibile cu p_i, analog există $\left[\frac{n}{p_i^2}\right]$ numere divizibile cu $p_1^3, \cdots, \left[\frac{n}{p_i^m}\right]$ numere divizibile cu p_i^m.

Deci, $\alpha_i = \sum_{m=1}^{r} \left[\frac{n}{p_i^m}\right]$, unde r se alege astfel încât $\left[\frac{n}{p_i^r}\right] = 0$ $(p_i^r > n)$.

Exponentul lui $p_i^{\beta_i}$ în $n!$ va fi:

$$\left[\frac{\sum_{m=1}^{r}\left[\frac{n}{p_i^m}\right]}{\beta_i}\right] = \sum_{m=1}^{r}\left[\frac{r}{p_i^m \cdot \beta_i}\right].$$ (S-a utilizat proprietatea $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.)

Prin urmare, exponentul lui p în $n!$ va fi cel mai mic dintre numerele

$\left[\frac{\alpha_i}{p_i}\right], i = 1,2, \cdots, k$, adică: $\alpha = min_{1 \le i \le k} \sum_{j=1}^{r_i} \left[\frac{n}{p_i^j, \beta_i}\right]$ unde pentru fiecare $i = 1,2, \cdots, k, r_i$ se alege astfel încât $\left[\frac{n}{p_i^{r_i}, \beta_i}\right] = 0$.

Ca o aplicație putem să determinăm exponentul numărului prim p în descompunerea canonică a lui $n!$. Acest exponent va fi:

$\sum_{i \in \mathbb{N}} \left[\frac{n}{p^i}\right]$ (luând $p_1 = p, \beta_1 = 1$, iar $p_i = \beta_i = 1$), $(\forall)\ i = 2,3, \dots, k$.

P42. Fie S_n o sumă de radicali de ordin $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Să demonstrăm următoarea egalitate:

$[S_{(n)}] = [\sqrt[m]{an + b}]$, unde $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

Pentru demonstrație este suficient să arătăm că:

$\sqrt[m]{an + b} \le S_n < \sqrt[m]{an + b + 1} \Leftrightarrow an + b \le S_{(n)}^m < an + b + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [S_{(n)}^m] = an + b \Rightarrow \sqrt[m]{[S_{(n)}^m]} = \sqrt[m]{an+b} \Rightarrow \left[\sqrt[m]{[S_{(n)}^m]}\right] = [\sqrt[m]{an+b}]$,

dar din identitatea $\left[\sqrt[m]{[a^m]}\right] = [a]$ rezultă că $\left[\sqrt[m]{[S_{(n)}^m]}\right] = [S_n]$, deci

$[S_n] = [\sqrt[m]{an+b}]$.

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 2 | Aplicaţii de bază

§ 1. Egalităţi elementare

1. a) Să se arate că $a+b=[a]+[b]$ dacă şi numai dacă $a,b\in\mathbb{Z}$.

b) Să se arate că $a-b=[a]-[b]$ dacă şi numai dacă $\{a\}=\{b\}$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că $\{a\}+\{b\}=1$ dacă şi numai dacă $a+b\in\mathbb{Z}$ şi $a,b\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

3. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că $[na]=[nb],\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, dacă şi numai dacă $a=b$.

4. Să se arate că $\{a+b\}=\{\{a\}+\{b\}\},\forall\, a,b\in\mathbb{R}$.

5. Să se demonstreze că $\{a\}=\{b\}$ dacă şi numai dacă $\{na\}=\{nb\},\forall\, n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}^*$.

6. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

a) $[a+b]=[a]+[b]\Leftrightarrow\{a+b\}=\{a\}+\{b\}$;

b) $[a-b]=[a]-[b]\Leftrightarrow\{a-b\}=\{a\}-\{b\}$;

c) $[a+b]=[a]+[b]\Leftrightarrow 0\leq\{a\}+\{b\}<1$;

d) $[a+b]-[a]-[b]=\begin{cases}0, & \text{dacă } 0\leq\{a\}+\{b\}<1\\ 1, & \text{dacă } 1\leq\{a\}+\{b\}<2\end{cases}$;

e) $\{a-b\}=\begin{cases}\{a\}-\{b\}, & \text{dacă } \{a\}\geq\{b\}\\ 1-(\{a\}-\{b\}), & \text{dacă } \{a\}<\{b\}\end{cases}$.

7. Să se arate că dacă $x\in\mathbb{N}^*$ şi $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\{y\}<1$, atunci:

a) $[xy]=x[y]$;

b) $\{xy\}=x\{y\}$.

8. a) Să se demonstreze că $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $\{(n+1)x\}=\{nx\},\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, dacă şi numai dacă $x\in\mathbb{Z}$.

9. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$, distincte, şi $a=\frac{m\sqrt{2}+n\sqrt{5}}{m+n}$. Să se calculeze $[a]$.

10. Fie $a\in\mathbb{R}^*$. Să se demonstreze că: $a+\frac{1}{a}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}\in\mathbb{Z}$.

11. Să se arate că: $\{a+b\}-\{b\}=\begin{cases}\{a\}, & \text{dacă } \{a\}+\{b\}<1\\ \{a\}-1, & \text{dacă } 1\leq\{a\}+\{b\}<2\end{cases}$.

12. Fie $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ cu $x+y=n\in\mathbb{Z}$. Arată că: $x+y=[x]+[y]+1$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Să se arate că:

a) $\left[\frac{1}{a}\right] = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^*$;

b) $\left\{\frac{1}{a}\right\} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > 1$;

c) $[a] = \left[\frac{1}{a}\right] \Leftrightarrow a = \pm 1$.

14*. Fie $a > 0$. Să se demonstreze că:

a) Dacă $\{a\} = \frac{1}{a}$, atunci a este irațional.

b) Dacă $\left\{\frac{1}{a}\right\} = a$, atunci a este irațional.

15*. Să se arate că $\forall\, a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, există $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ astfel încât:

$$\{a + b\} = \{a\} + \{b\}.$$

16*. a) Fie $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $[a]\{a\} \in \mathbb{Q}$. Să se calculeze $[a]$.

b) Fie $a \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $[a]\{a\} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, atunci $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

c) Fie $a \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $[a]\{a\} \in \mathbb{Q}$, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

17. Fie $a > 0$. Să se arate că $\left[a\left[\frac{1}{a}\right]\right] = 1$, dacă și numai dacă $a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

18. Fie $m, n \in \mathbb{Z}$ și $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $\{mx_0\} = \{nx_0\}$.
Demonstrați că $n = m$.

19. Fie $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că: $\left[\frac{\left[\frac{x}{n}\right]}{n}\right] = \left[\frac{\frac{[x]}{n}}{n}\right] = \left[\frac{x}{n^2}\right]$.

20.** Fie $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $[|a|] = |[a]|$ dacă și numai dacă $a \in [0, \infty) \cup \mathbb{Z}$.

b) Să se arate că:

$\{|a|\} = |\{a\}|$, dacă și numai dacă $a \in [0,\infty) \cup \mathbb{Z} \cup \left\{k + \frac{1}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}_-$.

c) Să se arate că $[\{a\}] = \{[a]\}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

21.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\{ka\} = \{kb\}$ și $\{(k+1)a\} = \{(k+1)b\}$. Să se arate că $\{na\} = \{nb\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

22. Să se arate că $\left[\frac{n + a}{m}\right] = \left[\frac{n + [a]}{m}\right]$ oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}$.

23. Fie $x > 1$. Să se arate că: $x^2 = ([x]^2 + 1)(\{x\}^2 + 1) \Leftrightarrow x = [x] + \frac{1}{[x]}$.

24. Calculați $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\}$, unde $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Fie $a, b \in [1,2]$, astfel încât $a + b = 3$. Determinați $\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]$.

26*. a) Știind că $[x] = \underbrace{0{,}555\ldots5}_{100 \text{ ori}}$, să se calculeze $[2x]$.

b) Știind că $\{x\} = \underbrace{0{,}555\ldots5}_{100 \text{ ori}}$, să se calculeze $\{2x\}$.

c) În ipotezele de mai sus, să se calculeze $[3x]$ și $\{3x\}$.

27.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a, b \in [n, n+1]$ astfel încât $a + b = 2n + 1$. Arătați că partea întreagă a expresiei $E_n = \frac{n}{a} + \frac{n}{b}$ este independentă de a, b și n.

28.** Arătați că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$ și $\left[\frac{a+b}{2}\right] + \{\sqrt{ab}\} = \frac{2ab}{a+b}$, atunci $a = b$.

Generalizare.

29*. Fie a un număr irațional.

a) Dacă $a > 1 \Rightarrow \left[\frac{[na]}{a}\right] = n - 1$.

b) Dacă $a < -1 \Rightarrow \left[\frac{[na]}{a}\right] = n$.

30*. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) $[x + a] = [x + b], \forall\, x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = b$;

b) $[ax] = [bx], \forall\, x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = b$;

c) $[ax + b] = [bx + a], \forall\, x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = b$.

§ 2. Inegalități elementare

31. Să se arate că:

a) $a - b - 1 < [a] - [b] < a - b + 1, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

a') dacă $a - b \in \mathbb{Z}$, atunci $[a] - [b] = a - b$;

b) $a + b - 2 < [a] + [b] \leq a + b, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;

b') dacă $a + b \in \mathbb{Z}$, atunci $a + b - 1 \leq [a] + [b] \leq a + b$.

32. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ au loc inegalitățile:

a) $[x] \geq m \Leftrightarrow x \geq m$;

b) $[x] > m \Leftrightarrow x \geq m + 1$;

c) $[x] < m \Leftrightarrow x < m$;

d) $[x] \leq m \Leftrightarrow x < m + 1$.

33. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \notin \mathbb{Z}$ au loc inegalitățile:

a) $[x] \geq m \Rightarrow x \geq [m] + 1 = [m + 1]$;

b) $[x] > m \Rightarrow x \geq [m] + 1 = [m + 1]$;

c) $[x] \leq m \Leftrightarrow x < [m] + 1 = [m + 1]$;

d) $[x] < m \Leftrightarrow x < [m] + 1 = [m + 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

34. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $t \in [0,1)$, atunci au loc relațiile:

a) $\{a\} = t \Leftrightarrow k + t, \forall\, k \in \mathbb{Z}$;

b) $\{a\} > t \Leftrightarrow k + t < a < k + 1, \forall\, k \in \mathbb{Z}$;

c) $\{a\} \geq t \Leftrightarrow k + t \leq a < k + 1, \forall\, k \in \mathbb{Z}$;

d) $\{a\} < t \Leftrightarrow k \leq a < k + t, \forall\, k \in \mathbb{Z}$;

e) $\{a\} \leq t \Leftrightarrow k \leq a \leq k + t, \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Observație:

În loc de a se poate considera orice expresie E.

35. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{Z}$. Să se arate că:

a) $n[a] \leq [na] < na, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) $n[a] \geq [na], \forall\, n \in \mathbb{Z}_-, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

c) $n[a] \geq na \geq [na], \forall\, n \in \mathbb{Z}_-, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

d) $n\{a\} \geq \{na\}, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

e) $n\{a\} \leq \{na\}, \forall\, n \in \mathbb{Z}_-, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

f) $\{n\{a\}\} = \{na\}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

g) $\dfrac{\{na\}}{n} \leq \max\{\{a\}, 1 - \{a\}\}, n \in \mathbb{Z}_+$.

36. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, \{a\} + \left\{\dfrac{1}{a}\right\} < 2 < \{a\} + \dfrac{1}{\{a\}}$.

37. Să se arate că: $\dfrac{m}{n} - \dfrac{n-1}{n} \leq \left[\dfrac{m}{n}\right] \leq \dfrac{m}{n}, \forall\, m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N}^*$.

38. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $\left[\dfrac{m}{n}\right] \geq \dfrac{m - (n-1)}{n}, \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\left\{\dfrac{m}{n}\right\} \leq \dfrac{n-1}{n}$;

c) $\left[\dfrac{m}{n}\right] \geq \left[\dfrac{m+1}{n}\right] - 1$.

39. Să se arate că: $\left[\dfrac{n}{m}\right] \geq \left[\dfrac{n+1}{m}\right] - 1$ sau $\left[\dfrac{n+1}{m}\right] \leq \left[\dfrac{n}{m}\right] + 1, \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$.

40. Să se arate că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*, \left[\dfrac{n}{m}\right] \geq \dfrac{n+1}{m} - 1$.

41. Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, avem $n + \left[\dfrac{m}{n}\right] \geq 2\left[\sqrt{m}\right]$.

42. Fie $a, b, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $\left[\dfrac{ab}{n}\right] \geq a\left[\dfrac{b}{n}\right]$.

b) $\left[\dfrac{ab}{n}\right] \geq \max\left(a\left[\dfrac{b}{n}\right], b\left[\dfrac{a}{n}\right]\right)$.

43. Să se demonstreze că oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $a, b > 0$ are loc inegalitatea: $m[a] + n[b] \leq [ma + nb]$.

Scanned with OKEN Scanner

44. Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ au loc inegalităţile:

a) $[a] + [b] \leq [a + b] \leq [a] + [b] + 1$;

b) $[a] - [b] - 1 \leq [a - b] \leq [a] - [b]$;

c) $\{a\} + \{b\} - 1 \leq \{a + b\} \leq \{a\} + \{b\} \leq \{a + b\} + 1$;

d) $\{a\} - \{b\} - 1 \leq \{a - b\} \leq \{a\} - \{b\} + 1$.

45. Să se arate că:

a) $2[a] \leq [2a] \leq 2[a] + 1$;

b) $2\{a\} - 1 \leq \{2a\} \leq 2\{a\}$.

46. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

a) dacă $a, b \in [0,\infty) \Rightarrow [a][b] \leq [ab] \leq ab$;

b) dacă $a, b \in (-\infty,0] \Rightarrow [a][b] \geq ab \geq [ab]$;

c) dacă $a \geq 0$ şi $b \leq 0 \Rightarrow$

1. $[a[b]] \leq [b[a]]$;
2. $[a][-b] \leq -[ab]$;
3. $[a][-b] \leq -[a][b]$.

47. Să se arate că oricare ar fi $a, b \geq 0$ au loc inegalităţile:

a) $[a][b] \leq [a[b]] \leq [ab]$;

b) $[a[-b]] \leq [-b[a]]$;

c) $[a][b] \leq [ab] \leq [a][b] + [a] + [b]$;

d) $[a]^2 \leq [a^2] \leq [a]^2 + 2[a]$.

48. Să se arate că oricare ar fi $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ au loc inegalităţile:

a) $[a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] \leq [a_1 + a_2 + \cdots + a_n] \leq [a_1] + [a_2] + + \cdots + [a_n] + n - 1$;

b) $[a_1] \cdot [a_2] \cdot \cdots \cdot [a_n] \leq [a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n], \forall\, a_k > 0, k = \overline{1,n}$;

c) $\{a_1\} + \{a_2\} + \cdots + \{a_n\} - (n - 1) \leq \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\} \leq \leq \{a_1\} + \{a_2\} + \cdots + \{a_n\}$;

d) $n[a] \leq [na] \leq n[a] + n - 1, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

e) $n\{a\} - (n - 1) \leq \{na\} \leq n\{a\}, \forall\, a \in \mathbb{R}$;

f) $\dfrac{n(n+1)}{2}[a] \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [ka] \leq \dfrac{n(n+1)}{2}[a] + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Să se arate că pentru orice $a > 0$ şi oricare $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

g) $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} [ka]} \leq \dfrac{(n+1)a}{2}$; h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} [1 + ka] \geq n + \dfrac{n(n+1)}{2}[a]$.

Scanned with OKEN Scanner

49. Fie $x \in \mathbb{R}$, atunci au loc inegalitățile:

a) $[x]^n \leq [x^n]$, oricare ar fi $x \geq 0$;

b) $[x]^n \leq [x^n]$, oricare ar fi $x \leq 0$ și n impar;

c) $[x]^n \geq [x^n]$, oricare ar fi $x \leq 0$ și n par.

50. Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a + b = 1$, atunci au loc inegalitățile:

a) $[x + y] \leq [x + a] + [y + b] \leq [x + y] + 1$;

b) $[x + y] \leq \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[y + \frac{1}{2}\right] \leq [x + y] + 1$.

51. Oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $a + b + c = 1$, atunci au loc inegalitățile:

a) $|[x + a] + [y + b] + [z + c] - [x + y + z]| \leq 1$;

b) $|[x + a] + [x + b] + [x + c] - [3x]| \leq 1$;

c) $\left|3\left[x + \frac{1}{3}\right] - [3x]\right| \leq 1$.

52. Oricare ar fi $x_k, a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, cu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, atunci au loc inegalitățile:

a) $[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] - (n - 2) \leq \sum_{k=1}^{n} [x + a_k] \leq$

$\leq [x_1 + x_2 + \cdots + x_n] + 1$;

b) $[nx] - (n - 2) \leq \sum_{k=1}^{n} [x + a_k] \leq [nx] + 1$.

53. Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

a) $[a] + [b] + [a + b] \leq [2a] + [2b] \leq [a] + [b] + [a + b] + 1$;

b) $2([a] + [b]) \leq [2a] + [2b] \leq 2([a] + [b] + 1)$.

54. Să se demonstreze că dacă $|a - b| \leq 1$, atunci $|[a] - [b]| \in \{0,1\}$.

55.** Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $a, b \geq 2$ astfel încât $\left\{\frac{a}{b}\right\} < 1 - \frac{1}{\left[\frac{a}{b}\right]}$.

Să se arate că $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right]$.

56.** Fie $a > 0$. Să se arate că $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} < \frac{3}{2}$.

57. Fie $a > 0$. Pentru ce valori ale lui a avem $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} < \sqrt{2}$?

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. Alte egalități

58. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, m \neq 1,2$. Dacă m nu divide pe $2n+1$ și pe $2n+2$, atunci:

$$\left[\frac{2n+2}{m}\right] = \left[\frac{2n+1}{m}\right] = \left[\frac{2n}{m}\right].$$

59. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se exprime $\left[\frac{n+1}{m}\right]$ în funcție de $\left[\frac{n}{m}\right]$.

60. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $\left[\frac{n+m}{m}\right] = \left[\frac{n+1}{m}\right]$ dacă și numai dacă $n+1 \vdots m$.

61*.** a) Fie numerele m și n cu $n \neq 0$.

Dacă $\left[\frac{m}{n}\right] = p$ și $\left[\frac{m}{n+1}\right] = q$, aflați $\left[\frac{m}{n(n+1)}\right]$.

b) Determinați cea mai mică valoare a lui m astfel încât să existe exact opt valori distincte ale lui n pentru care $\left\{\frac{m}{n}\right\} = \left\{\frac{m}{n+1}\right\}$.

62*.** Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că cele două egalități sunt identități dacă și numai dacă, cel puțin unul dintre numerele x sau y este întreg:

a) $[x] + [y] = [x+y]$;

b) $[-x] + [-y] = [-x-y]$.

63*.** Să se demonstreze că un număr α este rațional, dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $[k\alpha] = k\alpha$.

64.** a) Fie $a, b \in (1, \infty)$. Să se arate că dacă $[a^k] = [b^k], \forall\, k \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = b$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fixat. Găsiți două numere $a, b \in (1, \infty), a \neq b$, astfel încât $[a^k] = [b^k], \forall\, k = \overline{1,n}$.

65*. Fie α, β numere iraționale pozitive astfel încât $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Să se arate că $[\alpha] = 1$ sau $[\beta] = 1$.

66.** a) Fie $a \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}$ astfel încât $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$.

Să se arate că a este irațional. Dați exemple de un astfel de număr.

b) Să se arate că $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} \neq 1$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Q}_+^*$.

67.** Fie $A = \left\{x \in \mathbb{R}^* \mid \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Să se arate că A nu conține numere raționale.

68.** Să se arate că dacă $\{a\} = \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$, atunci $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

69*.** Fie $a \in \mathbb{R}^*$ cu proprietatea că $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Arătați că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1.$

70***. Fie a pozitiv cu $\{a^{-1}\} = \{a^2\}$ și $2 < a^2 < 3$.
Să se calculeze $E(a) = a^{12} - 144a^{-1}$.

71*. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a\{bk\} = \{ab\}k, \forall\, k \in \mathbb{Z}$.
Să se arate că $b \in \mathbb{Z}^*$ și $a \in \mathbb{Q}^*$.

72**. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă $a[bn] = b[an], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = b$.

73**. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă $a[bk] = [ab]k, \forall\, k \in \mathbb{Z}^*$, atunci b este întreg și a este rațional.

74**. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că dacă $[a + b]k = [ak] + [bk], \forall\, k \in \mathbb{Z}^*$, atunci a și b sunt întregi.

75**. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă $a[bn] = b[an], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, atunci a și b sunt întregi.

76**. Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*, p \geq 2, m > n$.
Să se arate că $\left[\frac{m^p}{m+1} - \frac{n^p}{n+1}\right] = 0 \Leftrightarrow p = 2$ și $m = n + 1$.

77**. Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\left\{a + \left\{a + \cdots \left\{a + \{a\}\right\}\right\}\right\}}_{\text{de } n+1 \text{ ori } a} = \{na\}.$$

78**. Să se arate că dacă:
a) $\{15a\} = \{8a\}$, atunci $\{75a\} = \{26a\}$;
b) $\{32b\} = \{200b\}$ și $\{2b\} = \{100b\}$, atunci $\{b\} = \{155b\}$.

Scanned with OKEN Scanner

soluţii 2 | Aplicaţii de bază

§ 1. Egalităţi elementare

1. a) Evident, dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $a + b = [a] + [b]$.
Reciproc, dacă $a + b = [a] + [b] \Rightarrow a - [a] + b - [b] = 0$.
$\{a\} + \{b\} = 0$ şi cum $\{a\}, \{b\} \in [0, 1)$ rezultă $\{a\} = \{b\} = 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$.
b) Avem $[a] - [b] = a - b = [a] + \{a\} - [b] - \{b\} \Rightarrow \{a\} - \{b\} =$
$= 0 \Leftrightarrow \{a\} = \{b\}$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ şi $a + b \in \mathbb{Z}$, dar $\{a\} + \{b\} \in [0, 2)$
$\{a\} + \{b\} = a + b - ([a] + [b]) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{a\} + \{b\} \in \{0,1\}$,
dar cum $\{a\} + \{b\} \neq 0 \Rightarrow \{a\} + \{b\} = 1$.
Reciproc, dacă $\{a\} + \{b\} = 1 \Rightarrow \{a\} \neq 0, \{b\} \neq 0$, deci $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Egalitatea se mai scrie $1 = \{a\} + \{b\} = a + b - ([a] + [b]) \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$.

Gh. Andrei

3. O implicaţie este evidentă.
Pentru $n = 1 \Rightarrow [a] = [b] = k \in \mathbb{Z}$.
Fie $a = [a] + t = k + t$ şi $b = [b] + \{b\} = k + \alpha$, unde $k \in \mathbb{Z}, \alpha, t \in [0,1)$.
Egalitatea devine $[n(k + t)] = [n(k + \alpha)] \Rightarrow [nt] = [n\alpha] \Rightarrow$
$\Rightarrow |nt - n\alpha| < 1 \Rightarrow |t - \alpha| < \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t = \alpha$, deci $a = b$.

4. Notăm $a = [a] + t_a$, $b = [b] + t_b$; $t_a, t_b \in [0,1)$.
Avem $\{[a] + [b] + t_a + t_b\} = \{t_a + t_b\} = \{\{a\} + \{b\}\}$.

5. Fie $\{a\} = \{b\} = t \in [0,1)$ atunci $a = [a] + t$ şi $b = [b] + t \Rightarrow$
$\Rightarrow na = n[a] + nt$ şi $nb = n[b] + nt \Rightarrow \{na\} = \{n[a] + nt\} = \{nt\}$,
iar $\{nb\} = \{n[b] + nt\} = \{nt\} \Rightarrow \{na\} = \{nb\}$.
Reciproc, fie $\{na\} = \{nb\}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$. Să presupunem prin absurd că
$\{a\} \neq \{b\}$, atunci: $a = [a] + t, b = [b] + \alpha, t, \alpha \in [0,1), t \neq \alpha$.
$\{na\} = \{n[a] + nt\} = \{nt\}$ şi $\{nb\} = \{n[b] + n\alpha\} = \{n\alpha\} \Rightarrow \{nt\} = \{n\alpha\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow nt - [nt] = n\alpha - [n\alpha] \Rightarrow n(t - \alpha) = [nt] - [n\alpha] \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$,
iar $n(t - \alpha)$ nu este întotdeauna întreg pentru $t \neq \alpha$. Aşadar, se impune
$t = \alpha$, adică $\{a\} = \{b\}$.

Gh. Andrei, O.L. 1992

Scanned with OKEN Scanner

6. a) $[a+b]=[a]+[b] \Leftrightarrow a+b-\{a+b\}=a-\{a\}+b-\{b\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{a+b\}=\{a\}+\{b\}$.

b) Analog avem: $a-b-\{a-b\}=a-\{a\}-(b-\{b\}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{a-b\}=\{a\}-\{b\}$ și mai mult $\{a\} \geq \{b\}$.

c) Rezultă din punctul a).

d) Rezultă din punctele a) și c).

e) Rezultă din punctele b) și d) sau din:

$$\{a-b\}=\{[a]+\{b\}-([b]+\{b\})\}=\{\{a\}-\{b\}\}=$$
$$=\begin{cases}\{a\}-\{b\}, & \text{dacă } \{a\} \geq \{b\} \\ 1-(\{a\}-\{b\}), & \text{dacă } \{a\} < \{b\}\end{cases}.$$

Gh. Andrei

7. Avem $xy=x([y]+\{y\})=x[y]+x\{y\} \Rightarrow [xy]=x[y]+[x\{y\}]$
și cum $x\{y\}<1 \Rightarrow [xy]=x[y]$ și $\{xy\}=x\{y\}$.

8. a) Evident $x=[x]+t, t \in [0,1] \Rightarrow nx=n[x]+nt \Rightarrow [nx]=$
$=[n[x]+nt]=n[x]+[nt] \Rightarrow \dfrac{[nx]}{n}=[x]+\dfrac{[nt]}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\dfrac{[nx]}{n}\right]=\left[[x]+\dfrac{[nt]}{n}\right]=[x]$, întrucât $nt<n$ sau se face substituția
$x \to nx$ în bine cunoscuta identitate $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right]$.

b) O implicație este evidentă. Reciproc, din relația dată rezultă:
$(n+1)x-[(n+1)x]=nx-[nx] \Rightarrow x=[(n+1)x]-[nx] \in \mathbb{Z}$.

9. Se arată că $\sqrt{2}<a<\sqrt{5} \Rightarrow [a] \in \{1,2\}$.

10. $a+\dfrac{1}{a}=[a]+\{a\}+\left[\dfrac{1}{a}\right]+\left\{\dfrac{1}{a}\right\}$ de unde rezultă echivalența. Mai mult,
$a+\dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a=\pm 1 \Leftrightarrow \{a\}+\left\{\dfrac{1}{a}\right\}=0$, de unde rezultă concluzia.

11. Avem $a+b=[a]+[b]+\{a\}+\{b\} \Rightarrow$
$$\{a+b\}=\{\{a\}+\{b\}\}=\begin{cases}\{a\}+\{b\}, & \text{dacă } 0 \leq \{a\}+\{b\}<1 \\ \{a\}+\{b\}-1, & \text{dacă } 1 \leq \{a\}+\{b\}<2\end{cases}.$$

12. Avem $x+y=[x]+\{x\}+[y]+\{y\}=[x]+[y]+\{x\}+\{n-x\}=$
$=[x]+[y]+\{x\}+\{-x\}=[x]+[y]+1$ deoarece $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{-x\}+\{x\}=1$.

13. Să se arate că:

a) Din $\dfrac{1}{a}=\left[\dfrac{1}{a}\right]=k \in \mathbb{Z}^* \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^*$.

b) Din $\dfrac{1}{a}=\left\{\dfrac{1}{a}\right\} \in (0,1) \Leftrightarrow a>1$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă $a > 1$ sau $0 < a < 1$ se obține o contradicție. La fel dacă $a < -1$ sau $-1 < a < 0$. Prin urmare, $a = \pm 1$.

14. a) Evident a nu poate fi întreg (altfel $\{a\} = 0$). Din egalitatea dată rezultă $a > 1$ și $a - [a] = \frac{1}{a} \Rightarrow a - \frac{1}{a} = [a] \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - \frac{1}{a} = k$.

Dacă $a = \frac{m}{n}$ cu $(m,n) = 1$, atunci $\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = k \Rightarrow m^2 - n^2 = mnk \Rightarrow$

$\Rightarrow m|n^2$ și $n|m^2 \Rightarrow m, n \in \{\pm 1\} \Rightarrow a = 1$ fals, deci $a \notin \mathbb{Q}$.

b) Din egalitatea dată rezultă $a \in (0,1)$ și se procedează în mod analog, de altfel se face substituția $a \to \frac{1}{a}$ în punctul a).

Gh. Andrei

15. Alegem $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ astfel încât $0 < b < 1 - \{a\} < 1$,

atunci $0 < b + \{a\} \leq \{b\} + \{a\} < 1$. (*)

Dar $\{a + b\} = \{[a] + [b] + \{a\} + \{b\}\} = \{\{a\} + \{b\}\} = \{a\} + \{b\}$.

16. a) Avem $[a](a - [a]) = r \in \mathbb{Q}$. Dacă $[a] \neq 0$, atunci:

$a = [a] + \frac{r}{[a]} \in \mathbb{Q}$, fals, deci $[a] = 0$.

b) $[a]\{a\} = \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \{a\} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a = [a] + \{a\} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

c) Din $[a]\{a\} = r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \{a\} \in \mathbb{Q} \Rightarrow a = [a] + \{a\} \in \mathbb{Q}$.

17. Avem $\left[a\left[\frac{1}{a}\right]\right] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq a\left[\frac{1}{a}\right] < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \left[\frac{1}{a}\right] < \frac{2}{a}$,

dar cum $\left[\frac{1}{a}\right] \leq \frac{1}{a}$ rezultă că $\left[\frac{1}{a}\right] = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

18. Presupunem prin absurd că $n \neq m$ și din $\{mx_0\} = \{nx_0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow mx_0 - [mx_0] = nx_0 - [nx_0] \Rightarrow (m-n)x_0 = [mx_0] - [nx_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 = \frac{[mx_0] - [nx_0]}{m-n} \in \mathbb{Q}$, contradicție, deci $m = n$.

19. Avem $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ și prin urmare $\left[\frac{\left[\frac{x}{n}\right]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n^2}\right]$ și $\left[\frac{\left[\frac{x}{n}\right]}{n}\right] = \left[\left[\frac{x}{n^2}\right]\right]$.

Lucian Tuțescu, G.M. nr. 1/2004, Concursul „Gh. Dumitrescu", 2003

20. a) Evident dacă $a \in [0,\infty) \cup \mathbb{Z}$ egalitatea este adevărată.

Reciproc, fie $a \geq 0 \Rightarrow$ egalitatea devine $[a] = [a]$, așadar $a \in [0,\infty)$.

Fie $a < 0$, atunci egalitatea devine

$[-a] = -[a] \Rightarrow [-a] + [a] = [a] - [a] = 0 \Rightarrow a$ întreg $\Rightarrow a \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, $a \in [0,\infty) \cup \mathbb{Z}$.

b) Egalitatea devine $\{|a|\} = \{a\}$ cum este adevărată pentru $a \geq 0$ și pentru $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in [0,\infty) \cup \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a<0, a \notin \mathbb{Z}_-$, atunci egalitatea devine $\{-a\}=\{a\}, a=[a]+\{a\}=$ $=k+t$, ultima relație devine: $\{-t\}=\{t\} \Rightarrow \{1-t\}=\{t\} \Rightarrow t=\frac{1}{2}$

deci $a=k+\frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}_-$.

c) Evidentă.

d) O implicație este evidentă.

Dacă $a \geq 0$, atunci egalitatea devine o identitate și dacă $a \in \mathbb{Z}$, ambii membri sunt nuli.

Pentru $a<0 \Rightarrow \{-a\}=\{a\}$, excluzând numerele întregi, atunci din:

$\{-a\}+\{a\}=1 \Rightarrow \{a\}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=k+\frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Analog ca la punctul b). De fapt b) și d) sunt echivalente.

21. Egalitățile se mai scriu:

$ka-[ka]=kb-[kb] \Rightarrow k(a-b)=[ka]-[kb] \in \mathbb{Z}$.

Analog $(k+1)(a-b)=[(k+1)a]-[(k+1)b] \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-b=p \in \mathbb{Z}$.

Atunci $\{na\}=\{nb+np\}=\{nb\}$ (deoarece $np \in \mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}$).

Ovidiu Pop, G.M. nr. 4/2008, Concursul „Nicolae Coculescu", 2008

22. Avem $n+a=n+[a]+\{a\} \Rightarrow \left[\frac{n+[a]}{m}+\frac{\{a\}}{m}\right]$ (1).

Cum $n+[a]=qm+r, 0 \leq r \leq m-1$, (1) devine

$$\left[\frac{qm+r+\{n\}}{m}\right]=\left[q+\frac{r+\{n\}}{m}\right]=q+\left[\frac{r+\{n\}}{m}\right]=q$$

$\left(\text{deoarece } r+\{n\}<m \text{ și } \left[\frac{qm+r}{m}\right]=\left[q+\frac{r}{m}\right]=q+\left[\frac{r}{m}\right]=q\right)$.

23. Fie $x=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, relația devine:

$(k+t)^2=(k^2+1)(t^2+1) \Leftrightarrow (kt-1)^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k+t=k+\frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z}^*$.

Mihaela Burdușel, G.M. nr. 7-8/2009

24. $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}+\left\{\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right\}=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}+\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}=$

$=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-3\right\}+\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}=\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}+\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}=1$.

S-a aplicat relația $\{a\}+\{-a\}=1 \Leftrightarrow a \notin \mathbb{Z}$.

Cristinel Mortici

Scanned with OKEN Scanner

25. Avem $E=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{ab}=\frac{3}{a(3-a)}$, unde funcția $f(x)=x(3-x)$, cu $x\in[1,2]\Rightarrow 2\le f(x)\le\frac{9}{4}$ și $E=\frac{3}{f(a)}=3\cdot\frac{1}{f(a)}\in\left[\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]\Rightarrow[E]=1$.

26*. a) Fie $[x]=k\in\mathbb{Z}$ și $\{x\}=t\in[0,1)$, atunci $[2x]=[2k+2t]=2k+$

$+[2t]=\begin{cases}2k, & 0\le k<\frac{1}{2}\\ 2k+1, & \frac{1}{2}\le k<1\end{cases}$; deci $[2x]\in\underbrace{111\ldots1}_{101\text{ cifre}}$.

b) $\{2x\}=\{2k+2t\}=\{2t\}=2t-[2t]=\begin{cases}2t, & 0\le t<\frac{1}{2}\\ 2t-1, & \frac{1}{2}\le t<1\end{cases}$.

În cazul dat $t>\frac{1}{2}$, deci $\{2x\}=\underbrace{0{,}111\ldots1}_{99\text{ cifre de 1}}$.

c) Avem $[3x]=3k+[3t]=\begin{cases}3k, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\\ 3k+1, & t\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\\ 3k+2, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right)\end{cases}\Rightarrow[3x]=$

$=3k+1=\begin{cases}\underbrace{166\ldots65}_{99\text{ ori}}\\ \underbrace{166\ldots6}_{100\text{ ori}}\\ \underbrace{1666\ldots67}_{99\text{ ori}}\end{cases}\Rightarrow[3x]=3k+1=1666\ldots6$ și $\{3x\}=\{3t\}=$

$=3t-[3t]=\begin{cases}3t, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\\ 3t-1, & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\\ 3t-2, & t\in\left[\frac{2}{3},1\right)\end{cases}\Rightarrow 3t-1=\underbrace{0{,}666\ldots65}_{\text{de 99 ori}}$.

27.** Evident $E_n\equiv n\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{2n^2+n}{-a^2+(2n+1)a}$ unde funcția $f(a)=-a^2+(2n+1)a$ are valorile $f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n+1)^2}{4}, f(n)=$

$=f(n+1)=n^2+n$ și prin urmare orice a cu $n\le a\le n+1\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow n^2+n \le f(a) \le \frac{(2n+1)^2}{4} \Rightarrow \frac{4}{(2n+1)^2} \le \frac{1}{f(a)} \le \frac{1}{n^2+n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4n(2n+1)}{(2n+1)^2} \le \frac{2n^2+n}{f(a)} \le \frac{2n^2+n}{n^2+n}$$

$$1 < 2-\frac{2}{2n+1} \le E_n < \frac{2n+1}{n+1} < 2 \Rightarrow [E_n] = 1.$$

Gh. Andrei (Argument)

28**. Avem $\frac{2ab}{a+b} = \left[\frac{2ab}{a+b}\right] + \left\{\frac{2ab}{a+b}\right\} = \left[\frac{a+b}{2}\right] + \{\sqrt{ab}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{2ab}{a+b}\right] = \left[\frac{a+b}{2}\right]$ (1) și $\left\{\frac{2ab}{a+b}\right\} = \{\sqrt{ab}\}$ (2).

Dar din inegalitățile de medii rezultă $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ rezultă că

$$\left[\frac{2ab}{a+b}\right] = \left[\frac{a+b}{2}\right] = [\sqrt{ab}] \Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow a = b.$$

Nicolae Stăniloiu, R.M.T., 2010

29*. a) Avem $na-1 < [na] < na \Rightarrow n - \frac{1}{a} < \frac{[na]}{a} < n \Rightarrow$

$$\Rightarrow n + \left[\frac{-1}{a}\right] \le \left[\frac{[na]}{a}\right] < n \Rightarrow n-1 \le \left[\frac{[na]}{a}\right] < n \Rightarrow \left[\frac{[na]}{a}\right] = n-1$$

$\left(\text{deoarece } \left[\frac{-1}{a}\right] = -1\right)$.

b) Avem $na-1 < [na] < na \Rightarrow n < \frac{[na]}{a} < n - \frac{1}{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow n \le \left[\frac{[na]}{a}\right] < \left[n - \frac{1}{a}\right] = n + \left[\frac{-1}{a}\right] = n \left(\text{din } \left[\frac{-1}{a}\right] = 0\right) \Rightarrow \left[\frac{[na]}{a}\right] = n.$$

Gh. Andrei

30*. a) O implicație este evidentă.

Fie $[x+a] = [x+b], \forall x \in \mathbb{R}$. Presupunând că $a < b$ și $n \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $x_0 \in [n-b, n-a) \Rightarrow [x_0+a] < n$ și $[x_0+b] > b$, contradicție. Așadar, $a = b$.

b) <u>Soluția 1</u>

O implicație este evidentă.

Fie $[ax] = [bx], \forall x \in \mathbb{R}$, atunci pentru $x = 1 \Rightarrow [a] = [b] \Rightarrow a = k + t_1$, $b = k + t_2$, cu $t_1, t_2 \in [0,1)$.

Arătăm că $t_1 = t_2$. Din relația din enunț rezultă: $[kx + xt_1] = [xk + xt_2]$ de unde pentru x întreg rezultă $[xt_1] = [xt_2]$ $(*)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $t_1 < t_2 < 1$ $(**)$ și fie $t_1 < t_2, p \in \mathbb{N}^*$, cel mai mic număr astfel încât $p(t_2 - t_1) \geq 1 \Rightarrow pt_2 \geq pt_1 + 1, [pt_2] \geq [pt_1] + 1$ în contradicție cu relația $(*)$. Prin urmare, $(**)$ nu poate avea loc. Așadar $t_1 = t_2 \Rightarrow a = b$.

Soluția 2

Observăm că $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Fie $a \neq 0, b \neq 0$ de unde rezultă că a și b au același semn. Fie $a > 0, b > 0$ și $a < b$.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru $x_0 \in \left[\frac{n}{b}, \frac{n}{a}\right) \Rightarrow [ax_0] < n$ și $[bx_0] > n$,

contradicție.

Prin urmare, $a = b$.

Analog dacă $a < 0$ și $b < 0$.

c) O implicație este evidentă.

Observăm că $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$. Fie $a \neq 0, b \neq 0$. Deci, a și b au același semn, pentru că altfel se ivește o contradicție. Fie $a > 0, b > 0$ și $a < b$. Considerăm

$n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq [a + b] + 1$ și $x_0 \in \left[\frac{n-a}{b}, \frac{n-b}{a}\right) \neq \emptyset$.

$$\left(\text{Cum } \frac{n-a}{b} < \frac{n-b}{a} \Leftrightarrow na - a^2 < nb - b^2 \Leftrightarrow n(b-a) > b^2 - a^2 \Rightarrow \right.$$
$$\left. \Rightarrow n > a + b. \right)$$

Atunci avem $[ax_0 + b] < n$ și $[bx_0 + a] \geq n$, contradicție. Așadar, $a = b$.

Analog, dacă $a < 0, b < 0$.

§ 2. Inegalități elementare

31. a) Din $\begin{matrix} a - 1 < [a] \leq a \\ -b \leq -[b] < -b + 1 \end{matrix} \Rightarrow a - b - 1 < [a] - [b] < a - b + 1.$

b) Din $a - 1 < [a] \leq a$ și $b - 1 < [b] \leq b$ prin adunare termen cu termen rezultă b).

a') și b') rezultă din a), respectiv b).

32. a) $m \leq x \Leftrightarrow m \leq [x] + \{x\} \Rightarrow m \leq [x]$ (funcția $[x]$ este crescătoare).

b) $x \geq m + 1 \Rightarrow [x] + \{x\} \geq m + 1 \Rightarrow [x] \geq m + 1 - \{x\} > m$.

c) Din $x < m \Leftrightarrow [x] \leq [x] + \{x\} < m \Leftrightarrow [x] < m$.

d) $[x] \leq m \Rightarrow x - \{x\} \leq m \Rightarrow x \leq m + \{x\} < m + 1$ și reciproc, dacă $x < m + 1 \Rightarrow x - \{x\} < m + 1 - \{x\} \Rightarrow [x] < m + 1 - \{x\} \Rightarrow [x] \leq m$.

Observație: În loc de x se poate considera orice expresie.

33. Se utilizează rezultatele de la exercițiul precedent și se ține seama că $m \notin \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

34. Se utilizează proprietăţile cunoscute.

35. Vom utiliza monotonia funcţiei $f(x) = [x]$.

a) Din $[a] \le a \Rightarrow n[a] \le na \Rightarrow n[a] \le [na] \le na, \forall\, a \in \mathbb{R}$ şi $\forall\, n \in \in \mathbb{Z}_+$.

b) Din $[a] \le a \Rightarrow n[a] \ge na \Rightarrow n[a] \ge [na], \forall\, a \in \mathbb{R}$ şi $\forall\, n \in \mathbb{Z}_-$.

c) Din $[a] \le a \Rightarrow n[a] \ge na \Rightarrow n[a] \ge na \ge [na], \forall\, a \in \mathbb{R}$ şi $\forall\, n \in \mathbb{Z}_-$.

d) Se reduce la punctul a), utilizând relaţia $\{x\} = x - [x]$.

e) Se reduce la punctul b).

f) Avem $\{n(a - [a])\} \equiv \{na - n[a]\} = \{na\}$.

g) Utilizând inegalitatea **35.** d) Cap. II, **§ 2.**, adică $\{na\} \le n\{a\}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, avem $\dfrac{\{na\}}{n} \le \dfrac{n\{a\}}{n} = \{a\}$ $(*)$,

unde $\max\{\{a\}, 1 - \{a\}\} = \begin{cases} \{a\}, & \text{dacă } \{a\} > \dfrac{1}{2} \\ 1 - \{a\}, & \text{dacă } \{a\} < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ.

Gh. Stoica, G.M. nr. 12, 2017

36. Deoarece $\{x\} \in [0,1) \Rightarrow \{a\} + \left\{\dfrac{1}{a}\right\} < 2$, pentru inegalitatea din dreapta se aplică inegalitatea mediilor.

37. $\dfrac{m}{n} - 1 < \left[\dfrac{m}{n}\right] \le \dfrac{m}{n} \Rightarrow \quad m - n < n\left[\dfrac{m}{n}\right] \le m \Rightarrow$

$\Rightarrow m - n + 1 \le n\left[\dfrac{m}{n}\right] \le m \Rightarrow \dfrac{m}{n} - \dfrac{n-1}{n} \le \left[\dfrac{m}{n}\right] \le \dfrac{m}{n}$.

38. a) Din teorema împărţirii numerelor întregi rezultă că există $q, r \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$m = nq + r, 0 \le r \le n - 1 \Rightarrow \dfrac{m}{n} = q + \dfrac{r}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\dfrac{m}{n}\right] = q + \left[\dfrac{r}{n}\right] = q = \dfrac{m-r}{n} \ge \dfrac{m-(n-1)}{n}$ (sau din ex. 37).

b) Din punctul a) rezultă $\dfrac{m}{n} - \left\{\dfrac{m}{n}\right\} \ge \dfrac{m}{n} - \dfrac{n-1}{n} \Rightarrow \left\{\dfrac{m}{n}\right\} \le \dfrac{n-1}{n}$.

c) Rezultă din b).

39. Se aplică ex. 25 Cap. I; avem egalitate dacă $n + 1 | m$, atunci:

$\left[\dfrac{n+1}{m}\right] = \left[\dfrac{n}{m}\right] + 1$ altfel dacă $n + 1 \nmid m \Rightarrow \left[\dfrac{n+1}{m}\right] = \left[\dfrac{n}{m}\right]$

în care caz inegalitatea este strictă.

Scanned with OKEN Scanner

40. Dacă $n+1 \vdots m$, atunci $\left[\frac{n+1}{m}\right] = \left[\frac{n}{m}\right] + 1 \Leftrightarrow \frac{n+1}{m} = \left[\frac{n}{m}\right] + 1$

$\Rightarrow \left[\frac{n}{m}\right] = \frac{n+1}{m} - 1$, deci avem egalitate în inegalitatea dată.

Dacă $n+1 \vdots m$, atunci $\left[\frac{n+1}{m}\right] = \left[\frac{n}{m}\right]$ şi inegalitatea devine:

$\left[\frac{n+1}{m}\right] > \frac{n+1}{m} - 1$ $(A-1 < [A] \leq A)$.

41. Avem $n + \left[\frac{m}{n}\right] = \left[n + \frac{m}{n}\right] \geq \left[2\sqrt{n \cdot \frac{m}{n}}\right] = [2\sqrt{m}] \geq 2[\sqrt{m}]$.

(S-a utilizat inegalitatea $[nx] \geq n[x], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\, x \in \mathbb{R}$.)

Walter Ianous

42. Se aplică inegalitatea $[xy] \geq [x][y], \forall x, y \geq 0$.

43. Notăm $[a] = u, [b] = v, \{a\} = \alpha, \{b\} = \beta$ şi inegalitatea devine:

$mu + nv \leq [m(u+\alpha) + n(v+\beta)] = [mu + nv + m\alpha + n\beta] \leq$

$\leq mu + nv + [m\alpha + n\beta]$ unde $[m\alpha + n\beta] \geq 0$

$m[a] + n[b] \leq ma + nb \Rightarrow m[a] + n[b] \leq [ma + nb]$.

44. (Utilizăm faptul că funcţia $f(x) = [x]$ este crescătoare.)

a) $\begin{matrix} a-1 < [a] \leq a \\ b-1 < [b] \leq b \end{matrix} \Rightarrow a+b-2 < [a]+[b] \leq a+b \Leftrightarrow$

$[a]+[b] \leq a+b < [a]+[b]+2$ şi aplicând funcţia $f = [x]$

$\Rightarrow [a]+[b] \leq [a+b] < [a]+[b]+2 \Rightarrow$

$[a]+[b] \leq [a+b] \leq [a]+[b]+1$ sau notând

$[a] = m, [b] = n \quad \begin{matrix} m \leq a < m+1 \\ n \leq b < n+1 \end{matrix} \quad (1)$

$\Rightarrow m+n \leq a+b < m+n+2$ şi aplicând funcţia f rezultă

$m+n \leq [a+b] < m+n+2 \Rightarrow [a]+[b] \leq [a+b] \leq [a]+[b]+1.$

b) Din (1) rezultă $m-n-1 < a-b < m-n+1$

$\Rightarrow m-n-1 \leq [a-b] < m-n+1 \Rightarrow [a]-[b]-1 \leq [a-b]$

$\leq [a]-[b]$.

c) Rezultă din a), înlocuind $[a] = a - \{a\}$ şi $[b] = b - \{b\}$.

d) Rezultă din b), înlocuind $[a] = a - \{a\}$ şi $[b] = b - \{b\}$.

45. a) Rezultă fie din exerciţiul precedent înlocuind în a) $b = a$ sau dacă $[a] = a + \{a\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, atunci rezultatele devin

$2k \leq [2k+2t] \leq 2k+1 \Rightarrow 2k \leq 2k + [2t] \leq 2k+1.$

b) Rezultă fie din exerciţiul precedent înlocuind în c) $b = a$ sau notând $a = k + t$ ş.a.m.d.

46. a) Din $[a] \leq a, [b] \leq b \Rightarrow [a][b] \leq ab \Rightarrow [a] \cdot [b] \leq [ab] \leq ab.$

b) Din $[a] \leq a, [b] \leq b \Rightarrow [a][b] \geq ab \Rightarrow [a] \cdot [b] \geq ab \geq [ab].$

Scanned with OKEN Scanner

c) 1. Avem $[a] \le a, -b \le -[b] \Rightarrow -b[a] \le -a[b] \Rightarrow$
$\Rightarrow a[b] \le b[a] \Rightarrow [a[b]] \le [b[a]]$.

2. Înlocuind b cu $-b$ în a) rezultă: $[a][-b] \le [-ab] \le -[ab]$.

3. Din $[-b] \le -b \le -[b] \Rightarrow [a][-b] \le -[a][b]$.

47. a) Din $[a] \le a \Rightarrow [b][a] \le [b]a \le ab$ și trecând la partea întreagă rezultă: $[a][b] \le [a[b]] \le [ab]$.

b) Din $[-b] \le -b \Rightarrow b \le -[-b]$ și din $[a] \le a \Rightarrow$
$[a]b \le -a[-b] \Rightarrow a[-b] \le -b[a] \Rightarrow [a[-b]] \le [-b[a]]$.

c) Din $\begin{matrix}[a] \le a < [a]+1 \\ [b] \le b < [b]+1\end{matrix} \Rightarrow [a][b] \le ab < [a][b] + [a] + [b] + 1$
$\Rightarrow [a][b] \le [ab] \le [a][b] + [a] + [b]$.

d) Se obține din c) pentru $b = a$.

48. Punctele a) și b) sunt generalizările exercițiilor de la punctele a) și c) din exercițiul 14, iar c) și d) ale exercițiilor de la punctele a) și b) din exercițiile 14 c) și 14. d).

Sau din $[a_k] \le a_k < [a_k] + 1$ prin însumare rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} [a_k] \le \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} [a_k] + n.$$

Trecând la partea întreagă rezultă: $\sum_{k=1}^{n} [a_k] \le \left[\sum_{k=1}^{n} a_k\right] \le \sum_{k=1}^{n} [a_k] + n - 1.$

b) Din $[a_k] \le a_k \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} [a_k] \le \prod_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} [a_k] \le \left[\prod_{k=1}^{n} a_k\right]$.

c) Rezultă din punctul a) înlocuind $[a_k] = a_k - \{a_k\}$ ș.a.m.d.

d) Rezultă din punctul b) pentru $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$.

e) Se însumează inegalitățile de forma: $k[x] \le [kx] \le k[x] + k - 1$.

f) Se utilizează punctul d) și prin însumare în
$k[a] \le [ka] \le k[a] + k - 1 \Rightarrow$ f).

g) Aplicând inegalitatea de medii rezultă:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} [ka]} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} [ka]}{n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} ka}{n} = \frac{a(n+1)}{2}$$

(deoarece $[ka] \ge 0$ și $[ka] \le ka$).

h) $$\sum_{k=1}^{n} [1 + ka] = \sum_{k=1}^{n} 1 + [ka] \ge n + \sum_{k=1}^{n} k[a] = n + \frac{n(n+1)}{2}[a],$$

unde s-a utilizat inegalitatea $[ab] \ge [a][b]$, unde $a \ge 0, b \ge 0$.

Scanned with OKEN Scanner

49. a) Din $[x] \leq x \Rightarrow [x]^n \leq x^n \Rightarrow [x]^n \leq [x^n]$ sau din proprietatea precedentă $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$.

b) Fie $x \leq 0 \Rightarrow [x] \leq x \Rightarrow -x \leq -[x] \Rightarrow -x^n \leq -[x]^n \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]^n \leq x^n \Rightarrow [x]^n \leq [x^n]$. (S-a aplicat şi monotonia funcţiei $[:]$.)

c) Din $[x] \leq x \Rightarrow -x \leq -[x] \Rightarrow x^n \leq [x]^n \Rightarrow [x]^n \leq [x]$ (n par) $\Rightarrow$
$\Rightarrow [x^n] \leq [x]^n$.

50. a) Avem $\begin{matrix} x+a-1 < [x+a] \leq x+a \\ y+b-1 < [y+b] \leq y+a \end{matrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow x+y-1 < [x+a]+[y+b] \leq x+y+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [x+y]-1 < [x+a]+[y+b] \leq [x+y]+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [x+y] \leq [x+a]+[y+b] \leq [x+y]+1$.

b) Pentru $a = b = \frac{1}{2}$ rezultă inegalităţile.

51. a) Avem $\begin{matrix} x+a-1 < [x+a] \leq x+a \\ y+b-1 < [y+b] \leq y+b \\ z+c-1 < [z+c] \leq z+c \end{matrix} \Rightarrow$
$\Rightarrow x+y+z-2 < [x+a]+[y+b]+[z+c] \leq x+y+z+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [x+y+z]-1 \leq [x+a]+[y+b]+[z+c] \leq [x+y+z]+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |[x+a]+[y+b]+[z+c]-[x+y+z]| \leq 1$.

b) Din a) pentru $x = y = z$.

c) Din b) pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Gh. Andrei

52. a) Se utilizează $x_k + a_k - 1 < [x_k + a_k] \leq x_k + a_k, k = \overline{1,n}$ şi se adună ş.a.m.d.

b) Se consideră $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$.

53. Soluţia 1

a) Inegalitatea se mai scrie:
$[a+b] \leq [2a]-[a]+[2b]-[b] \leq [a+b]+1$;
utilizând identitatea lui Hermite şi ultimele inegalităţi devin:

$$[a+b] \leq \left[a+\frac{1}{2}\right]+\left[b+\frac{1}{2}\right] \leq [a+b]+1,$$

adică inegalităţile cerute.

b) Utilizând inegalitatea $[a]+[b] \leq [a+b] \leq [a+b]+1$ din punctul a) rezultă b).

Soluţia 2

a) Fie $a = [a]+\alpha, b = [b]+\beta$, cu $\alpha, \beta \in [0,1)$, atunci
$[2a]+[2b] = [2[a]+2\alpha]+[2[b]+2\beta] = 2[a]+2[b]+[2\alpha]+[2\beta]$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$[a]+[b]+[a+b]=[a]+[b]+\big[[a]+[b]+\alpha+\beta\big]=2[a]+2[b]+$
$+[\alpha+\beta]$, iar $[a]+[b]+[a+b]+1=2[a]+2[b]+1+[\alpha+\beta]$, inegalitatea revine la a demonstra că: $[\alpha+\beta]\le[2\alpha]+[2\beta]\le[\alpha+\beta]+1$, unde $\alpha,\beta\in[0,1)$ și $\alpha+\beta\in[0,2)\Rightarrow[\alpha+\beta]\in\{0,1\}$ ș.a.m.d.

54. Din $|a-b|\le 1\Leftrightarrow -1\le a-b\le 1\Rightarrow -1\le[a]+\{a\}-[b]-\{b\}\le$
≤ 1 $(*)$.
Se poate considera $\{a\}-\{b\}\in[0,1)$ și din $(*)$ rezultă $-1\le[a]-[b]+$
$+[\{a\}-\{b\}]\le 1, -1\le[a]-[b]\le 1\Leftrightarrow|[a]-[b]|\le 1$.
Dacă $\{a\}-\{b\}\in(-1,0]$ atunci din $(*)$ rezultă $-1\le[b]-[a]+\{b\}-$
$-\{a\}\le 1$
cu $\{b\}-\{a\}\in[0,1)\Rightarrow -1\le[b]-[a]\le 1\Rightarrow|[b]-[a]|=|[a]-[b]|\le 1$.

55.** Notăm $\left[\frac{a}{b}\right]=k\in\mathbb{N}^*$ și cum $\left\{\frac{a}{b}\right\}<1-\frac{1}{k}, k\ge 2, k=\left[\frac{a}{b}\right]\le\frac{a}{b}=\left[\frac{a}{b}\right]+$
$+\left\{\frac{a}{b}\right\}<k+1-\frac{1}{k}$ $(*)$. Fie funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$ care este strict crescătoare, atunci din $(*)$ rezultă $k<k+\frac{1}{k}=f(k)\le f\left(\frac{a}{b}\right)<$
$<f\left(k+1-\frac{1}{k}\right)<k+1\Rightarrow k<f\left(\frac{a}{b}\right)<k+1\Rightarrow\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]=k=\left[\frac{a}{b}\right]$.

Cristinel Mortici

56.** Putem presupune $a\ge 1\Rightarrow[a]+\{a\}=k+t$ unde $k\in\mathbb{N}^*, t\in[0,1)$ și $\left\{\frac{1}{a}\right\}=\frac{1}{a}-\left[\frac{1}{a}\right]=\frac{1}{a}=\frac{1}{k+t}$. Avem $\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=t+\frac{1}{k+t}<t+\frac{1}{1+t}<\frac{3}{2}$, deoarece funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(t)=t+\frac{1}{t+1}$ este crescătoare pe $(0,1)$, atunci $f(t)<f(1)=\frac{3}{2}$.

Ion Cucurezeanu

57.** Fie $a=k+t, k\in\mathbb{N}^*, t\in[0,1)$, atunci inegalitatea devine:
$t+\frac{1}{k+t}<\sqrt{2}$ $(1)\Rightarrow t^2+(k-\sqrt{2})t+1-k\sqrt{2}<0$ (2) cu $\Delta>0$,
$\forall\, k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-k+\sqrt{2}\pm\sqrt{k^2+2k\sqrt{2}-2}}{2}$ unde $t_1<0$,
$t_2=\frac{-k+\sqrt{2}+\sqrt{k^2+2k\sqrt{2}-2}}{2}>1, \forall\, k\ge 2$ și prin urmare inegalitatea (2) este satisfăcută pentru $t\in[0,1)\subset[t_1,t_2]$.
Prin urmare, pentru $a>0$ cu $[a]\ge 2$ inegalitatea este satisfăcută.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $[a]=k=1,(1)$ devine $t+\frac{1}{1+t}<\sqrt{2}\Rightarrow a=t(\sqrt{2}-1)+1-$

$-\sqrt{2}<0$ (3) cu $t_{1,2}=\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})}}{2}$ cu $t_1<0$ și

$$t_2=\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})}}{2}<1.$$

Prin urmare, pentru $t\in[0,t_2]\Rightarrow a=1+t\Rightarrow a\in[1,1+t_2]$ deci

$a\in[1,1+t_2]\cup[2,\infty)=S_1$, dar cum expresia $E(a)=\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}=E\left(\frac{1}{a}\right)$

rezultă $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{1+t_2},1\right)=S_2$.

Prin urmare, $a\in S_1\cup S_2=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{1+t_2},1\right)\cup[1,1+t_2]\cup[2,\infty)$

$\left(\text{vezi și ex. } \{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}<\frac{3}{2}\right)$.

Gh. Andrei

§ 3. Alte egalități

58. Evident $m\neq 3$, deci $m\geq 4$. Fie $2n+2=mq+r$ $(*), r\in\{1,2,\dots,m-1\}$

$\Rightarrow\left[\frac{2n+2}{m}\right]=\left[q+\frac{r}{m}\right]=q+0=q$ și $\left[\frac{2n}{m}\right]=\left[\frac{mq+r-2}{m}\right]=$

$=q+\left[\frac{r-2}{m}\right]=q+0=q, 2\leq r\leq m-1$, deci $\left[\frac{2n+2}{m}\right]=\left[\frac{2n}{m}\right]$,

deoarece dacă $r=1$, atunci din $(*)=2n+2=mq+1\Rightarrow 2n+1=$

$=mq\Rightarrow m|2n+1$.

Dar cum $\frac{2n}{m}\leq\frac{2n+1}{m}<\frac{2n+2}{m}\Rightarrow\left[\frac{2n}{m}\right]\leq\left[\frac{2n+1}{m}\right]\leq\left[\frac{2n+2}{m}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\frac{2n}{m}\right]=\left[\frac{2n+1}{m}\right]=\left[\frac{2n+2}{m}\right]$.

59. Vom arăta că $\left[\frac{n+1}{m}\right]=\begin{cases}\left[\frac{n}{m}\right]+1, & \text{dacă } n+1\vdots m\\ \left[\frac{n}{m}\right], & \text{dacă } n+1\nmid m\end{cases}$

Evident dacă $m=1\Rightarrow\left[\frac{n+1}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]+1$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n+1 \vdots m \Rightarrow n+1 = mp, p \in \mathbb{N}^*$, atunci $\left[\frac{n+1}{m}\right] = p$ și $\left[\frac{n}{m}\right] =$
$= \left[\frac{mp-1}{m}\right] = p + \left[-\frac{1}{m}\right] = p-1$, deci $\left[\frac{n+1}{m}\right] = \left[\frac{n}{m}\right] + 1$.
Dacă $n+1 \nmid m \Rightarrow n+1 = mp+r, 1 \leq r \leq m-1$, atunci
$\left[\frac{n+1}{m}\right] = \left[\frac{mp+r}{m}\right] = p + \left[\frac{r}{m}\right] = p$ și $\left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{mp+r-1}{m}\right] = p + \left[\frac{r-1}{m}\right] =$
$= p$ de unde rezultă că $\left[\frac{n+1}{m}\right] = \left[\frac{n}{m}\right]$.

60. Într-adevăr $\left[\frac{n+m}{m}\right] = 1 + \left[\frac{n}{m}\right] = \left[\frac{n+1}{m}\right] \Leftrightarrow n+1 \vdots m$
(ultima egalitate rezultă din aplicația precedentă).

61*.** a) Soluția 1
Evident $\frac{m}{n(n+1)} = \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1}$ și din $p \leq \frac{m}{n} < p+1$ și $q \leq \frac{m}{n+1} < q+1$
rezultă $p-q-1 < \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} < p-q+1 \Rightarrow \left[\frac{m}{n(n+1)}\right] = \left[\frac{m}{n} - \frac{m}{n+1}\right] \in$
$\in \{p-q-1, p-q\}$.

Soluția 2
Utilizăm teorema împărțirii cu rest și avem:
$\begin{cases} m = np + r_1, & r_1 \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} \\ m = (n+1)q + r_2, & r_2 \in \{0,1,2,\ldots,n\} \end{cases}$
Scădem a doua relație înmulțită cu n, din prima relație înmulțită cu $n+1$ și obținem: $m = r(n+1)(p-q) + (n+1)r_1 - nr_2$.
Fie $R = (n+1)r_1 - nr_2$ și $\max R = (n+1)(n-1) - 0 = n^2 - 1 < n^2 + n$
$\min R = (n+1)0 - n^2 = -n^2$. Deci, dacă $R \geq 0$ $\left[\frac{m}{n(n+1)}\right] = p-q$, iar
dacă $R < 0$ atunci $\left[\frac{m}{n(n+1)}\right] = p-q-1$.

b) Din $\left\{\frac{m}{n}\right\} = \left\{\frac{m}{n+1}\right\} = \alpha \in [0,1)$ avem:
$\frac{m}{n} = p + \alpha$ și $\frac{m}{n+1} = q + \alpha \Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{m}{n+1} = p-q \Leftrightarrow \frac{m}{n(n+1)} =$
$= p-q \in \mathbb{N} \Rightarrow n(n+1) \mid m \Rightarrow n \mid m$ sau $n+1 \mid m$. Cea mai mică valoare a lui m, cu proprietatea cerută, este $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ care se divide cu $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 4 \cdot 5, 5 \cdot 6, 6 \cdot 7, 14 \cdot 15, 20 \cdot 21$. Dacă ar exista un număr prim $p > 7$ cu $n(n+1) \mid m$ și $m < 420$ rezultă (prin verificare) că pot exista 8 valori distincte ale lui n astfel încât $p(p+1) \mid m$.

Adrian Ghioca O.L. Prahova, 2002

Scanned with OKEN Scanner

62***. Evident dacă cel puțin unul dintre numerele x sau y este întreg cele două egalități devin identități. Presupunem prin absurd că $x, y \notin \mathbb{Z}$, adică $x = n + \alpha, y = m + \beta$, unde $n, m \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in (0,1)$.
Avem $[n + \alpha] + [m + \beta] = [n + m + \alpha + \beta], [-n - \alpha] + [-m - \beta] = [-n - m - \alpha - \beta]$.

Iran, 1985

63***. Evident dacă $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q \in \mathbb{N}$, atunci considerăm $k = q$ (sau $k = rq, r \in \mathbb{N}$)și evident $[k\alpha] = \left[q \cdot \frac{p}{q}\right] = p \equiv q\frac{p}{q} = k\alpha$.

Reciproc, din $[k\alpha] = k\alpha \Rightarrow k\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow k\alpha = p \Rightarrow \alpha = \frac{p}{k}$.

64**. a) Fie $c = a - b$. Presupunem $c > 0; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c+b}{b}\right)^n = \left(1 + \frac{c}{b}\right)^n > 1 + n\frac{c}{b}$, deci $a^n > b^n + ncb^{n-1}$ și pentru n suficient de mare avem $ncb^{n-1} > 1$, în contradicție cu $[a^n] = [b^n]$. Analog pentru $c < 0$, deci $c = 0 \Leftrightarrow a = b$.

b) Pentru $a = \sqrt[n+1]{2}, b = \sqrt[n+2]{2} \Rightarrow [a^k] = [b^k] = 1, k = 1,2, \ldots, n$.

Gh. Iurea, G.M. nr. 3/2010

65*. Din relația dată rezultă $\alpha > 1$ și $\beta > 1$. Să presupunem că $[\alpha] = k \geq 2 \Rightarrow$

$$k < \alpha < k + 1 \ (\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}) \Rightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} < 1 - \frac{1}{\beta} < \frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k+1}{k} < \beta < \frac{k}{k-1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{k} < \beta < 1 + \frac{1}{k-1} < 2 \Rightarrow [\beta] = 1.$$

66**. a) Evident că a nu poate fi întreg, deoarece egalitatea nu poate avea loc. Egalitatea se mai scrie:

$$a - [a] = \frac{1}{a} - \left[\frac{1}{a}\right] \Rightarrow a - \frac{1}{a} = [a] - \left[\frac{1}{a}\right] \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow a - \frac{1}{a} = k \in \mathbb{Z}^* \ (*).$$

Dacă $a = \frac{m}{n}$ cu $(m, n) = 1$, atunci relația $(*)$ devine $\frac{m}{n} - \frac{n}{m} = k \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 - n^2 = mnk \Rightarrow m|n$ sau $n|m \Rightarrow m, n \in \{\pm 1\} \Rightarrow a = \pm 1$, absurd.
Așadar, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Florin Rotaru

Scanned with OKEN Scanner

b) Evident pentru $a \in \mathbb{N}^*$ relația din enunț este adevărată și pentru $a = 1 \Rightarrow 0 = 1$, fals. Putem considera $a > 1$ adică $a = \frac{m}{n}$ $(m > n)$.

Să considerăm prin absurd că există $a \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât:

$$\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1 \Rightarrow \{a\} + \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow \{a\} = \frac{a-1}{a} \Leftrightarrow \left\{\frac{m}{n}\right\} = \frac{m-n}{m} \quad (*).$$

Fie $m = np + r$ unde $1 \leq r \leq n-1$ $\left(\text{pentru } r = 0 \Rightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{N}^*\right) \Rightarrow$ relația $(*)$ devine $\frac{r}{n} = 1 - \frac{n}{np+r} \Rightarrow \frac{n}{np+r} = \frac{n-r}{n} \Leftrightarrow n^2 = (n-r)(np+r) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + rn(p-1) - n^2(p-1) = 0$ $(**)$. Evident $p > 1$ (dacă $p = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow r = 0 \Rightarrow m = n \Rightarrow a = 1$, fals), dar pentru $(**)$ $\Delta = n^2(p-1)(p+3)$ care nu poate fi pătrat perfect. (De fapt a) și b) sunt echivalente.)

67**. Să presupunem prin absurd că A conține numere raționale și fie $x = \frac{p}{q}$ cu $(p, q) = 1$. Din $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = x + \frac{1}{x} - [x] - \left[\frac{1}{x}\right] \Rightarrow x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = k \Rightarrow x^2 - kx + 1 = 0 \Rightarrow p^2 - kpq + q^2 = 0 \Rightarrow q | p$ și cum

$(p, q) = 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = \left\{\frac{1}{x}\right\} = 0$ în contradicție cu ipoteza $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} \in \mathbb{Z}^*$.

Așadar, A nu conține numere raționale.

68**. $1 = a - [a] + \frac{1}{a} - \left[\frac{1}{a}\right] \Rightarrow a + \frac{1}{a} = [a] + \left[\frac{1}{a}\right] + 1$ și $a + \frac{1}{a} > 2$ sau $a + \frac{1}{a} < -2$ dacă $a + \frac{1}{a} = \pm 2 \Leftrightarrow a = \pm 1$, dar pentru care $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 0$, absurd.

Avem $a + \frac{1}{a} = k \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1, \pm 2\} \Rightarrow a^2 - ka + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, întrucât $k^2 - 4 \neq m^2$.

Într-adevăr, dacă $k^2 - 4 = m^2 \Rightarrow (k-m)(k+m) = 4 \Rightarrow k = \pm 2, m = 0$ care nu convin. Așadar, a este irațional.

Dacă $a = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = \{2 + \sqrt{3}\} + \{2 - \sqrt{3}\} =$

$= \{3 + \sqrt{3} - 1\} + \{2 - \sqrt{3}\} = \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 1.$

Kvant, 1986

Scanned with OKEN Scanner

69***. Notăm cu $b_n = a^n + \frac{1}{a^n} \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} +$

$+ a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} \Rightarrow b_1 b_n = b_{n+1} + b_{n-1} \Rightarrow b_{n+1} = b_1 b_n - b_{n-1}$.

Avem $b_1 = a + \frac{1}{a} = [a] + \left[\frac{1}{a}\right] + \{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = [a] + \left[\frac{1}{a}\right] + 1 \in \mathbb{Z}$ și $b_2 = a^2 +$

$+ \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \in \mathbb{Z}$. Prin inducție rezultă că $b_n \in \mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, $b_n = a^n + \frac{1}{a^n} = [a^n] + \left[\frac{1}{a^n}\right] + \{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} \in \mathbb{Z} \cap [0,2) = \{0,1\}$. Dacă $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 0 \Rightarrow a^n, \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \{\pm 1\}$ care nu verifică relația din ipoteză. Așadar, $\{a^n\} + \left\{\frac{1}{a^n}\right\} = 1$.

Observația 1: Se știe că (vezi un exercițiu anterior) dacă $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$, atunci $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și din acest exercițiu rezultă că și $a^n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Observația 2: Pentru numerele cu proprietatea din enunț rezultă: $a + \frac{1}{a} =$

$= m \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - am + 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ cu $|m| > 2$. Scriind relațiile lui Newton unde $\tau_k = a_1^k + a_2^k$ rezultă $\tau_{n+2} - m\tau_{n+1} + \tau_n = 0$, unde $\tau_1 = m, \tau_2 = m^2 - 2$, deci avem $\tau_1 \tau_{n+1} = \tau_{n+2} + \tau_n$, adică tocmai relația din soluția dată.

70***. Din ipoteză rezultă că $\{a^{-1}\} = a^{-1}$ și $\{a^2\} = 2 \Rightarrow \{a^2\} = a^2 - 2 \Rightarrow$

$a^{-1} = a^2 - 2 \Rightarrow a^3 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - a - 1 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

și $a^2 = 1 + a \Rightarrow a^3 = a^2 + a = 2a + 1 \Rightarrow a^6 = 8a + 5$ și $a^{12} =$

$= 144a + 89 \Rightarrow a^{13} = 144a^2 + 89a = 144(a+1) + 89a = 233a + 144$.

Așadar $E(a) = a^{12} - 144a^{-1} = a^{12} - \frac{144}{a} = \frac{a^{13} - 144}{a} = 233$.

A.I.M.E., 1997

71*. Pentru $k = 1$ și $k = -1 \Rightarrow a\{b\} = \{ab\}$ (1) și $a\{-b\} = -\{ab\}$ (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow a(\{b\} + \{-b\}) = 0$ și cum $a \neq 0 \Rightarrow \{b\} + \{-b\} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b - [b] - b - b = 0 \Rightarrow [b] + [-b] = 0 \Rightarrow b \in \mathbb{Z}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Relația (1) devine $\{ab\} = a\{b\} = 0 \Rightarrow ab \in \mathbb{Z} \Rightarrow ab = k \Rightarrow a = \frac{k}{b} \in \mathbb{Q}^*$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

72**. Avem $a(nb - \{nb\}) = b(an - \{an\}) \Rightarrow a\{nb\} = b\{an\}$ de unde rezultă că a și b sunt de același semn. Fie $a > 0, b > 0$ și din $\frac{a}{b} = \frac{[an]}{[bn]} = \frac{p}{q}$, rezultă că $p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \Rightarrow qa = pb$. Atunci din $a[bn] = b[an] \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{pb}{q}[bn] = b[an] \Rightarrow p[bn] = q[an] \Rightarrow p|[an], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p = 1$ și la fel cu $q = 1$ deci $[an] = [bn], \forall n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă că $a = b$ (vezi un exercițiu anterior).

Gh. Andrei

73**. $a(bk - \{bk\}) = k(ab - \{ab\}) \Rightarrow a\{bk\} = k(ab) \Rightarrow \{ab\} = \frac{a(bk)}{k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \{ab\} = 0$, deci ab este întreg. Relația dată devine: $a[bk] =$ $= abk \Rightarrow [bk] = bk$ și pentru $k = 1 \Rightarrow [b] = b \Rightarrow b \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow ab \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \mathbb{Q}^*$.

Ion Cucurezeanu

74**. $[a + b]k = [ak] + [bk] > ak + bk - 2 \Rightarrow [a + b] > a + b - \frac{2}{k}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow [a + b] \geq a + b$ și cum $[a + b] \leq a + b \Rightarrow [a + b] = a + b \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$.

Pentru $k = 1 \Rightarrow [a + b] = [a] + [b] \Rightarrow a + b = [a] + [b] \Rightarrow a - [a] + b -$ $- [b] = 0 \Rightarrow \{a\} + \{b\} = 0 \Rightarrow \{a\} = \{b\} = 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$.

Ion Cucurezeanu

75**. Presupunem că a nu este întreg, deci $a = [a] + \{a\} = p + t, p \in \mathbb{Z}$, $t \in (0,1)$. Există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $kt < 1$ și $(k + 1)t \geq 1$. Punând în relația dată $n = k$ și $n = k + 1$ obținem $a[bk] = bk[a]$ și respectiv $a[bk + b] = bk[a] + b[a] + b$ $(*)$ întrucât $[kt] = 0$ și $[(k + 1)t] = 1$.

Cum $a[b] = b[a]$ (pentru $n = 1$), atunci din $(*)$ rezultă:

$a([bk + b] - [bk] - [b]) = b$. Dar $[bk + b] - [bk] - [b] \in \{0,1\}$ (vezi ex. 6), de unde rezultă $b = 0$ sau $a = b$, contradicție. Așadar, presupunerea că a nu este întreg este falsă și prin urmare $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \mathbb{Z}$.

Ion Cucurezeanu, O.N. (L.S.), 1995

Scanned with OKEN Scanner

76**. Una dintre implicații este imediată.

Considerăm „ ⇒ ".

Avem $E=\dfrac{m^p}{m+1}-\dfrac{n^p}{n+1}=\dfrac{mn(m^{p-1}-n^{p-1})+m^p-n^p}{(m+1)(n+1)}>0.$

Dacă $p>2$, atunci avem

$$E=\frac{(m-n)mn(m^{p-2}+\cdots+n^{p-2})+(m-n)(m^{p-1}-n^{p-1})}{(m+1)(n+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2mn+m^2+mn+n^2}{(m+1)(n+1)}>1\Rightarrow p=2 \text{ și atunci}$$

$$E=\frac{mn(m-n)+(m-n)(m+n)}{(m+1)(n+1)}=\frac{(m-n)(mn+m+n)}{(m+1)(n+1)}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(mn+m+n)(m-n-1)<1\Rightarrow m=n+1.$$

77**. Procedăm prin inducție. Pentru $n=1$ este evident.

Pentru $n=2\Rightarrow\{a+\{a\}\}=\{2a\}$. Presupunând adevărată pentru n rezultă că ea este adevărată.

Avem $\underbrace{\{a+\{a+\cdots\{a+\{a\}\}\}\}}_{\text{de } n+1 \text{ ori } a}=\{a+\{na\}\}=\{a+na-[na]\}=$

$=\{(n+1)a\}$.

78**. a) Din $\{15a\}=\{8a\}\Rightarrow 15a-8a\in\mathbb{Z}\Rightarrow 7a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=\dfrac{k}{7},k\in\mathbb{Z}$,

atunci $\{75a\}=\left\{\dfrac{75k}{7}\right\}=\left\{\dfrac{5k}{7}\right\}$ și $\{26a\}=\left\{\dfrac{26k}{7}\right\}=\left\{\dfrac{5k}{7}\right\}$.

b) Analog, avem $168b\in\mathbb{Z}\Rightarrow b=\dfrac{m}{168}$ și $b=\dfrac{n}{98},m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{m}{168}=\dfrac{n}{98}\Rightarrow\dfrac{m}{12}=\dfrac{n}{7}\Rightarrow m=12k,n=7k\Rightarrow b=\dfrac{k}{14},k\in\mathbb{Z}$. Rezultă

$\{155b\}=\left\{\dfrac{155k}{14}\right\}=\left\{11k+\dfrac{k}{14}\right\}=\left\{\dfrac{k}{14}\right\}=\{b\}$.

Concurs Ucraina, 1995

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 3

Progresii în care intervin partea întreagă şi partea fracţionară

1**. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu raţia număr întreg, atunci şi $(b_n) = [a_n]_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.

2*. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Demonstraţi că şirul $([a_n])_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă şirul $(\{a_n\})_{n\geq 1}$ este un şir constant.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, $a_0 \in \mathbb{R}$, cu raţia r număr natural. Să se arate că şirul $b_n = [a_{n+1} + a_n]$ este o progresie aritmetică cu raţia dublă.

4. Să se determine $x > 0$ astfel încât $x^2 + 2[x]$ să fie pătrat perfect.

5. Să se determine $x \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât numerele $\frac{x}{2}, [x], \{x\}$ să fie lungimile laturilor unui triunghi.

6. Determinaţi numerele reale x, cu proprietatea că $[4x], 2[x], 4[x]$ sunt numere întregi consecutive.

7***. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $2003[x], 2004[x], [2004x]$ să fie trei numere consecutive.

8**. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu raţia $r \in [0,1)$. Demonstraţi că există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $[a_n] = [a_{n+1}]$.

9**. Să se determine $x \in [0, \infty)$ astfel încât $[\sqrt{x}], 2[\sqrt{x}], [2\sqrt{x}]$ sunt numere consecutive.

10**. Să se determine numerele reale pozitive x pentru care $(x, \{x\}, [x])$ sunt în progresie geometrică.

11. Pentru ce valori pozitive, există triunghiuri cu laturile $[x], [x+\sqrt{2}], [x+\sqrt{3}]$?

12. a) Arătaţi că pentru orice $x \geq 0$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea $[nx] \geq n[x]$.

b) Determinaţi numerele reale pozitive x pentru care $[x], 2[x]$ şi $[2x]$ sunt numere naturale consecutive.

Scanned with OKEN Scanner

13**. a) Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care $[\sqrt{x}], 2[\sqrt{x}]$ şi $[2\sqrt{x}]$ sunt consecutive.

b) Determinaţi $x \in \mathbb{R}$ pentru care $[\sqrt{x}], 2[\sqrt{x}]$ şi $[2\sqrt{x}]$ formează o progresie aritmetică.

14. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere reale cu raţia $r \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă r şi m sunt întregi, atunci are loc relaţia:

$$[a_1 m] + [a_2 m] + \cdots + [a_n m] = \frac{n([a_1 m] + [a_n m])}{2}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

15. Se consideră progresia aritmetică: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $\{k_1, k_2, \ldots, k_p\} \subset$ $\subset \{1,2,3, \ldots, n\}$. Să se arate că dacă $k_1, k_2, \ldots, k_p$ sunt în progresie aritmetică, atunci $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots a_{k_p}$ au aceeaşi proprietate.

16. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de numere naturale în care $(a_1, a_2 - a_1) = 1$. Dacă $n-1$ este prim, să se arate că numărul:

$\left[\frac{a_2}{a_1}\right] + \left[\frac{a_3}{a_1}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{a_1}\right]$ se divide cu $n-1$.

17**. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, cu raţia $r > 0$, cu proprietatea că $\forall\, x \in (a_n, a_{n+1})$ avem $[x] = [a_n], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $rm = 1$.

18**. Să se arate că un şir neconstant de numere naturale nenule (x_n) este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă există $a > 0$, astfel încât

$$x_{n+1} = x_n + \left[\frac{x_n}{n+a}\right], (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

19. Fie numerele $x, [x], \{x\}, x > 0$.

a) Găsiţi valorile lui $x > 0$ pentru care elementele de mai sus sunt în progresie aritmetică.

b) Găsiţi valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care elementele de mai sus sunt în progresie geometrică.

20***. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ o progresie aritmetică. Demonstraţi că mulţimea $\{[a_n], n \in \mathbb{N}\}$=N dacă şi numai dacă $a_0 \in [0,1]$ şi raţia progresiei se găseşte în intervalul $(0,1]$.

21***. Să se demonstreze că numărul de progresii aritmetice de trei termeni şi cu raţia strict pozitivă ce se pot forma din elementele din mulţimea $\{1,2,3, \ldots, n\}$ este $\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

22***. a) Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $f(n)$ numărul tripletelor de numere naturale (a, b, c) cu proprietatea că $1 \leq a \leq b \leq c \leq n$, iar a, b, c sunt în progresie geometrică cu raţia număr natural. Să se arate că $f(n) < 2n$.

Scanned with OKEN Scanner

23***. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 3$ și $x_{n+1} = [\sqrt{2} \cdot x_n]$. Să se determine toate valorile lui n pentru care x_n, x_{n+1}, x_{n+2} sunt în progresie aritmetică.

24***. Să se determine toate numerele naturale n pentru care $[\sqrt[3]{n}], [\sqrt[4]{n}]$ și $\sqrt[5]{n}$ sunt în progresie aritmetică.

25**. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r și primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului:

$$S_n = \sqrt{1+\frac{r}{a_1 a_2}} + \sqrt{1+\frac{r}{a_2 a_3}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{r}{a_n a_{n+1}}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţii

3 Progresii în care intervin partea întreagă şi partea fracţionară

1**. Fie $a_n = a_1 + (n-1)r, r \in \mathbb{Z}$ şi $a_1 \in \mathbb{R}$, atunci $b_n = [a_n] =$
$= [a_1 + (n-1)r] = [a_1] + (n-1)r$, deci $[a_n]$ este o progresie aritmetică cu aceeaşi raţie r.

Gh. Andrei

2*. Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $([a_n])_{n\geq 1}$ sunt progresii aritmetice, atunci şi diferenţa $\{a_n\} = a_n - [a_n]$ este o progresie aritmetică. Însă $(\{a_n\})_{n\geq 1}$ este un şir mărginit deci va fi constant. Reciproca este imediată.

Manuela Prajea, R.M.T. nr. 4/2003

3. $b_n = [a_0 + (n+1)r + a_0 + nr] = (2n+1)r + [2a_0]$, atunci
$b_{n+1} - b_n = (2n+3)r + [2a_0] - (2n+1)r - [2a_0] = 2r$.

4. Avem $[x] \leq x < [x]+1 \Rightarrow [x]^2 < x^2 + 2[x] < ([x]+1)^2 + 2[x] <$
$< ([x]+1)^2$ de unde rezultă că singurul pătrat perfect este $([x]+1)^2$, adică $([x]+1)^2 = x^2 + 2[x] \Rightarrow x^2 = [x]^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{k^2+1}$ unde $[x] = k \in \mathbb{N}$.

Ion Cucurezeanu

5. Avem $\frac{k+t}{2} < k + t \Rightarrow k + t > 0$ şi $k < \frac{k+t}{2} + t \Leftrightarrow k < 3t \Rightarrow \frac{k}{3} < t$

$t < \frac{k+t}{2} + k \Rightarrow t < 3k \Rightarrow \frac{k}{3} < t < 3k \Rightarrow k \in \{1,2\}$.

Dacă $k = 1$ şi $t > \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{8}{3}, 3\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{8}{3}, 3\right)$.

Concursul „Cristian Calude", 2010

6. Fie $x = k + t, k \in \mathbb{Z}$ şi $t \in [0,1)$, atunci $a = [4k + 4t] = 4k + [4t]$, $b = 2k + [2k + 2t] = 4k + [2t]$ şi $c = 4k$. Avem $c < b < a \Rightarrow [2t] = 1$ şi $[4t] = 2 \Rightarrow 2t \in [1,2), 4t \in [2,3) \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cap \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Prin urmare, $x = k + t, k \in \mathbb{Z}$ cu $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Concursul „Cristian Calude", 2015

7***. Este necesar ca $x \geq 1$, altfel $2013[x]$ şi $2004[x]$ ar fi nule sau negative. Avem $[2004x] = [2004[x] + 2004\{x\}] = 2004[x] + [2004\{x\}]$, deci pentru
$x \geq 1 \Rightarrow 2003[x] < 2004[x] < [2004x] \Rightarrow 2004[x] - 2003[x] = 1$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$[2004x] - 2004[x] = 1 \Rightarrow [x] = 1$ și din $[2004\{x\}] = 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} \in \left[\frac{1}{2004}, \frac{1}{1002}\right) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2005}{2004}, \frac{1003}{1002}\right)$.

G.M. nr. 12/2014

8**. Fără a restrânge generalitatea se poate alege $a \in [0,1]$ și cum $r \in [0,1)$ arătăm că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n < n - 1$. Dacă $a_n \geq n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 + (n-1)r \geq n - 1 \Rightarrow n \leq \frac{a_1 + 1 - r}{1 - r}, \forall\, n \geq 1$, absurd.

Așadar, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n < n - 1$ și considerând intervalele $[0,1); [1,2); [2,3) \ldots [n-2, n-1)$ din cei n termeni ai șirului, vor exista doi termeni consecutivi situați în același interval deci au aceeași parte întreagă.

Alin Pop, O.L. Sibiu, 2009

9**. $[\sqrt{x}] = k,\ 2[\sqrt{x}] = 2k,\ 2k, k$ numere consecutive numai dacă $k = 1$.

$[\sqrt{x}] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 \leq x < 4 \Rightarrow x \in [1,4)$ (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\sqrt{x}] = 1, 2[\sqrt{x}] = 2 \Rightarrow [2\sqrt{x}] = 3 \Rightarrow 3 \leq 2\sqrt{x} < 4 \Rightarrow 9 \leq 4x < 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{9}{4} \leq x < 4$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $x \in \left[\frac{9}{4}, 4\right)$.

Mircea Fianu, O.L. clasa a VIII-a

10**. Pentru $x = 0$, condiția este satisfăcută. Pentru $x \in (0,1) \Rightarrow [x] = 0$, $\{x\} = x - [x] = x$ și elementele sunt $(x, x, 0)$ și nu poate fi în x progresii geometrice și nici situația $x = 1$ nu convine.

Fie $x > 1$, atunci $\{x\} < [x] \leq x$ și ele sunt în progresie geometrică $x\{x\} = [x]^2$

$\Rightarrow x(x - [x]) = [x]^2 \Rightarrow x^2 - x[x] - [x]^2 = 0$, cu notația $\frac{x}{[x]} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[x]$

și din $x < [x] + 1 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}[x] < [x] + 1 \Rightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1\right)[x] < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] < \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} < 2 \Rightarrow [x] = 1$ și $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \left\{0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

O.L. Dolj, 2013

Scanned with OKEN Scanner

11. Notăm $[x]=k\in\mathbb{N},\{x\}=t\in[0,1)$ și numerele reprezintă laturile unui triunghi dacă $[x+\sqrt{3}]<[x]+[x+\sqrt{2}]\Rightarrow[k+t+\sqrt{3}]<k+$ $+[k+t+\sqrt{2}]\Rightarrow[t+\sqrt{3}]<k+[t+\sqrt{2}]\Rightarrow k\geq 1.$
Într-adevăr pentru $k=1\Rightarrow[t+\sqrt{3}]<[t+\sqrt{2}+1]$ care este adevărată.
Prin urmare, $x\geq 1$.

12. a) Avem $[nx]=[n[x]+n\{x\}]=n[x]+[n\{x\}]\geq n[x]$.

b) Pentru $x>0\Rightarrow[x]\leq 2[x]\leq[2x]$. Prin urmare, $[2x]-2[x]=1$ $\Rightarrow[2\{x\}]=1\Rightarrow\{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ rezultă $x=n+\{x\},n\in\mathbb{N}$. Avem $[x]=n$, $2[x]=2n$ și $[2x]=2n+1$ și sunt consecutive pentru $n=1$. Prin urmare, $x=1+a,a\in\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Concursul „R.M.C.S.", 2012

13.** Evident $x\geq 0$.

a) Fie $k=[\sqrt{x}],2[\sqrt{x}]=2k\Rightarrow 2k=k+1\Rightarrow k=1$ și $[2\sqrt{x}]=3\Rightarrow$ $\Rightarrow$ avem $1\leq\sqrt{x}<2\Rightarrow 1\leq x<4$ și $3\leq 2\sqrt{x}<4\Rightarrow\frac{3}{2}\leq\sqrt{x}<2\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{9}{4}\leq x<4\Rightarrow x\in\left[\frac{9}{4},4\right)$.

b) Avem $2\cdot 2[\sqrt{x}]=[\sqrt{x}]+[2\sqrt{x}]\Rightarrow 3[\sqrt{x}]=[2\sqrt{x}]$.
Fie $[\sqrt{x}]=k\geq 0\Rightarrow 3k=[2\sqrt{x}];\ k\leq\sqrt{x}\leq k+1$ și $3k\leq 2\sqrt{x}\leq 3k+1\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{3k}{2}\leq\sqrt{x}<\frac{3k+1}{2}$.
Dacă $k\leq\frac{3k}{2}<k+1\leq\frac{3k+1}{2}\Rightarrow k\geq 0,k<2,k\geq 1\Rightarrow k=1$.
Pentru $k=1\Rightarrow 1\leq\sqrt{x}<2$ și $\frac{3}{2}\leq\sqrt{x}<2\Rightarrow\frac{9}{4}\leq x<4\Rightarrow x\in\left[\frac{9}{4},4\right)$.
Dacă $k\leq\frac{3k}{2}<\frac{3k+1}{2}<k+1\Rightarrow k=0$. Pentru $k=0\Rightarrow 0\leq\sqrt{x}<\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow 0\leq x<\frac{1}{4}\Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)\Rightarrow$ progresia $\div 0,0,0$.
Așadar, $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{9}{4},4\right)$.

14. Avem $a_k=a_1+(k-1)r,\forall\,k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow ma_k=a_1m+(k-1)rm$, dar cum $rm,(k-1)rm\in\mathbb{Z}\Rightarrow[ma_k]=(k-1)rm+[a_1m]\Rightarrow$
$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}[ma_k]=n[a_1m]+rm\frac{n(n-1)}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar cum $\frac{n([a_1m]+[a_nm])}{2}=\frac{n([a_1m]+[m(a_1+(n-1)r)])}{2}=$
$=\frac{n[2[a_1m]+mr(n-1)]}{2}=n[a_1m]+\frac{rmn(n-1)}{2}$,
egalitatea este adevărată.

Marian Cucoaneș, Concursul „Sfera", 2015

15. Deoarece $k_2-k_1=k_3-k_2-\cdots=k_p-k_{p-1}=m$ și cum $a_{k_2}-a_{k_1}=$
$=(k_2-k_1)r=mr$ ș.a.m.d. Deci, $a_{k_1},a_{k_2},\ldots,a_{k_p}$ este în progresie aritmetică.

Florentin Smarandache, R.M.T., 1982

16. Din ipoteză rezultă $(a_1r)=1$ deci
$\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{a_k}{a_1}\right]=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{a_1+(k-1)r}{a_1}\right]=\sum_{k=2}^{n}1+\left[\frac{(k-1)r}{a_1}\right]=$
$=n-1+\sum\left[\frac{(k-1)r}{a_1}\right]=n-1+\left[\frac{r}{a_1}\right]+\left[\frac{2r}{a_1}\right]+\cdots+\left[\frac{(n-1)r}{a_1}\right]$.

Florin Rotaru, G.M. nr. 2-3/1992

17.** Fie $t\in\mathbb{Z}$ cu $t>a_1$. Cum șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este strict crescător și nemărginit, rezultă că există $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $a_k\leq t<a_{k+1}$. Dacă $a_k<t<a_{k+1}\Rightarrow[a_k]=[t]=t$ (vezi proprietatea), contradicție cu $a_k<t$. Așadar, $t=a_k$ deci rezultă că un număr întreg mai mare ca a_1 aparține progresiei. Atunci și $t+1$ este un termen al progresiei, adică există $l\in\mathbb{N}^*$ cu $t+1=a_l$. Prin urmare, $1=a_l-a_k=r(l-k)$. Notând $l-k=m\in\mathbb{N}^*$ obținem $rm=1$.

Dinu Șerbănescu, O.L. București, 2006

18.** Presupunem că $x_0,x_1,\ldots,x_n$ sunt în progresie aritmetică. Rezultă că $x_{n+1}=x_n+r,r\in\mathbb{N}^*$. Alegem $a=\frac{x_0}{r}$ și verificăm egalitatea
$x_{n+1}=x_n+\left[\frac{x_n}{n+a}\right]$. Într-adevăr $x_n+\left[\frac{x_n}{n+a}\right]=x_n+\left[\frac{rx_n}{x_0+nr}\right]=$
$=x_n+[r]=x_n+r=x_{n+1}$. Reciproc să presupunem că există $a>0$ astfel încât $x_{n+1}=x_n+\left[\frac{x_n}{n+a}\right],\forall\,n\in\mathbb{N}$. Notăm cu $r=\left[\frac{x_1}{1+a}\right]$ și avem
$r\leq\frac{x_1}{1+a}<r+1\Rightarrow r(1+a)\leq x_1<(r+1)(a+1)$ $(*)\Rightarrow$
$\Rightarrow r(a+2)\leq x_1+r<(r+1)(a+1)+r<(r+1)(a+2)$, adică
$\left[\frac{x_1+r}{a+2}\right]=r$. Deoarece $x_3=x_2+\left[\frac{x_2}{a+2}\right]$, avem $x_3=x_1+r+\left[\frac{x_1+r}{a+2}\right]=$
$=x_1+2r$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunând că $x_k = x_1 + (k-1)r$, demonstrăm că $x_{k+1} = x_1 + kr$.

Într-adevăr, $x_{k+1} = x_k + \left[\frac{x_k}{k+a}\right] = x_1 + (k-1)r + \left[\frac{x_1 + (k-1)r}{k+a}\right]$ (**).

Dar din (*) $r(1+a) \le x_1 < (r+1)(a+1) \Rightarrow r(1+a) + (k-1)r \le$
$\le x_1 + (k-1)r < (r+1)(a+1) + (k-1)r \Rightarrow r(a+k) \le x_k <$
$< (r+1)(k+a) \Rightarrow \left[\frac{x_k}{k+a}\right] = r$ deci rezultă (**).

19. a) Fie $[x] = k \in \mathbb{N}, \{x\} = t \in [0,1) \Rightarrow x = k + t$. Pot avea loc următoarele situații:

1) $\div t, k, t+k \Leftrightarrow 2k = k + 2t$;
2) $\div k+t, t, k \Leftrightarrow 2t = 2k + t$;
3) $\div t, k+t, k \Rightarrow 2(k+t) = k + t$.

Din 1) rezultă $k = 1, t = \frac{1}{2}$ și $x = \frac{3}{2}$ deci $\div \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ cu rația $\frac{1}{2}$ celelalte situații nu convin.

b) Pot avea loc următoarele situații:

1) $\div k, t,\ k+t \Rightarrow t^2 = k(k+t)$;
2) $\div t, k, k+t \Leftrightarrow k^2 = t(k+t)$;
3) $\div t, k+t, k \Leftrightarrow (k+t)^2 = kt$.

Din 1) rezultă $k = -1, t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x = k + t = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$ cu rația $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ și $x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}, b_1 = -1, b_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, b_3 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

Din 2) rezultă $b_1 = \{x\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, b_2 = [x] = 1$, și $b_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ cu rația $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ și $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Din 3) nu rezultă soluție.

Canada 1985

20*.** Fie $a_0 \in [0,1]$ și $r \in (0,1]$ deci șirul $a_n = a_0 + nr$ este strict crescător, pozitiv și nemărginit. Evident $\{[a_n], n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Fie $p \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru

$[a_n] = p \Rightarrow p \le a_n < p+1 \Leftrightarrow p \le a_0 + nr < p+1 \Leftrightarrow 0 \le \frac{p-a_0}{n} \le r <$
$< \frac{p-a_0}{n} + \frac{1}{n}$ și pentru n suficient de mare $\frac{p-a_0}{n} + \frac{1}{n} \le 1 \Rightarrow [a_n] = p \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{N} \subset \{[a_n], n \in \mathbb{N}\}$, atunci evident șirul trebuie să fie strict crescător și pentru a se obține numărul natural zero se impune ca $a_0 \in [0,1) \Leftrightarrow [a_0] = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = r \Rightarrow [a_n] = [r] \in \{0,1\}$. Dacă r ar fi mai mare decât 1, atunci este posibil să existe $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $[a_{k+1}] - [a_k] > 1$ deci s-ar „sări" cel puțin un număr natural, așadar $r \in (0,1]$.

G.M. Supliment nr. 10/2011

21*.** Notăm $f(n)$ numărul de progresii aritmetice de trei termeni cu rația strict pozitivă ce se pot forma cu elementele din mulțimea $\{1,2,3,..,n\}$. Atunci avem pentru $n = 3 \Rightarrow f(3) = 1$ și $f(n+1) = f(n) + x_n$ unde x_n reprezintă numărul de progresii de forma $(a, b, n+1)$, cu $a, b \in \{1,2,...,n\}$. Însă $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] \Rightarrow f(n+1) = f(n) + \left[\frac{n}{2}\right], \forall\, n \geq 3$.

Dând valori lui n și adunându-le rezultă:

$$f(n) = \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] \equiv \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

(Ultima egalitate este cunoscută.)

Lavinia Savu

22*.** a) Se demonstrează prin inducție matematică.

b) Dacă (a, b, c) este un triplet cu proprietatea din enunț, atunci $b = aq$ și $c = aq^2$, unde $q \in \mathbb{N}^*$ și $aq^2 \leq n$, adică $q \leq \sqrt{\frac{n}{a}}$.

Cum $q \in \mathbb{N}^*$, rezultă $q \in \left\{1,2,3,...,\left[\sqrt{\frac{n}{a}}\right]\right\}$. Sumând după $a = \overline{1,n}$ obținem:

$$f(n) = \left[\sqrt{\frac{n}{1}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{3}}\right] + \cdots + \left[\sqrt{\frac{n}{n}}\right].$$

Folosind $[x] \leq x$ și inegalitatea de la punctul a) obținem:

$$f(n) \leq \left[\sqrt{\frac{n}{1}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] + \cdots + \left[\sqrt{\frac{n}{n}}\right] = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 2n.$$

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

23*.** Prin calcul rezultă $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5, x_4 = 7, x_5 = 9, x_6 = 12, x_7 = 16, x_8 = 22$. Arătăm că $x_{n+1} > x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, rezultă

$x_{n+1} - x_n = [x_n\sqrt{2}] - x_n > x_n\sqrt{2} - 1 - x_n = x_n(\sqrt{2}-1) - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n > \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, deci $x_{n+1} > x_n$. Fie x_n, x_{n+1}, x_{n+2} în progresie aritmetică, deci $2x_{n+1} = x_n + x_{n+2} \Rightarrow 2[x_n\sqrt{2}] = x_n + [\sqrt{2}[x_n\sqrt{2}]] \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}x_n > 2[x_n\sqrt{2}] = x_n + [\sqrt{2}[x_n\sqrt{2}]] > x_n + \sqrt{2}[x_n\sqrt{2}] - 1 >$

$> x_n - 1 + \sqrt{2}(x_n\sqrt{2} - 1) = 3x_n - \sqrt{2} - 1 \Rightarrow (3 - 2\sqrt{2})x_n < \sqrt{2} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n < (\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2} < 16 = x_7$

Scanned with OKEN Scanner

și din monotonia șirului rezultă că $n \leq 6$ din verificarea primilor 6 termeni rezultă: $\div x_1, x_2, x_3$ și x_3, x_4, x_5 adică $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5$ și $x_3 = 5$, $x_4 = 7, x_5 = 9$.

O.N., 2000, G.M. nr. 7-8/2000, Radu Gologan O.N., 2002

24***. Soluția 1 (*Radu Orendovici*)

Arătăm mai întâi că $f(n) = (n+2)^4 - 16n^3 > 0, \forall x \geq 0$. Într-adevăr $f(x) = x^2(x-4)^2 + 8(x^2+4x+2) > 0, \forall\, x \geq 0$. Fie $a = [\sqrt[3]{n}]$ și pentru $x = a+1 \Rightarrow (a+3)^4 > 16(a+1)^3$ sau $(a+1)^3 < \left(\frac{a+3}{2}\right)^4$ (1).

Atunci $a^3 \leq n < (a+1)^3 < \left(\frac{a+3}{2}\right)^4 \Rightarrow [\sqrt[4]{n}] < \frac{a+3}{2} \leq \frac{a+2}{2}$ și $[\sqrt[5]{n}] = 2[\sqrt[4]{n}] - [\sqrt[3]{n}] \leq 2\frac{a+2}{2} - a = 2$. Rezultă că $n < 3^5 \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] \leq 6$ și $[\sqrt[5]{n}] \leq 2$ (2). Progresiile aritmetice de trei termeni care verifică condițiile (2) sunt:

0, 0, 0 0, 1, 2 0, 2, 4
1, 1, 1 1, 2, 3 1, 3, 5
2, 2, 2 2, 3, 4 2, 4, 6

lor le corespund mulțimile de soluții $N_i, \overline{i,9}, N_1 = \{-2\}, N_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $N_3 = \emptyset, N_4 = \emptyset, N_5 = \{27,28,29,30\}, N_6 = [81,124] \cap \mathbb{N}, N_7 = \emptyset, N_8 = \emptyset$, $N_9 = \emptyset$.

Soluția 2 (*Aurel Silberberg*)

Demonstrăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ are loc inegalitatea $k^4 \geq (2k-2)^3$. Într-adevăr pentru $k = 3$ afirmația este adevărată. Pentru $k > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k-3)^2 \geq 1 \Rightarrow k^2 - 6k + 8 \geq 0 \Rightarrow k(k-1) + 3k \geq 8(k-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{3}{k-1} \geq \frac{8}{k}$. Dar cum $\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^3 \geq 1 + \frac{3}{k-1} \Rightarrow \frac{k^3}{(k-1)^3} =$

$= \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^3 \geq \frac{8}{k} \Rightarrow k^4 \geq (2k-2)^3$. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 243 = 3^5$ și fie $k = [\sqrt[4]{n}] \geq 3$. Avem $\sqrt[4]{n} \geq [\sqrt[4]{n}] = k \Rightarrow n \geq k^4 \geq (2k-2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{n} \geq 2k - 2 \Rightarrow [\sqrt[3]{n}] \geq 2k-2$. Cum $n \geq 3^5 \Rightarrow [\sqrt[5]{n}] \geq 3$ deci $[\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[5]{n}] \geq 2k+1 > 2[\sqrt[4]{n}]$. Prin urmare, pentru $n \geq 243$ numerele $[\sqrt[3]{n}], [\sqrt[4]{n}]$ și $[\sqrt[5]{n}]$ nu pot forma o progresie aritmetică. Se vor enumera cazurile: $[0,7] \cup [27,31] \cup [8,124] \cap \mathbb{N}$.

Titu Andreescu, Concurs R.M.T., 1982

Scanned with OKEN Scanner

25**. Evident $S_n \geq n$. Apoi, cum $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$ pentru $x \geq -1$, avem

$$S_n = n+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a_1a_2}+\frac{r}{a_2a_3}+\cdots+\frac{r}{a_na_{n+1}}\right) =$$

$$= n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right) < n+\frac{1}{2a_1} \leq n+1.$$

Am arătat astfel că $n \leq S_n < n+1$, prin urmare $[S_n] = n, \forall\, n \geq 2$.

Mihai Piticari

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 4

Aplicaţii ale identităţii lui Hermite

§ 1. Proprietăţi

1. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea:

a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$;

b) $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$

(identitatea lui Hermite).

2. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc egalităţile:

a) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = \{2x\} + \frac{1}{2}$;

b) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{3}\right\} + \left\{x + \frac{2}{3}\right\} = \{3x\} + 1$;

c) $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} + \left\{x + \frac{2}{n}\right\} + \cdots + \left\{x + \frac{n-1}{n}\right\} = \{nx\} + \frac{n-1}{2}$.

3. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ are loc identitatea:

$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$ (identitatea lui Hermite).

4. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$ atunci are loc egalitatea:

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right] = m.$$

5. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{m}{n}\right] = [nx], \forall x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m = n - 1$.

6. Fie $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$ fixat. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât:

$[x] + \left[x + \frac{1}{a}\right] + \left[x + \frac{2}{a}\right] + \cdots + \left[x + \frac{m-1}{a}\right] = [ax]$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

7. Fie $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se arate că:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{m+1}{n}\right\} + \left\{\frac{m+2}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{m+n-1}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

8. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ cu $(m,n)=1$. Atunci are loc egalitatea:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{2m}{n}\right\}+\left\{\frac{3m}{n}\right\}+\cdots+\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}=\frac{n-1}{2}.$$

9. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ enunțul. Să se demonstreze relația:

$$\{x\}+\left\{x+\frac{1}{n}\right\}+\cdots+\left\{x+\frac{n-1}{n}\right\}=\{nx\}+\left\{\frac{n-1}{2}\right\}.$$

(Identitatea lui Hermite pentru partea fracționară.)

Soluție

Rezultă din identitatea lui Hermite prin trecere la partea fracționară:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]=[nx] \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}\right)-\left\{x+\frac{k}{n}\right\}=nx-\{nx\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nx+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k-\sum_{k=0}^{n-1}\left\{x+\frac{k}{n}\right\}=nx-\{nx\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left\{x+\frac{k}{n}\right\}=\{nx\}+\frac{n-1}{2}.$$

10. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[x-\frac{1}{n}\right]+\left[x-\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x-\frac{n}{n}\right]=[nx]-n.$$

Soluție

Făcând substituția $x \to x+1$ relația devine:

$$\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+\left[x+\frac{n-2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{1}{n}\right]+[n]=[nx+n]-n=[nx],$$

identitatea lui Hermite.

Gh. Andrei

11. Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$ și numerele $0 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$ și $0 \le b_1 < b_2 < \cdots < b_m < 1$ astfel încât:

$[x+a_1]+[x+a_2]+\cdots+[x+a_n]=[x+b_1]+[x+b_2]+\cdots+[x+b_m]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1). Să se arate că $m=n$ și $a_k=b_k, k=\overline{1,n}$.

Soluție

Vom da lui x valorile 0 și 1, obținem:

$[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]=[b_1]+[b_2]+\cdots+[b_m]$, (1)

$[a_1+1]+[a_2+1]+\cdots+[a_n+1]=[b_1+1]+[b_2+1]+\cdots+[b_m+1]$

este echivalentă cu $[a_1]+[a_2]+\cdots+[a_n]+n=[b_1]+[b_2]+\cdots+[b_m]+$ $+m$.

Din (1) rezultă $n=m$. Prin urmare relația dată (1) devine:

$[x+a_1]+[x+a_2]+\cdots+[x+a_n]=[x+b_1]+[x+b_2]+\cdots+[x+b_m]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2). Putem presupune $a_1 < b_1$ și fie

$0 < c < \min\{b_1-a_1, \min_{k=\overline{2,n}}(a_c-a_1)\} < 1$ și înlocuind în (2) $x \to -a_1-c$ se obține: $[-c]+[a_2-a_1-c]+\cdots+[a_n-a_1-c]=$

Scanned with OKEN Scanner

$= [b_1 - a_1 - c] + [b_2 - a_1 - c] + \cdots + [b_n - a_1 - c]$ (3),
dar cum $0 < c < 1$ şi $0 < a_k - a_1 - c < 1$ şi $0 < b_k - a_1 - c < 1$
egalitatea (3) devine $-1 = 0$, fals. Aşadar, $a_1 = b_1$ şi (2) devine
$[x + a_2] + [x + a_3] + \cdots + [x + a_n] =$
$= [x + b_2] + [x + b_3] + \cdots + [x + b_n]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Procedând similar, va rezulta $a_2 = b_2$ ş.a.m.d. Prin urmare, $a_k = b_k, k = \overline{1,n}$.

Cristinel Mortici, G.M. nr. 9/1991

12. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$ astfel încât
$\{a_1\} < \{a_2\} < \cdots < \{a_n\}$ şi $\{b_1\} < \{b_2\} < \cdots < \{b_m\}$ cu proprietatea că
$[x + a_1] + [x + a_2] + \cdots + [x + a_n] = [x + b_1] + [x + b_2] + \cdots + [x + b_m]$,
$\forall x \in \mathbb{R}$. (4). Să se arate că $m = n$ şi $\{a_k\} = \{b_k\}, k = \overline{1,n}$.

Soluţie

La fel ca la exerciţiul 11 rezultă $m = n$. Pentru $x = 0$ obţinem:
$[a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] = [b_1] + [b_2] + \cdots + [b_n]$, (5).
Relaţia dată (4) se mai scrie: $[x + [a_1] + \{a_1\}] + \cdots + [x + [a_n] + \{a_n\}] =$
$= [x + [b_1] + \{b_1\}] + \cdots + [x + [b_n] + \{b_n\}] \Rightarrow$
$\Rightarrow [x + \{a_1\}] + [x + \{a_2\}] + \cdots + [x + \{a_n\}] + [a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] =$
$= [x + \{b_1\}] + [x + \{b_2\}] + \cdots + [x + \{b_n\}] + [b_1] + [b_2] + \cdots + [b_n]$
şi ţinând seama de (5) rezultă:
$[x + \{a_1\}] + \cdots + [x + \{a_n\}] = [x + \{b_1\}] + \cdots + [x + \{b_n\}], \forall x \in \mathbb{R}$.
Aplicând 11 rezultă $\{a_k\} = \{b_k\}, k = \overline{1,n}$.

G.M. nr. 9/1991

13. Fie $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$ astfel încât:
$[x + a_1] + [x + a_2] + \cdots + [x + a_n] = [nx], \forall x \in \mathbb{R}$.
Atunci $a_k = \dfrac{k-1}{n}, k = \overline{1,n}$.

Soluţie

Utilizând identitatea lui Hermite obţinem:

$$[x + a_1] + [x + a_2] + \cdots + [x + a_n] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] =$$

$= [nx]$ şi din 11 rezultă $a_k = \frac{k-1}{n}, k = \overline{1,n}$.
(Sau se poate proceda direct ca la exerciţiul 11.)

14. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ şi $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 1$ astfel încât
$[x] + [x + a_1] + \cdots + [x + a_{n-1}] = [mx], \forall x \in \mathbb{R}$.
Atunci $m = n$ şi $a_k = \dfrac{k}{n}, k = \overline{1, n-1}$.

Soluţie

Utilizând identitatea lui Hermite avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$[mx] = [x] + \left[x + \frac{1}{m}\right] + \cdots + \left[x + \frac{m-1}{m}\right] =$$
$$= [x] + [x + a_1] + \cdots + [x] + [x + a_{n-1}], \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Aplicând 11 rezultă $m = n$ şi $a_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1, n-1}.$

Observaţie: Aplicaţiile de la 1 la 8 sunt rezolvate în Cap. I.

Cristinel Mortici

§ 2. Alte aplicaţii

15*. Să se arate că dacă $[x] + [x + a] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$, atunci $a = \frac{1}{2}$ (o reciprocă a relaţiei lui Hermite).

Soluţie

Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] = 0 \Rightarrow a \in [0,1)$.

Pentru $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2} + a\right] = 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$, pentru $x = -a \Rightarrow [-a] = [-2a] \Rightarrow$

$\Rightarrow [-2a] = -1 \Rightarrow -1 \leq -2a \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$. Prin urmare, $a = \frac{1}{2}$ şi se obţine relaţia lui Hermite.

R.M.T., 1975

16*. Fie $\alpha > 0$. Să se demonstreze că:

$$\left[x + \frac{1}{\alpha}\right] + [x] = [\alpha x], (\forall) x \in \mathbb{R} \text{ dacă şi numai dacă } \alpha = 2.$$

Soluţie

Evident, dacă $\alpha = 2$ se obţine identitatea lui Hermite pentru $n = 2$. Reciproc, să presupunem că are loc egalitatea din enunţ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0$, egalitatea devine $\left[\frac{1}{\alpha}\right] = 0 \Rightarrow \alpha > 1$.

Pentru $x = 1$, egalitatea devine $\left[1 + \frac{1}{\alpha}\right] = [\alpha] - 1 \Rightarrow 1 + \left[\frac{1}{\alpha}\right] = [\alpha] - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [\alpha] = 2 \Rightarrow \alpha \in [2,3)$ (1). Pentru $x = -1$ se obţine $[-\alpha] = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\alpha \in [-2,-1) \Rightarrow \alpha \in (1,2]$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $\alpha = 2$.

17*. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left[x + \frac{1}{n}\right] + [(n-1)x] = [nx]$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Dacă $n = 1$, relaţia devine $[x + 1] = [x]$, fals.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $n \geq 3$, considerăm $x = \frac{1}{n}$ în relația dată și obținem: $\left[\frac{2}{n}\right] + \left[\frac{n-1}{n}\right] = 1$ $\Rightarrow 0 = 1$, fals. Așadar, rămâne cazul $n = 2$ și se obține identitatea lui Hermite $\left[x + \frac{1}{2}\right] + [x] = [2x], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Revista Galați

18*. Să se arate că: $[x] + \left[x + \frac{y}{2}\right] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 1$.

Soluție

Evident dacă $y = 1$, atunci $[2x] \Rightarrow [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left[x + \frac{y}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{y}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq y < 2$. (1)

Pentru $x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 3$. (2)

Pentru $x = \frac{-y}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2} - \frac{y}{2}\right] = 0 \Rightarrow -1 < y \leq 1$ (3). Din (2) și (3) $\Rightarrow y = 1$.

19**. Fie $p, q \in \mathbb{Z}$. Să se arate că: $\left[p\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[q\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = [x], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $p = 2$ și $q = 1$.

Soluție

Pentru $x = \frac{3}{2} \Rightarrow [p] - [q] = 1 \Rightarrow p - q = 1 \Rightarrow p = q + 1$.

Pentru $x = 1 \Rightarrow \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{q}{2}\right] = 1 \Rightarrow \left[\frac{q+1}{2}\right] + \left[\frac{q}{2}\right] = 1$ (1)

$\Rightarrow \left[\frac{q}{2}\right] + \left[\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right] = 1$, dar conform identității lui Hermite rezultă

$\left[\frac{q}{2}\right] + \left[\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{2q}{2}\right] = q \Rightarrow q = 1$ și $p = 2$.

Reciproc, dacă $p = 2$ și $q = 1$, atunci $\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[x - \frac{1}{2}\right] =$

$= [2x - 1] - \left[x - \frac{1}{2}\right] = [2x] - 1 - \left[x - \frac{1}{2}\right] \Rightarrow [2x] - \left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$.

Ovidiu Pop, G.M. nr. 2/2002

20**. Determinați numerele naturale nenule n pentru care egalitatea: $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{n}\right\} = \{nx\} + \frac{1}{n}$ este adevărată, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

Fie $n \geq 3$ și $x = \frac{1}{n}$ $\quad \left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{\frac{2}{n}\right\} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{n}$, fals.

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, căutăm $n \in \{1,2\}$. Fie $n = 2$ şi conform identităţii lui Hermite rezultă:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] \Rightarrow x - \{x\} + x + \frac{1}{2} - \left\{x + \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= 2x - \{2x\} \Rightarrow \{x\} + \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = \{2x\} + \frac{1}{2}, (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Pentru $n = 1$ relaţia este falsă. Aşadar, $n = 2$.

Lucian Dragomir, O.L. Caraş-Severin, 2014

21**. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $[x] + [x + a] = [bx], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] = 0 \Rightarrow a \in [0,1)$ şi din inegalitatea

$x - 1 + x + a - 1 < [x] + [x + a] = [bx] \leq bx, (\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow a - 2 \leq x(b - 2), (\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow b = 2.$

Dar avem $[x] + [x + a] = [2x], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Din identitatea lui Hermite rezultă $[x + a] = \left[x + \frac{1}{2}\right], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$ $(*)$.

Pentru $x = \frac{1}{2} \Rightarrow a + \frac{1}{2} \in [1,2) \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap [0,1) \equiv \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Dacă $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci se poate alege $x_0 \in \left(1 - a, \frac{1}{2}\right)$ şi avem

$0 < x_0 + \frac{1}{2} < 1 < x_0 + a \Rightarrow \left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 0$, iar

$[x_0 + a] \geq 1$ deci relaţia $(*)$ nu este verificată. Prin urmare, $a = \frac{1}{2}$ şi $b = 2$ şi se obţine identitatea lui Hermite.

Gh. Turcu, R.M./2004

22*. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x + a], (\forall) x \in \mathbb{R}$. Arat[că $a = \frac{1}{2}$.

Soluţie

Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] = 0 \Rightarrow a \in (0,1)$.

Pentru $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \left[\frac{1}{2} + a\right] \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Dacă $a \neq \frac{1}{2} \Rightarrow a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Fie $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$,

$\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci relaţia iniţială devine

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2} + \varepsilon\right], (\forall)\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow [u] = [u + \varepsilon], (\forall)\, u \in \mathbb{R} \Rightarrow \varepsilon = 0.$$

Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$ şi dacă $[x] = [x + \varepsilon], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$, atunci $\varepsilon = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunând că $\varepsilon \neq 0$ avem:
Pentru $x = 0 \Rightarrow [\varepsilon] = 0 \Rightarrow \varepsilon \in (0,1)$.
Pentru $x = 1 - \varepsilon \Rightarrow [1 - \varepsilon] = [1]$, fals. Aşadar, $\varepsilon = 0$ (vezi capitolul proprietăți).

23*. Să se arate că: $\left[a + \frac{1}{2}\right] - \left[a - \frac{1}{2}\right] = 1, (\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

Soluție

Fie relația lui Hermite: $[a] + \left[a + \frac{1}{2}\right] = [2a]$ (1)

și cu substituția $a \to a - \frac{1}{2} \Rightarrow \left[a - \frac{1}{2}\right] + [a] = [2a] - 1$ (2).

Scăzând egalitatea din (1) și (2)rezultă $\left[a + \frac{1}{2}\right] - \left[a - \frac{1}{2}\right] = 1, (\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

24**. Să se demonstreze că:
$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+5}{6}\right]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

Se aplică identitatea lui Hermite pentru $n \in \{2,3\}$. Avem:
$\left[\frac{n}{3}\right] = \left[2\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right]$ și
$\left[\frac{n}{2}\right] = \left[3\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{n}{6} + \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right]$,
introduse în ambii membri, rezultă egalitatea cerută.

25**. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ are loc relația:
$\left[\frac{a+3}{6}\right] - \left[\frac{a+4}{6}\right] + \left[\frac{a+5}{6}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] - \left[\frac{a+1}{3}\right]$.

Soluția 1

Cu $\frac{a+1}{6} = b$ relația devine: $\left[b + \frac{1}{3}\right] - \left[b + \frac{1}{2}\right] + \left[b + \frac{2}{3}\right] = [3b] - [2b]$,
utilizând relația lui Hermite pentru cazurile (2) și (3) adică:
$[2b] = [b] + \left[b + \frac{1}{2}\right]$ și $[3b] - [b] + \left[b + \frac{1}{3}\right] + \left[b + \frac{2}{3}\right], (\forall)\ b \in \mathbb{R}$.

Cristinel Mortici, O.J., 2002

Soluția 2

Avem $\left[\frac{a+3}{6}\right] + \left[\frac{a+5}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+4}{6}\right]$.
Notăm cu A membrul stâng și cu B membrul drept.
$A = \left[\frac{a+3}{6}\right] + \left[\frac{a+3}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{a+3}{6} + \frac{2}{3}\right] - \left[\frac{a+3}{6} + \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] =$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \left[3\frac{a+3}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] - \left[\frac{a+3}{6} + \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{a+3}{2}\right] - \left[\frac{a+7}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] =$$

$$= \left[\frac{a+1}{2}\right] + 1 - \left(\left[\frac{a+1}{6}\right] + 1\right) + \left[\frac{a+1}{3}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] - \left[\frac{a+1}{6}\right].$$

Utilizând identitatea lui Hermite avem:

$$\left[\frac{a+1}{3}\right] = \left[2 \cdot \frac{a+1}{6}\right] = \left[\frac{a+1}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{6} + \frac{1}{2}\right].$$

Suma de mai sus devine:

$$\left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+1}{6}\right] + \left[\frac{a+4}{6}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+4}{6}\right] = B.$$

26**. Să se arate că oricare ar fi a și $n, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$\left[\frac{a+1}{n}\right] + \left[\frac{a+2}{n}\right] + \left[\frac{a+3}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{a+2n}{n}\right] = 2[a] + n + 2.$$

Soluție

Se aplică identitatea lui Hermite. Notăm cu $b = \frac{a}{n}$, iar membrul stâng al egalității devine:

$$\left[b + \frac{1}{n}\right] + \left[b + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[b + \frac{n-1}{n}\right] + \left[b + \frac{n}{n}\right] + \left[b + \frac{n+1}{n}\right] +$$

$$+ \left[b + \frac{n+2}{n}\right] + \cdots + \left[b + \frac{2n-1}{n}\right] + \left[b + \frac{2n}{n}\right] =$$

$$= \left[b + \frac{1}{n}\right] + \left[b + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[b + \frac{n-1}{n}\right] + [b] + 1 + \left[b + \frac{1}{n}\right] + 1 +$$

$$+ \left[b + \frac{2}{n}\right] + 1 + \cdots + \left[b + \frac{n-1}{n}\right] + 1 + [b] + 2 =$$

$$= 2\left([b] + \left[b + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[b + \frac{n-1}{n}\right]\right) + n + 2 =$$

$$= 2[nb] + n + 2 = 2\left[n\frac{a}{n}\right] + n + 2 = 2[a] + n + 2.$$

27**. Să se găsească valorile raționale ale lui y, pentru care

$$[x + y] = \left[\frac{x}{y}\right] - \left[\frac{x}{2y}\right], (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

Soluție

Fie $x = 2ny$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci relația devine:

$$[(2n+1)y] = 2n - n = n \Rightarrow n \leq (2n-1)y < n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2n+1} \leq y < \frac{n+1}{2n+1}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

și egalitatea devine identitatea lui Hermite.

Mircea Lascu, G.M. nr. 1/1992

Scanned with OKEN Scanner

28**. Să se determine $y \in \mathbb{R}$, ştiind că: $[x] + [x + yz] = \left[\frac{x}{z}\right], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Evident $z \neq 0$ şi pentru $x = 0 \Rightarrow [yz] = 0 \Rightarrow 0 < yz < 1$.

Dacă notăm $\frac{x}{z} = u \in \mathbb{R} \Rightarrow [zu] + [zu + yz] = [u], (\forall)\, u \in \mathbb{R}$ (1).

Pentru $u = \frac{1}{z} \Rightarrow 1 + 1 + [yz] = \left[\frac{1}{z}\right] \Rightarrow \left[\frac{1}{z}\right] = 2 \Rightarrow z \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Pentru $u = 2$ din (1) rezultă $[2z] + [2z + yz] = 2$, (2)

şi cum $[2z] \in \{0,1\}$. Dacă $[2z] = 0$, atunci din (2) rezultă $[2z + yz] = 2$, (3)

dar din $\frac{2}{3} < 2z < 1$ şi $0 < yz < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < 2z + yz < 2$ contradicţie cu (3).

Prin urmare, $2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$. Observăm că (1) devine:

$\left[\frac{u}{2}\right] + \left[\frac{u}{2} + \frac{y}{2}\right] = [u], (\forall)\, u \in \mathbb{R}$ şi din identitatea lui Hermite rezultă $y = 1$.

Prin urmare, $y = 1, z = \frac{1}{2}$ (vezi ex. „Aplicaţii identitatea lui Hermite").

Gabriel Danielescu, Concursul „Petre Moroşanu-Trident", 2009

29**. Să se determine $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât:

$\left[a + \frac{1}{m}\right] + [a(m-1)] = [am], \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Pentru $m = 1 \Rightarrow [a + 1] = [a]$, relaţie imposibilă.

Pentru $m = 2 \Rightarrow \left[a + \frac{1}{2}\right] + [a] = [2a]$ (identitatea lui Hermite).

Pentru $m > 2$, vom arăta că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât egalitatea să nu se realizeze.

Fie $t \in \left(\frac{m-2}{m}, \frac{m-2}{m-1}\right)$ şi $k \in \mathbb{Z}$, iar $a = k + t$, atunci egalitatea devine:

$\left[k + t + \frac{1}{m}\right] = \left[k + \frac{m-1}{m}\right] = k = [a]$ $\left(\text{deoarece } t + \frac{1}{m} \in (0,1)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow [(m-1)a] = [(m-1)(k+t)] = [(m-1)k + t(m-1)] =$

$= (m-1)k + m - 3$; $[am] = [m(k+t)] = [km + mt] = km + m - 2$

şi prin urmare $[am] - [(m-1)a] = [a] + 1$ deci egalitatea nu poate fi realizată.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. Utilizarea identității lui Hermite pentru cazul $n = 2$. Ecuații

30. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că: $[x] + [ax + b] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a = 1$ și $b = \frac{1}{2}$.

Soluție

O implicație este evidentă, identitatea lui Hermite.

Reciproc, din relația dată rezultă: $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [ax + b]$ $(*), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Avem $x - \frac{1}{2} < \left[x + \frac{1}{2}\right] = [ax + b] \leq ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$

și relația $(*)$ devine $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x + b], \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow b \in [0,1)$. Considerăm cazurile $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci pentru $x_0 \in \left[1 - b, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 0, x_0 + b \geq 1 \Rightarrow [x_0 + 5] \geq 1$, contradicție.

Pentru $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, atunci pentru $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1 - b\right) \Rightarrow \left[x_0 + \frac{1}{2}\right] \geq 1$ și $x + b < 1 - b - 1 \Rightarrow [x + b] \leq 0$, contradicție.

Prin urmare, $b = \frac{1}{2}$.

b) Fie $a, b \geq 0, c \in \mathbb{R}$. Să se arate că $[x + a] + [x + b] = [cx], \forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c = 2$ și $\{a, b\} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

Soluție

Implicația „$\Rightarrow$" este identitatea lui Hermite.

Reciproc, fie $[x + a] + [x + b] \not\equiv [cx] \Rightarrow x + a - 1 + x + b - 1 < cx$ $(1) \Rightarrow$ $\Rightarrow a + b - 2 < x(c - 2) \Rightarrow c = 2$ (altfel, se obțin contradicții). Egalitatea devine $[x + a] + [x + b] = [2x]$.

Vom arăta că $a \neq b$. Fie $a = b \Rightarrow 2[x + a] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] = 0$ și pentru $x = -a \Rightarrow [-2a] = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2[x] = [2x]$, imposibil. Din (1), $0 \leq a + b < 2$. Fie $a < b$, atunci pentru $x = -a \Rightarrow [b - a] = [-2a] \Rightarrow a = 0, b \in [0,1)$. Relația devine: $[x] + [x + b] = [2x], \forall\, x \in \mathbb{R}$. Utilizând identitatea lui Hermite rezultă $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x + b], \forall\, x \in \mathbb{R}$ (2). Considerăm cazurile:

$\alpha)$ $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, atunci pentru $x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1 - b\right) \Rightarrow \left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 1$ și $[x_0 + b] = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

β) Dacă $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci pentru $x_0 \in \left(1-b, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left[x_0 + \frac{1}{2}\right] = 0$ și $[x_0 + b] = 1$.

Așadar, $b = \frac{1}{2}$. Analog se tratează cazul $a > b$.

Prin urmare, $a = 0, b = \frac{1}{2}$ sau $b = 0, a = \frac{1}{2} \Rightarrow \{a, b\} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ și $c = 2$.

c) Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{3n-7}{4}\right] + \left[\frac{3n-5}{4}\right] = \frac{5n+3}{7}, n \in \mathbb{R}$.

Soluția 1

Evident $\frac{5n+3}{7} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \frac{7k-3}{5}, k \in \mathbb{Z}$ și ecuația devine:

$$\left[\frac{21k-44}{20}\right] + \left[\frac{21k-34}{20}\right] = k,$$

$$\frac{21k-44}{20} - 1 < \left[\frac{21k-44}{20}\right] \leq \frac{21k-44}{20},$$

$$\frac{21k-34}{20} - 1 < \left[\frac{21k-34}{20}\right] \leq \frac{21k-34}{20}.$$

Adunând membru cu membru, obținem:

$$\frac{42k-98}{20} < k \leq \frac{42k-78}{20} \Rightarrow 42k - 90 < 20k \leq 42k - 78 \text{ deci } k = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = 5$.

Soluția 2

Se aplică identitatea lui Hermite. Avem:

$$\left[\frac{3n-7}{4}\right] + \left[\frac{3n-7}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{5n+3}{7} \Rightarrow \left[\frac{3n-7}{2}\right] = \frac{5n+3}{7} = k \Rightarrow n = \frac{7k-3}{5}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{21k-44}{10}\right] = k \Rightarrow k = 4, n = 5.$$

31. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{2}\right] - 2\sqrt{x-1} + x = [x+1]$.

Soluție

Avem: $\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[2 \cdot \frac{x+1}{2}\right] = [x+1]$

deci ecuația se reduce la $x = 2\sqrt{x-1}$ cu soluția $x = 2$.

32. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$.

Soluție

Se aplică identitatea lui Hermite. Se obține:

$$\left[\frac{4x-2}{6}\right] + \left[\frac{4x-2}{6} + \frac{1}{2}\right] = \frac{5x-4}{3} \Rightarrow \left[\frac{4x-2}{3}\right] = \frac{5x-4}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x=\frac{3k+4}{5}\Rightarrow\left[\frac{4k+2}{5}\right]=k\Rightarrow k\leq\frac{4k+2}{5}<k+1\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\{\pm2,\pm1,0\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{7}{5},2\right\}$.

33. Rezolvați ecuația: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{x+3}{2}$.

Soluție

Utilizând identitatea lui Hermite ecuația devine: $[2x]=\frac{x+3}{2}=k$.

$x=2k-3\Rightarrow 4k-6=k\Rightarrow k=2\Rightarrow x=1$.

G.M.S. nr. 4/2015

34. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{4x+1}{6}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{5x-4}{3}$.

Soluție

Avem $\left[\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{5x-4}{3}$

și conform identității lui Hermite avem:

$\left[2\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{5x-4}{3}=k\Rightarrow x=\frac{3k+4}{5}\Rightarrow\left[\frac{4\cdot\frac{3k+4}{5}-2}{3}\right]=k\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\frac{12k+6}{15}\right]=k=\left[\frac{4x+2}{5}\right]=k\Rightarrow k\leq\frac{4k+2}{5}<k+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k\in\{-2,-1,0,1,2\}\Rightarrow x\in\left\{2,\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{7}{5},-\frac{2}{5}\right\}$.

35. Rezolvați ecuația: $\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{2x+7}{6}\right]=5$.

Soluție

Avem: $\left[\frac{2x+4}{6}\right]+\left[\frac{2x+4}{6}+\frac{1}{2}\right]=5$.

Se aplică identitatea lui Hermite $\Rightarrow\left[\frac{2x+4}{3}\right]=5\Rightarrow x\in\left[\frac{11}{2},7\right)$.

36*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x+1}{3}\right]+\left[\frac{4x+5}{6}\right]=\frac{5x+1}{3}$.

Soluție

Se aplică identitatea lui Hermite. Membrul stâng devine:

$\left[\frac{4x+2}{6}\right]+\left[\frac{4x+2}{6}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{4x+2}{6}\right]=\left[\frac{4x+2}{3}\right]$

deci ecuația este echivalentă cu:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left[\frac{4x+2}{3}\right]=\frac{5x+1}{3}=k\Rightarrow x=\frac{3k-1}{5}\Rightarrow\left[\frac{4\cdot\frac{3k-1}{5}+2}{3}\right]=k$$

$$\Rightarrow\left[\frac{12k+6}{15}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{4k+2}{5}\right]=k\Rightarrow k\leq\frac{4k+2}{5}<k+1$$

$$\Rightarrow k\in\{\pm2,\pm1,0\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{7}{5},-\frac{4}{5},-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1\right\}.$$

37. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{8x+6}{14}\right]+\left[\frac{8x+13}{14}\right]=\frac{2x+8}{5}$.

Soluție

$$\left[\frac{8x+6}{14}\right]+\left[\frac{8x+6}{14}+\frac{1}{2}\right]=\frac{2x+8}{5}\Rightarrow\left[\frac{8x+6}{7}\right]=\frac{2x+8}{5}=k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x=\frac{5k-8}{2}\Rightarrow\left[\frac{4(5k-8)+6}{7}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{20k-26}{7}\right]=k$$

$$k\leq\frac{20k-26}{7}<k+1\Rightarrow k=2\Rightarrow x=1.$$

G.M. nr. 9/1983

38*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=5$;

b) $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=7$.

Soluție

a) Utilizând identitatea lui Hermite rezultă: $[2x]=5\Rightarrow x\in\left[\frac{5}{2},3\right)$.

b) Analog $x\in\left[\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right)$.

39. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4$.

Soluție

Avem: $\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=5x-4\Rightarrow\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x-2}{6}+\frac{1}{2}\right]=5x-4$

$$\Rightarrow\left[\frac{4x-2}{3}\right]=5x-4-k\Rightarrow x=\frac{k+4}{5}\Rightarrow k=0,x=\frac{4}{5}.$$

40*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x^2-1}{6}\right]+\left[\frac{x^2+2}{6}\right]=\frac{2}{[x]}$.

Soluție

Rezultă că: $\frac{2}{[x]}\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x]\in\{\pm1,\pm2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Utilizând identitatea lui Hermite rezultă:

$$\frac{2}{[x]}=\left[\frac{x^2+1}{6}\right]+\left[\frac{x^2-1}{6}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{x^2-1}{6}\right]=\left[\frac{x^2-1}{3}\right].$$

Pentru $[x]\in\{-2,\pm1\}$ se constată că ecuația nu are soluție, dar pentru $[x]=2\Rightarrow x\in[2,\sqrt{7})=S$.

Concursul „Ion Ciolac", 2015

41. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{2x+5}{6}\right]=\frac{3x-5}{2}$.

Soluția

$\left[\frac{2x+2}{6}\right]+\left[\frac{2x+2}{6}+\frac{1}{2}\right]=\frac{3x-5}{2}$ și se aplică identitatea lui Hermite

$$\Rightarrow\left[2\frac{2x+2}{6}\right]=\frac{3x-5}{2}\Rightarrow\left[\frac{2x+2}{3}\right]=\frac{3x-5}{2}=k\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2k+5}{3}\Rightarrow\left[\frac{4k+16}{9}\right]=k\Rightarrow k\in\{2,3\}\Rightarrow x\in\left\{3,\frac{11}{3}\right\}.$$

42. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2x+5}{12}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2}$.

Soluție

Utilizăm identitatea lui Hermite. Membrul stâng devine:

$$\left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2x-1}{12}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{2x-1}{12}\right]=\left[\frac{2x-1}{6}\right]$$

și $\left[\frac{2x-1}{6}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\left[\frac{2x-1}{6}\right]+\left[\frac{2x-1}{6}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{2x-1}{6}\right]=\left[\frac{2x-1}{3}\right]$.

Așadar, membrul stâng devine $\left[\frac{2x-1}{3}\right]$ și ecuația se reduce la

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2}=k\Rightarrow x=\frac{2k-1}{3},k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{4k-5}{9}\right]=k\Rightarrow k\in\{-2,-1\}\Rightarrow x\in\left\{-1,-\frac{5}{3}\right\}.$$

43. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{8x-9}{2}\right]+\left[\frac{20x-28}{6}+\frac{2x+2}{3}\right]=1999$.

Soluție

Avem: $\left[\frac{24x-27}{6}\right]+\left[\frac{24x-24}{6}\right]=1999$,

dar $\left[\frac{24x-27}{6}\right]+\left[\frac{24x-27}{6}+\frac{1}{2}\right]=1999$

și utilizând identitatea lui Hermite rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$\left[2\cdot\frac{24x-27}{6}\right]=1999\Rightarrow\left[\frac{24x-27}{3}\right]=1999\Rightarrow[8x-9]=1999$

$1999\le 8x-9<2000\Rightarrow 2008\le 8x\le 2009\Rightarrow x\in\left[\frac{2008}{8},\frac{2009}{8}\right)$.

Gh. Huţanu, O.J., 1999 Galaţi, R.G. nr. 16

44*. Să se rezolve ecuaţia: $\left[x+\frac{1}{2}\right]+[x]^2=[2x]+2$.

Soluţie

Utilizând identitatea lui Hermite rezultă: $[2x]-[x]+[x]^2=[2x]+2$

$[x]([x]-1)=2$ de unde rezultă $[x]\in\{2,-1\}\Rightarrow x\in[-1,0)\cup[2,3)$.

45. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left\{\frac{4x+1}{6}\right\}+x$.

Soluţie

Avem: $\left[\frac{4x-2}{6}\right]=\frac{4x+1}{6}-\left[\frac{4x+1}{6}\right]+x\Rightarrow$

$\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x-2}{6}+\frac{1}{2}\right]=\frac{10x+1}{6}\Rightarrow\left[\frac{4x-2}{3}\right]=\frac{10x+1}{6}=k\in\mathbb{Z}$ (1)

$\Rightarrow x=\frac{6k-1}{10}$ şi ecuaţia (1) devine $\left[\frac{4k-4}{5}\right]=k\Rightarrow k\le\frac{4k-4}{5}<k+1$

$\Rightarrow k\in\{-4,-5,-6,-7,-8\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{-49}{10},\frac{-43}{10},\frac{-37}{10},\frac{-31}{10},\frac{-25}{10}\right\}$.

Daniel Ianoşi, G.M. nr. 12 (S)

46*. Să se rezolve ecuaţia: $x-\{\sqrt{x}\}+\sqrt{x}-3[\sqrt{x}]-2\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]+3=0$.

Soluţie

Evident $x\ge 0$. Avem $x+[\sqrt{x}]-3[\sqrt{x}]-2\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]+3=0$

$\Rightarrow x+3-2\left([\sqrt{x}]+\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]\right)=0\Rightarrow x+3-2[2\sqrt{x}]=0$ (1)

(s-a aplicat identitatea lui Hermite). Notăm $\sqrt{x}=t$ şi atunci (1) devine $t^2-2[2t]+3=0\Rightarrow t^2\in\mathbb{N}^*, t^2$ impar.

Din $[2t]=\frac{t^2+3}{2}\le 2t\Rightarrow t^2-4t+3\le 0\Rightarrow t\in[1,3]$,

cum $t^2\in\mathbb{N}^*\Rightarrow t\in\{1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7},\sqrt{9}\}\Rightarrow x\in\{1,3,5,7,9\}$.

47*. Să se rezolve ecuaţia: $[x+|x|]=|x+[x]|$.

Soluţie

Rezultă că: $|x+[x]|\in\mathbb{Z}_+\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+[x]=2x\Leftrightarrow x\ge 0$

$x+|x|=0\Leftrightarrow x\le 0$. Evident $x=0$ este soluţie.

Fie $x<0\Rightarrow|x+[x]|=0\Rightarrow x+[x]=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}_-\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$,

contradicţie cu $x<0$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x > 0 \Rightarrow [2x] = |x + [x]| = x + [x]$.

Utilizând identitatea lui Hermite rezultă $\left[x + \frac{1}{2}\right] = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Aşadar, $x = k \geq 0, k \in \mathbb{N}$. Prin urmare, soluţiile sunt numere naturale.

§ 4. Utilizarea identităţii lui Hermite pentru cazurile $n \geq 3$. Ecuaţii

48. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{5x-2}{4}\right] + \left[\frac{15x-2}{12}\right] + \left[\frac{15x+2}{12}\right] = \frac{5x-3}{2}$.

Soluţie

$$\left[\frac{15x-6}{12}\right] + \left[\frac{15x-6}{12} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{15x-6}{12} + \frac{2}{3}\right] = \frac{5x-3}{2}$$

şi aplicând identitatea lui Hermite rezultă:

$$\left[3 \cdot \frac{15x-6}{12}\right] = \frac{5x-3}{2} = k \Rightarrow \left[\frac{15x-6}{4}\right] = \frac{5x-3}{2} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k+3}{5} \Rightarrow k \in \{-1,0\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right\}.$$

49. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right] + \left[\frac{2x+1}{3}\right] = \frac{8x-7}{6}$.

Soluţie

Utilizând identitatea lui Hermite membrul stâng devine:

$$\left[3 \cdot \frac{2x-1}{3}\right] = \frac{8x-7}{6} \Rightarrow [2x-1] = \frac{8x-7}{6}.$$

Se deduce uşor că $x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right\}$.

50*. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{2x+1}{5}\right] + \left[\frac{6x+8}{15}\right] + \left[\frac{13x+13}{15}\right] = 4x - 1$.

Soluţie

Avem: $\left[\frac{2x+1}{5}\right] + \left[\frac{2x+1}{5} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2x+1}{5} + \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{6x+3}{5}\right]$

şi ecuaţia devine $\left[\frac{6x+3}{5}\right] = 4x - 1$. Se obţine $x \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.

51. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{4x-1}{5}\right] + \left[\frac{12x+2}{15}\right] + \left[\frac{12x+7}{15}\right] = \frac{7x+2}{9}$.

Soluţie

Avem: $\frac{7x+2}{9} = \left[\frac{12x-3}{15}\right] + \left[\frac{12x-3}{15} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{12x-3}{15} + \frac{2}{3}\right] =$

$$= \left[3 \cdot \frac{12x-3}{15}\right] \Rightarrow \frac{7x+2}{9} = \left[\frac{12x-3}{5}\right] \Rightarrow x = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

52. Să se arate că: $\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{3}\right]=x+1, (\forall)\, x\in\mathbb{Z}$.

Soluţie

Evident $x+1\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$. Notând $x=k\in\mathbb{Z}$ egalitatea devine:

$\left[\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{k}{3}+\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]+1=k+1\Leftrightarrow\left[\frac{k}{3}\right]+\left[\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{k}{3}+\frac{2}{3}\right]=k=$

$=\left[3\cdot\frac{k}{3}\right]$, adică tocmai identitatea lui Hermite.

53**. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{x^3-x+2}{9}\right]+\left[\frac{x^3-x+5}{9}\right]+\left[\frac{x^3-x+8}{9}\right]=$

$=9-\frac{x}{3}$.

Soluţie

Din ecuaţia dată rezultă că $\frac{x}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=3k, k\in\mathbb{Z}$.

Utilizând identitatea lui Hermite:

$\left[\frac{x^3-x+2}{9}\right]+\left[\frac{x^3-x+2}{9}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{x^3-x+2}{9}+\frac{2}{3}\right]=$

$=\left[3\cdot\frac{x^3-x+2}{9}\right]=\left[\frac{x^3-x+2}{3}\right]=\left[\frac{x(x-1)(x+1)}{3}+\frac{2}{3}\right]=$

$=\frac{x(x-1)(x+1)}{3}$

$\left(\text{deoarece } x(x-1)(x+1)\vdots 3\Rightarrow\frac{x(x-1)(x+1)}{3}\in\mathbb{Z}\right)$.

Ecuaţia devine $\frac{x(x-1)(x+1)}{3}+\frac{x}{3}=9$, de unde rezultă $x=3$.

54*. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{[x+1]}{3}\right]+\left[\frac{[x+2]}{3}\right]+\left[\frac{[x+3]}{3}\right]=x+1$.

Soluţia 1

Utilizăm identitatea $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right], (\forall)\, x\in\mathbb{R}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ şi ecuaţia devine:

$\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{3}\right]=x+1\Rightarrow\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}+\frac{2}{3}\right]=$

$=x+1$ şi se aplică identitatea lui Hermite şi rezultă:

$\left[3\left(\frac{x+1}{3}\right)\right]=x+1\Rightarrow[x+1]=x+1\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$.

Soluţia 2

Evident $x\in\mathbb{Z}$. Considerăm $x=3k, x=3k+1, x=3k+2, k\in\mathbb{Z}$ care verifică, deci $x\in\mathbb{Z}$.

I. Ghica, N. Pavelescu, O.L. 1989

Scanned with OKEN Scanner

55. Să se rezolve ecuațiile: $\left[\frac{3x-1}{6}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{3x+1}{6}\right]=\frac{5(x+1)}{4}$.

Soluție

Aplicând identitatea lui Hermite, avem:

$\left[\frac{3x-1}{6}\right]+\left[\frac{3x-1}{6}+\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{3x-1}{6}+\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{3x-1}{2}\right]=\frac{5(x+1)}{4}=k\Rightarrow$

$x=\frac{4k}{5}-1\Rightarrow\left[\frac{12k-16}{10}\right]=k, k\in\{10,11,12,13,14\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left\{\frac{35}{5},\frac{39}{5},\frac{43}{5},\frac{47}{5},\frac{51}{5}\right\}$.

Radu Tătaru, R.M.G. nr. 34

56*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{1}{1-x}\right]+\left[\frac{4-x}{3(1-x)}\right]+\left[\frac{5-2x}{3(1-x)}\right]=\frac{3}{1-[x]}$.

Soluție

Se aplică identitatea lui Hermite:

$\left[\frac{1}{1-x}\right]+\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{1}{1-x}+\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{3}{1-x}\right]=\frac{3}{1-[x]}$.

Dar cum $1-[x]=-([x]-1)=-[x-1]\Rightarrow\left[\frac{3}{1-x}\right]\cdot[x-1]=-3$.

Se ivesc cazurile:

a) $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=1\\ [x-1]=-3\end{cases}$; c) $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=3\\ [x-1]=-1\end{cases}$;

b) $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=-1\\ [x-1]=3\end{cases}$; d) $\begin{cases}\left[\frac{3}{1-x}\right]=-3\\ [x-1]=1\end{cases}$.

Rezultă: a) $x\in[-2,-1)$; b) $x\in[4,5)$; c) $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$; d) $x\in\left[2,\frac{5}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow S=[-2,-1)\cup\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\left[2,\frac{5}{2}\right)\cup[4,5)$.

O.L. Galați, 2015

57.** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{3x^2+1}{3}\right]+\left[\frac{3x^2+2}{3}\right]=\left[\frac{2x^2+1}{2}\right]$.

Soluție

Utilizăm identitatea lui Hermite. Avem:

$[x^2]+\left[x^2+\frac{1}{3}\right]+\left[x^2+\frac{2}{3}\right]=[x^2]+\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow[3x^2]=[2x^2]$. Notăm

$x^2=y\Rightarrow[3y]=[2y]=n\in\mathbb{N}\Rightarrow 2y\in[n,n+1), 3y\in[n,n+1)\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow y \in \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \cap \left[\frac{n}{3}, \frac{n+1}{3}\right)$. Dacă $n \geq 2 \Rightarrow \frac{n+1}{3} < \frac{n}{2} \Rightarrow y \in \emptyset$.

Pentru $n = 0 \Rightarrow y \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x^2 \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Pentru $n = 1 \Rightarrow y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow x^2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Prin urmare, $x \in S = \left(\frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

58*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x-7}{4}\right] + \left[\frac{x-6}{4}\right] + \left[\frac{x-5}{4}\right] = -1$;

b) $\left[\frac{x-3}{4}\right] + \left[\frac{x-2}{4}\right] + \left[\frac{x-1}{4}\right] = 2$.

Soluție

a) Adunăm în ambii membri $\left[\frac{x-8}{4}\right]$ și se obține:

$$\left[\frac{x-8}{4}\right] + \left[\frac{x-8}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{x-8}{4} + \frac{2}{4}\right] + \left[\frac{x-8}{4} + \frac{3}{4}\right] = -1 + \left[\frac{x-8}{4}\right]$$

și aplicând identitatea lui Hermite rezultă:

$$\left[4 \cdot \frac{x-8}{4}\right] = -1 + \left[\frac{x-8}{4}\right] \Rightarrow [x-8] + 1 = \left[\frac{x-8}{4}\right] \Rightarrow [y] + 1 = \left[\frac{y}{4}\right].$$

Notăm $y = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și se obține: $k + 1 = \left[\frac{k+t}{4}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow k + 1 \leq \frac{k+t}{4} < k + 2 \Rightarrow 3k + 4 \leq t < 3k + 8 \Rightarrow k = -2,$$

deci $y = -2 + t \Rightarrow y \in [-2,-1) \Rightarrow x - 8 \in [-2,-1) \Rightarrow x \in [6,7) = S$.

b) Avem $\left[\frac{x-3}{4}\right] + \left[\frac{x-2}{4}\right] + \left[\frac{x-1}{4}\right] = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x-7}{4} + 1\right] + \left[\frac{x-6}{4} + 1\right] + \left[\frac{x-5}{4} + 1\right] = 2.$$ Rezultă:

$$\left[\frac{x-7}{4}\right] + \left[\frac{x-6}{4}\right] + \left[\frac{x-6}{4}\right] + 3 = 2 \Rightarrow \left[\frac{x-7}{4}\right] + \left[\frac{x-6}{4}\right] + \left[\frac{x-6}{4}\right] = -1.$$

S-a ajuns la ecuația de la punctul a) și prin urmare $x \in [6,7)$.

59*. Să se rezolve ecuația:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{5}\right] + \left[x + \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right] + \left[x + \frac{4}{5}\right] = 4x + 2.$$

Soluție

Utilizând identitatea lui Hermite ecuația devine:

Scanned with OKEN Scanner

$[5x] = 4x + 2 \Rightarrow x \in \left\{\frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}\right\}$.

60*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x+1}{2}\right] + \left[\frac{4x+1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{2^n x + 1}{2}\right] = 2003$,

unde $n \geq 11, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

Aplicând identitatea lui Hermite avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2^k x+1}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[2^{k-1}x + \frac{1}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n}[2^k x] - [2^{k-1}x] =$$

$= [2^n x] - [x] \Rightarrow [2^n x] = [x] + 2003 \quad (*)$.

$$2^n x - 1 < 2003 + x \Rightarrow 0 \leq x < \frac{2004}{2^n - 1} \leq \frac{2004}{2^{11} - 1} < 1$$

$\Rightarrow [x] = 0$ și relația $(*)$ devine $[2^n x] = 2003 \Rightarrow x \in \left[\frac{2003}{2^n}, \frac{2004}{2^n}\right) = S$.

Aurel Bârsan, O.L. Brașov, 2003

61**. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$\left[\frac{1}{3} + x\right] + \left[\frac{1}{3} + 3x\right] + \left[\frac{1}{3} + 9x\right] + \cdots + \left[\frac{1}{3} + 3^{n-1}x\right] + \left[\frac{2}{3} + x\right] +$$

$$+ \left[\frac{2}{3} + 3x\right] + \left[\frac{2}{3} + 9x\right] + \cdots + \left[\frac{2}{3} + 3^{n-1}x\right] = m - [x], \text{ unde } m \in \mathbb{N}^*, n \geq 10.$$

Soluție

Utilizăm identitatea lui Hermite:

$$[a] + \left[a + \frac{1}{3}\right] + \left[a + \frac{2}{3}\right] = [3a]$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{3} + 3^{k-1}x\right] + \left[\frac{2}{3} + 3^{k-1}x\right] = \sum_{k=1}^{n}[3^k x] - [3^{k-1}x] =$$

$= [3^n x] - [x] = m - [x] \Rightarrow [3^n x] = m$

$$\Rightarrow m \leq 3^n x < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{3^n} \leq x < \frac{m+1}{3^n}, x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right).$$

Mihai Totolici, R. Galați, 26

§ 5. Calculul unor sume

62**. Să se calculeze:

$$E_n = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^p}{2^{p+1}}\right], \text{ unde } n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție

Conform relației lui Hermite $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$ și atunci:

Scanned with OKEN Scanner

$$\sum_{k=0}^{p}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{p}\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{p}\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=[n]-\left[\frac{n}{2^{p+1}}\right]=$$

$$=n-\left[\frac{n}{2^{p+1}}\right].$$

63**. Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$\left[\frac{a+1}{2}\right]+\left[\frac{a+2}{4}\right]+\left[\frac{a+4}{8}\right]+\cdots+\left[\frac{a+2^{n-1}}{2^n}\right]=[a]-\left[\frac{a}{2^n}\right].$$

Soluție

Folosind identitatea lui Hermite, avem:

$$\left[\frac{a+2^{k-1}}{2^k}\right]=\left[\frac{a}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{a}{2^k}\right]-\left[\frac{a}{2^k}\right]=\left[\frac{a}{2^{k-1}}\right]-\left[\frac{a}{2^k}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a+2^{k-1}}{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{2^{k-1}}\right]-\left[\frac{a}{2^k}\right]=[a]-\left[\frac{a}{2^n}\right].$$

Jurnal Matematic

64**. Să se arate că:

$$[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]+\left[2a+\frac{1}{2}\right]+\left[2^2a+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[2^na+\frac{1}{2}\right]=[2^{n+1}a],\forall\, a\in\mathbb{R}.$$

Soluție

Utilizăm în mod repetat identitatea lui Hermite: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$.

Avem $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]\Rightarrow[2a]+\left[2a+\frac{1}{2}\right]=[2^2a]$

$\Rightarrow[2^2a]+\left[2^2a+\frac{1}{2}\right]=[2^3a]$ ș. a. m. d.

$\Rightarrow[2^na]+\left[2^na+\frac{1}{2}\right]=[2\cdot 2^na]=[2^{n+1}a]$.

65**. Să se arate că: $\left[a+\frac{1}{3}\right]+\left[a+\frac{2}{5}\right]+\left[3a+\frac{1}{3}\right]+\left[3a+\frac{2}{3}\right]+$

$$+\cdots+\left[3^na+\frac{1}{3}\right]+\left[3^na+\frac{2}{3}\right]=[3^{n+1}a]-[a],(\forall)\, a\in\mathbb{R}.$$

Soluție

Utilizăm identitatea lui Hermite: $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$.

Egalitatea se scrie: $\sum_{k=0}^{n}\left(\left[3^ka+\frac{1}{3}\right]+\left[3^ka+\frac{2}{3}\right]\right)=$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \sum_{k=0}^{n} [3^{k+1}a] - [3^k a] = [3^{n+1}a] - [a].$$

(Am folosit că $\left[3^k a + \frac{1}{3}\right] + \left[3^k a + \frac{2}{3}\right] = [3^{k+1}a] - [3^k a].$)

George Mihai, R.M.T., 2011

66.** Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 10$ și $x \in \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$\left[\frac{1}{3}+x\right] + \left[\frac{1}{3}+3x\right] + \left[\frac{1}{3}+9x\right] + \cdots + \left[\frac{1}{3}+3^{n-1}x\right] +$$
$$+ \left[\frac{2}{3}+x\right] + \left[\frac{2}{3}+3x\right] + \left[\frac{2}{3}+9x\right] + \cdots + \left[\frac{2}{3}+3^{n-1}x\right] = 2005 - [x].$$

Să se arate că $x \in [0,1)$.

Soluție

Aplicând identitatea lui Hermite pentru $n = 3$ avem

$$\left[\frac{1}{3}+x\right] + \left[\frac{2}{3}+x\right] = [3x] - [x],$$
$$\left[\frac{1}{3}+3x\right] + \left[\frac{2}{3}+3x\right] = [9x] - [3x]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[\frac{1}{3}+3^{n-1}x\right] + \left[\frac{2}{3}+3^{n-1}x\right] = [3^n x] - [3^{n-1}x].$$

Reducând termenii asemenea rezultă:

$S_n = [3^n x] - [x] = 2005 - [x] \Rightarrow [3^n x] = 2005 > 0 \Rightarrow x \geq 0$

și $3^n x < 2006 \Rightarrow x < \frac{2006}{3^n} \Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow x \leq \frac{2006}{3^{10}} \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in [0,1).$

Mihai Totolici, R.G. nr. 6

67.** Demonstrați identitatea: $\left\{\frac{m}{2n+1}\right\} + \left\{\frac{m+1}{2n+1}\right\} + \cdots + \left\{\frac{m+2n}{2n+1}\right\} = n.$

Soluție

$$\sum_{k=0}^{2n} \left\{\frac{m+k}{2n+1}\right\} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{m+k}{2n+1} - \left[\frac{m+k}{2n+1}\right]\right) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{m+k}{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{m+k}{2n+1}\right] =$$
$$= \frac{m + (m+1) + \cdots + (m+2n)}{2n+1} - \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{m}{2n+1} + \frac{k}{2n+1}\right] =$$
$$= m + n - m = n.$$

Deoarece $\sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{m}{2n+1} + \frac{k}{2n+1}\right] = \left[(2n+1)\frac{m}{2n+1}\right] = m.$

(Se aplică identitatea lui Hermite.)

Scanned with OKEN Scanner

68**. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ există un unic $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n-1} \left[a + \frac{k}{x}\right] + [a + (x-n)a] = [xa], \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Există $x = n$ care satisface ecuaţia, care se reduce la identitatea lui Hermite. Arătăm că pentru $x < n$ sau $x > n$ egalitatea nu poate avea loc.

Pentru $a = \frac{1}{x} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k+1}{x}\right] + \left[\frac{x-n+1}{x}\right] = 1 \quad (1)$.

Pentru $x > n \Rightarrow \left[\frac{k+1}{x}\right] = 0, (\forall)\, k = \overline{1, n-1}$ şi $\left[\frac{x-n+1}{x}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 1$, fals.

Pentru $x < n$ şi luăm $a = -\frac{1}{x} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k-1}{x}\right] + \left[\frac{x-n-1}{x}\right] = -1$, dar

$\left[\frac{k-1}{x}\right] \geq 0$ şi $\left[\frac{x-n-1}{x}\right] \geq 0$, fals.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

69**. Fie n un număr natural nenul şi:

$E_{(x)} = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$.

a) Arătaţi că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{x\} \leq \frac{1}{n}$ are loc egalitatea $[(n-1)x] + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] \quad (*)$

şi deduceţi că $E_{(x)} = [nx], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$ (identitatea lui Hermite).

b) Determinaţi toate numerele reale x pentru care este adevărată relaţia $(*)$.

Soluţie

a) Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Avem:

$[(n-1)(k+t)] + \left[k + t + \frac{n-1}{n}\right] = (n-1)k + [(n-1)t] + k +$

$+ \left[t + \frac{n-1}{n}\right] = nk + [(n-1)t] + \left[t + \frac{n-1}{n}\right] = \begin{cases} nk, & t < \frac{1}{n} \\ nk+1, & t = \frac{1}{n} \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar $[n(k+t)] = (nk) + [nt] = \begin{cases} nk & t < \frac{1}{n} \\ nk+1 & t = \frac{1}{n} \end{cases}$.

Aşadar, egalitatea $(*)$ este adevărată. Aplicând în mod repetat $(*)$ avem:

$$[nx] = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [(n-1)x] = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + \left[x + \frac{n-2}{n-1}\right] +$$

$$+[(n-2)x] = \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + \left[x + \frac{n-2}{n-1}\right] + \cdots + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [x],$$

adică identitatea lui Hermite pentru $\{x\} \leq \frac{1}{n}$.

Sau dacă se consideră funcția: $f(x) = [(n-1)x] + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$

care este periodică cu perioada $T = \frac{1}{n}$, deci $f(x) = 0, (\forall)\, x$ cu $\{x\} \leq \frac{1}{n}$

şi fiind periodică rezultă $f(x) = 0, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

b) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k, k + \frac{1}{2}\right)$.

70.** Să se rezolve ecuația:

$$\left(\left[\frac{x+1}{4}\right] + \left[\frac{x+4}{4^2}\right] + \left[\frac{x+4^2}{4^3}\right] + \cdots + \left[\frac{x+4^{n-1}}{4^n}\right]\right) +$$

$$+\left(\left[\left[\frac{x+2}{4}\right] + \left[\frac{x+2^3}{4^2}\right] + \left[\frac{x+2^5}{4^3}\right] + \cdots + \left[\frac{x+2^{2n-1}}{4^n}\right]\right]\right) +$$

$$+\left(\left[\left[\frac{x+3}{4}\right] + \left[\frac{x+3\cdot 4}{4^2}\right] + \left[\frac{x+3\cdot 4^2}{4^3}\right] + \cdots + \left[\frac{x+3\cdot 4^{n-1}}{4^n}\right]\right]\right) = [x] - 1.$$

Soluție

În identitatea lui Hermite

$$[z] + \left[z + \frac{1}{m}\right] + \left[z + \frac{2}{m}\right] + \cdots + \left[z + \frac{m-1}{m}\right] = [mz], (\forall)\, m \in \mathbb{N}^*, (\forall)\, z \in \mathbb{R}$$

punem $z = \frac{x}{4^k}, k \in \{1,2,\ldots,n\}$ şi $m = 4$ şi obţinem:

$$\left[\frac{x}{4^k} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{x}{4^k} + \frac{2}{4}\right] + \left[\frac{x}{4^k} + \frac{3}{4}\right] = \left[\frac{x}{4^{k-1}}\right] - \left[\frac{x}{4^n}\right], k \in \{1,2,\cdots,n\}.$$

Însumând după k de la 1 la n avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\left[\frac{x}{4^k} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{x}{4^k} + \frac{2}{4}\right] + \left[\frac{x}{4^k} + \frac{3}{4}\right] = [x] - \left[\frac{x}{4^k}\right]\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi ecuaţia devine: $[x]-\left[\frac{x}{4^n}\right]=[x]-1\Rightarrow\left[\frac{x}{4^n}\right]=1\Rightarrow x\in[4^n,2\cdot 4^n)$.

Gh. Lobonţ

71**. Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[a+\frac{1}{2n}\right]+\left[a+\frac{3}{2n}\right]+\left[a+\frac{5}{2n}\right]+\cdots+\left[a+\frac{2n-1}{2n}\right]=\left[na+\frac{1}{2}\right].$$

Soluţie

Se utilizează identitatea lui Hermite şi avem:

$$\left([a]+\left[a+\frac{1}{2n}\right]+\left[a+\frac{2}{2n}\right]+\cdots+\left[a+\frac{2n-1}{2n}\right]\right)-$$

$$-\left([a]+\left[a+\frac{2}{2n}\right]+\left[a+\frac{4}{2n}\right]+\cdots+\left[a+\frac{2n-2}{2n}\right]\right)=$$

$$=[2na]-\left([a]+\left[a+\frac{1}{n}\right]+\left[a+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[a+\frac{n-1}{n}\right]\right)=$$

$$=[2na]-[na]=\left[na+\frac{1}{2}\right].$$

72***. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in\mathbb{R}$ avem:

$$[x]^2+\left[x+\frac{1}{n}\right]^2+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]^2=[x]\cdot[nx]+[x+1]\cdot[n\{x\}].$$

Soluţie

Vom utiliza identitatea lui Hermite, dar cum:

$$\left[x+\frac{k}{n}\right]^2=\left[[x]+\{x\}+\frac{k}{n}\right]^2=\left[[x]+\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]\right]^2$$

avem $S=\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]^2=\sum_{k=0}^{n-1}\left([x]+\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]\right)^2=$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left([x]^2+2[x]\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]+\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]^2\right)=$$

$$=n[x]^2+2[x]\sum_{k=0}^{n-1}\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]^2=$$

$$=n[x]^2+2[x][n\{x\}]+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\{x\}+\frac{k}{n}\right]^2.$$

Notăm $[n\{x\}]=h\Rightarrow\frac{h}{n}\le\{x\}<\frac{h+1}{n}\Rightarrow$

$$[\{x\}]=\left[\{x\}+\frac{1}{n}\right]=\left[\{x\}+\frac{2}{n}\right]=\cdots=\left[\{x\}+\frac{n-h-1}{n}\right]=0$$

Scanned with OKEN Scanner

și $\left[\{x\}+\frac{n-h}{n}\right]=\left[\{x\}+\frac{n-h-1}{n}\right]=\cdots=\left[\{x\}+\frac{n-1}{n}\right]=1.$

Ținând seama că $h=[n\{x\}]=[n(x-[x])]=[nx]-n[x]$ rezultă că

$S=n[x]^2+2[x]h+h=[x](n[x]+[n\{x\}])+([x]+1)[n\{x\}]=$

$=[x]+[x+1][n\{x\}].$

73**. Să se demonstreze egalitatea:

a) $\left[a-\frac{1}{n}\right]+\left[a-\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[a-\frac{n-1}{n}\right]+\left[a-\frac{n}{n}\right]=$

$=[na]-n, (\forall)\, a\in\mathbb{R}, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*;$

b) $\left[\frac{a+1}{n}\right]+\left[\frac{a+2}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{a+mn}{n}\right]=[ma]+\frac{m(m+1)}{2}+$

$+\frac{m(m-1)(n-1)}{2}.$

Soluție

a) Facem substituția $a=x+1$, atunci suma:

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[a-\frac{k}{n}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[x+1-\frac{k}{n}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[x+\frac{n-k}{n}\right]=$

$=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]=[n(a-1)]=[na]-n.$

(Se aplică identitatea lui Hermite.)

b) $S_n=\left[\frac{x}{n}+k-1+\frac{1}{n}\right]+\left[\frac{x}{n}+k-1+\frac{2}{n}\right]+\cdots+$

$+\left[\frac{x}{n}+k-1+\frac{n-1}{n}\right]+\left[\frac{x}{n}+k\right]=(n-1)(k-1)+\left[\frac{x}{n}\right]+$

$+\left[\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}\right]+k=(n-1)(k-1)+k+\left[n\frac{x}{n}\right]=$

$=(n-1)(k-1)+[x]+k.$

Dar $S=\sum_{k=1}^{m}S_k=\sum_{k=1}^{m}(k-1)(n-1)+k+[x]=$

$=m[x]+\frac{m(m+1)}{2}+\frac{(n-1)m(m-1)}{2}.$

Gh. Andrei

74**. Să se demonstreze că: $[x]=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2}\right].$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie

Utilizăm identitatea lui Hermite, adică: $\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]-[a]$ şi atunci

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\frac{x}{2^{k+1}}\right]-\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x}{2^k}\right]-\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(T_k-T_{k+1})=[x]$$ se ţine seamă că $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x}{2^n}\right]=0.$

I.M.O. 1968

75**. Să se arate că:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\cdots+\cdots\ldots\ldots \quad =n,(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Soluţie:

Aplicăm identitatea lui Hermite:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]\Leftrightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$$

$$\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=$$

$$=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]-\left[\frac{n}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]=[n]=n$$

$\left(\text{pentru } 2^k>n\Leftrightarrow k>log_2 n\text{, termenii } \left[\frac{n}{2^k}\right] \text{ sunt nuli}\right).$

Olimpiadă Anglia

76**. Fie $m\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Să se arate că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ există $n\in\mathbb{N}^*$,

astfel încât: $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{x+im^{k-1}}{m^k}\right]=\begin{cases}[x], & x\geq 0\\ [x]+1, & x<0\end{cases}$

Soluţie:

În baza identităţii lui Hermite, avem:

$[mx]-[x]=\sum_{i=1}^{m-1}\left[x+\frac{i}{m}\right],(\forall)\ x\in\mathbb{R},(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$şi cu substituţia $x\to\frac{x}{m^k}$,

obţinem $\left[\frac{x}{m^{k-1}}\right]-\left[\frac{x}{m^k}\right]=\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{x+im^{k-1}}{m^k}\right]$ (1).

Însumând în (1) rezultă $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{m^{k-1}}\right]-\left[\frac{x}{m^k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{x+im^{k-1}}{m^k}\right]\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{x+im^{k-1}}{m^k}\right]=[x]-\left[\frac{x}{m^n}\right],(\forall)\,x\in\mathbb{R},(\forall)\,n\in\mathbb{N}^*\quad(2).$$

Este evident că oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $|x|<m^n$

$$\Rightarrow 0\le\frac{|x|}{m^n}<1\Rightarrow\left[\frac{x}{m^n}\right]=\begin{cases}0, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

și atunci rezultă egalitatea din enunț.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 5

Partea întreagă şi partea fracţionară a unor expresii cu radicali

§ 1.

1. Să se arate că:

a) $\left[\sqrt{n^2+n}\right]=\left[\sqrt{n^2+n+1}\right]=\left[\sqrt{n^2+n+2}\right]=n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$;

b) $\left[\sqrt{n^2+3n}\right]=\left[\sqrt{n^2+3n+1}\right]=\left[\sqrt{n^2+3n+2}\right]=$
$=\left[\sqrt{n^2+3n+3}\right]=\left[\sqrt{n^2+3n+4}\right]=n+1, (\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$. Să se calculeze $[f(x)]$.

3. Să se arate că: $\sqrt{n^2+m}=n+\left\{\sqrt{n^2+m}\right\}, (\forall)\ n\in\mathbb{N}$ şi $1\le m\le 2n$.

4. Să se arate că $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}\right]+\left[\sqrt{n^2-n+1}\right]=\left[\sqrt{4n^2-3}\right]=2n-1.$$

5. Calculaţi $E_n=\left[\sqrt{n^2+n}\right]+\left[\sqrt{n^2+5}\right]$, unde $n\in\mathbb{N}$.

6. Să se arate că: $\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right]=\left[\sqrt{4n^2+3}\right], \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.

7. Să se calculeze partea întreagă a următoarelor numere:

a) $a_n=\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2, (\forall)\ n\ge 3$;

b) $b_n=\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+10}\right)^2, (\forall)\ n\ge 5$;

c) $c_n=\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2, (\forall)\ n\ge 3$.

8. Să se demonstreze identitatea pentru $n\in\mathbb{N}^*$: $\left[\sqrt{2n^2-1}\right]=\left[n\sqrt{2}\right]$.

9. Să se demonstreze identitatea pentru $n\in\mathbb{N}^*$: $\left[\sqrt{3n+1}\right]=\left[\sqrt{3n+2}\right]$.

10. Să se determine partea întreagă a următoarelor şiruri, unde $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $a_n=\sqrt{n(n+1)}$;

b) $b_n=\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}$;

c) $c_n=\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

d) $d_n=\sqrt{(n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Scanned with OKEN Scanner

11. Fie: $a_n = \sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1}-\sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right)$;

$$b_n = \sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\left(\sqrt{\sqrt{n+1}+1}+\sqrt{\sqrt{n+1}-1}\right).$$

Să se determine $[a_n]$, $[b_n]$ și $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

12. Să se arate că: $\left[\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{3}\right] = [\sqrt{n}]$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

13. Să se arate că:

$$[\sqrt{4n+5}] = [\sqrt{4n+6}] = [\sqrt{4n+7}].$$

14. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că partea întreagă a lui:

$$a_n = \sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \text{ este 2.}$$

15. Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru ca:

$$[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}], n \in \mathbb{N}^*.$$

16. Fie $A = \{n \in \mathbb{N}^* | [\sqrt{n+2}] = [\sqrt{n}]\}$. Se cere card A. Pentru ce n, card $A = 2017$?

17. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că numărul: $\left[\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)^2\right]$ nu poate fi pătrat perfect.

18*. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care are loc egalitatea:

$$2m[n\sqrt{m^2+1}] = n[2m\sqrt{m^2+1}], \text{ unde } m \in \mathbb{N}^*.$$

19. Fie $a_n = \left(\sqrt{n-1}+2\sqrt{n+3}\right)^2$. Să se determine partea întreagă a lui a_n.

20. Să se determine partea întreagă a șirului:

$$x_n = \sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*;$$

$$y_n = \sqrt[5]{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

21.** Să se arate că există $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$, astfel încât pentru orice $n \geq m$ să avem egalitatea: $\left[\left(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2\right] = 16n-1$.

§ 2.

22.** Determinați partea întreagă a expresiilor:

a) $E_{(n)} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2$;

b) $F_n = \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n-1}\right)^3$;

c) $G_n = \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n-1}\right)^n$.

23.** Fie $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Să se calculeze partea întreagă:

$$E_n = \left(\sqrt[n]{n+2}-\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n}\right)^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

24.** Să se calculeze $\left[\left(\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{5}^{n}\right)\right]$.

25.** Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a \in \mathbb{N}, a_n = \left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a+1}+\sqrt[n]{a+2}\right)^n$.
Să se calculeze $[a_n]$.

26.** Să se arate că : $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]=n,$
unde $n \in \mathbb{N}^*$.

27.** a) Determinaţi numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

$$\frac{n+2010}{[\sqrt{n+1}]} \text{ şi } \frac{n+2011}{[\sqrt{n}]} \text{ sunt numere naturale.}$$

b) Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care:

$$\frac{n+2014}{[\sqrt{n}]} \text{ şi } \frac{n+2013}{[\sqrt{n+1}]} \text{ sunt numere naturale.}$$

c) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

$$\frac{n^2+2014n+2015}{[\sqrt{n^2+n}]} \text{ şi } \frac{n^2+2015n+2016}{[\sqrt{n^2+n+1}]} \text{ sunt numere naturale.}$$

28.** Să se arate că $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2-n}\right]+\left[\sqrt{n^2+n}\right]=\left[\sqrt{4n^2-1}\right]=\left[\sqrt{4n^2-2}\right]=\left[\sqrt{4n^2-3}\right]=$$
$$=2n-1.$$

29.** Să se arate că $\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$.

30.** Să se demonstreze că: $\left[\sqrt{3n^2-2}\right]=\left[\sqrt{3n^2-1}\right]=\left[\sqrt{3n^2}\right]$,
$(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

31.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right].$$

32.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right].$$

33.** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:

a) $\left[\sqrt{3n+1}\right]=\left[\sqrt{3n+2}\right]$;

b) $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$;

c) $\left[\sqrt{5n+2}\right]=\left[\sqrt{5n+3}\right]$.

34.** Să se demonstreze identităţile:

a) $\left[\sqrt{7n+1}\right]=\left[\sqrt{7n+3}\right]$;

b) $\left[\sqrt{7n+4}\right]=\left[\sqrt{7n+5}\right]=\left[\sqrt{7n+6}\right]$;

c) $\left[\sqrt{7n^2-3}\right]=\left[\sqrt{7n^2-2}\right]=\left[\sqrt{7n^2-1}\right]=\left[\sqrt{7n^2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

35.** Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$ pentru care sunt adevărate egalitățile:

a) $[\sqrt{16n+4}] = [\sqrt{16n+5}] = \cdots = [\sqrt{16n+4+a}]$;

b) $[\sqrt{16n+20}] = [\sqrt{16n+21}] = \cdots = [\sqrt{16n+20+a}]$.

36.** Să se demonstreze identitatea pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[\sqrt[3]{9n+1}] = [\sqrt[3]{9n+2}] = [\sqrt[3]{9n+3}] = [\sqrt[3]{9n+4}] =$$
$$= [\sqrt[3]{9n+5}] = [\sqrt[3]{9n+6}] = [\sqrt[3]{9n+7}], (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

37.** Să se arate că $[\sqrt[3]{9n+1}] = [\sqrt[3]{9n+7}] = [\sqrt[3]{9n+8}]$.

38.** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ au loc egalitățile:

a) $[\sqrt[3]{7n+1}] = [\sqrt[3]{7n+2}] = [\sqrt[3]{7n+3}] = [\sqrt[3]{7n+4}] = [\sqrt[3]{7n+5}]$;

b) $[\sqrt[4]{4n+1}] = [\sqrt[4]{4n+2}] = [\sqrt[4]{4n+3}]$.

39.** Fie $a \in \mathbb{N}, a \geq 3$. Să se arate că:

$[\sqrt{an+1}] = [\sqrt{an+2}] = \cdots = [\sqrt{an+a-1}], (\forall)n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in \{3,4\}$.

40.** Să se arate că $[\sqrt[3]{8n+3}] = [\sqrt[3]{8n+4}], (\forall)\, n \in \mathbb{Z}$.

41.** Să se arate că $[\sqrt{9n+7}] = [\sqrt{9n+8}]$ oricare ar fi n natural.

§ 3.

42.** Să se arate că: $[\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}] = [\sqrt{4n-1}], (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

43.** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}] = [\sqrt{4n^2-1}] = 2n-1.$$

44.** Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $m^2 \leq 2n-1$, atunci:

$$[\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}] = [\sqrt{4n-1}] = [\sqrt{4n-2}].$$

45*.** Să se arate că:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}] = [\sqrt{16n+20}], (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

46*.** Să se arate că:

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}] = [\sqrt{16n+23}], (\forall)n \in \mathbb{N}.$$

47*.** Să se arate că: $[\sqrt{n}+\sqrt{n+3}] = [\sqrt{4n+6}], (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$.

48*.** Să se demonstreze identitatea:

a) $[\sqrt{n}+\sqrt{n+3}+\sqrt{n+6}] = [\sqrt{9n+26}], (\forall)n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

b) $[\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}] = [\sqrt{9n+17}], (\forall)n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

49*.** Fie $E_n = \sqrt{n^2+\frac{n}{3}} + \sqrt{n^2+\frac{2n}{3}+\sqrt{n^2+n}}$. Să se determine $[E_n]$.

Scanned with OKEN Scanner

50*. Fie $E_n = \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} - 3n$.
Să se arate că: $[E_n] + 1 = \left[E_n + \frac{1}{2}\right], (\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

51*. Fie S_n o sumă de radicali de ordin $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
Să demonstrăm următoarea egalitate:

$$[S_{(n)}] = [\sqrt[m]{an+b}], \text{ unde } a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^* - \{1\} \text{ şi } (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

52*. Să se arate că: $[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1}] = [\sqrt[3]{8n+3}]$.

53*. Să se demonstreze identitatea:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{9n+8}], (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

54*. a) Să se determine valorile parametrului a pentru care să aibă loc egalitatea pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$: $[\sqrt{n} + \sqrt{n+a}] = [\sqrt{4n+1}]$.

b) Să se determine perechile (a, b) de numere naturale nenule, pentru care are loc egalitatea:

$$[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = [\sqrt{an+b}], \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

55*. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$\left[\sqrt{n+a} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

56*. Să se arate că egalitatea

$$1 + [\sqrt{n}] + [-\sqrt{n}] = [1 - \{\sqrt{n}\}] = [\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1}] =$$
$$= [2\sqrt{n}] - [\sqrt{4n-1}] = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}].$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţii

5 Partea întreagă şi partea fracţionară a unor expresii cu radicali

§ 1.

1. a) $n^2 < n^2 + n + p < n^2 + 2n + 1, p \in \{0,1,2\}$;

b) $(n+1)^2 < n^2 + 3n + p < n^2 + 4n + 4, p \in \{0,1,2,3,4\}$.

2. Avem: $|f(x)| = \dfrac{2|x|}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} \in [0,1)$

$2|x| < \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$

$4x^2 \le 2(x^2+1) + 2\sqrt{(x^2+1)^2 - x^2}, \quad x^2 = y \ge 0$

$y - 1 \le \sqrt{(x^2+1)^2 - y} \Leftrightarrow y - 1 \le \sqrt{y^2+y+1}$

care este adevărată $(\forall)\, y \ge 0$ deci $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Aşadar, $[f(x)] = 0, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

G.M. nr. 11/2006

3. Avem: $n^2 < n^2 + m < (n+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n < \sqrt{n^2+m} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+m}\right] = n$ deci $\sqrt{n^2+m} =$

$= n + \left\{\sqrt{n^2+m}\right\}$.

4. Avem: $n - 1 < \sqrt{n^2-n+1} < n \Rightarrow \left[\sqrt{n^2-n+1}\right] = n-1$

şi $n < \sqrt{n^2+n+1} < n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+n+1}\right] = n$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2-n+1}\right] + \left[\sqrt{n^2+n+1}\right] = 2n-1.$

Avem şi $2n - 1 \le \sqrt{4n^2-3} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2-3}\right] = 2n-1.$

Marian Ursărescu, G.M. nr. 9/1998

5. Avem, pentru $n = 0 \Rightarrow E_0 = 3$, pentru $n = 1 \Rightarrow E_1 = 3$ şi pentru $n = 2 \Rightarrow E_2 = 5$. Pentru $n \ge 3$ rezultă:

$n < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+5} < n+1 \Rightarrow E_n = 2n \qquad E_n = \begin{cases} 3, & n \in \{0,1\} \\ 5, & n = 2 \\ 2n, & n \ge 3 \end{cases}.$

6. <u>Soluţia 1</u>

Avem $4n^2 < 4n^2 + 3 < 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow 2n < \sqrt{4n^2+3} < 2n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{4n^2+3}\right] = 2n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$

Arătăm că: $2n < \sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2-n+1} < 2n+1 \Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow 2n < \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}} < 2n+1.$

Într-adevăr, $1 < \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$ și inegalitatea din stânga este evidentă.

Avem $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{n^2+n+1} < n+1$

și $n-1 < \sqrt{n^2-n+1} < n \Rightarrow 2n < \sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1} < 2n+1$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right] = 2n$

deoarece se arată ușor că $2n < \sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}$.

Soluția 2

Avem $n-\dfrac{1}{2} < \sqrt{n^2-n+1} \le n$ și $n+\dfrac{1}{2} < \sqrt{n^2+n+1} < n+1 \Rightarrow$

$2n < \sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1} < 2n+1$

și $2n < \sqrt{4n^2+3} < 2n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right] = \left[\sqrt{4n^2+3}\right]$.

Marian Ursărescu, G.M. nr. 9/1998

7. a) Avem $a_n = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$ și $2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$

$\Rightarrow 4n+1 < a_n < 4n+2 \Rightarrow [a_n] = 2n+1.$

b) $b_n = 2n+11+2\sqrt{(n+1)(n+10)}$ și

$2n+10 < 2\sqrt{(n+1)(n+10)} < 2n+11$

$\Rightarrow 4n+21 < b_n < 4n+22 \Rightarrow [b_n] = 4n+21.$

c) Avem $a+b < \sqrt{2(a^2+b^2)} \Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1}$ și

$c_n = \sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} < 3\sqrt{n+1}.$

Din inegalitatea mediilor avem:

$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} > 3\sqrt[6]{n(n+1)(n+2)} > \sqrt{9n+8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9n+8 < c_n < 9n+9 \Rightarrow [c_n] = 9n+8.$

8. Avem $k^2 \le 2n^2-1 < 2n^2 < (n+1)^2$ (unde $2n^2$ nu poate fi pătrat perfect)

$\Rightarrow k \le \sqrt{2n^2-1} < n\sqrt{2} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{2n^2-1}\right] = [n\sqrt{2}].$

9. Întrucât $3n+2$ nu este pătrat perfect, avem:

$k^2 \le 3n+1 < 3n+2 < (k+1)^2 \Rightarrow$

$k \le \sqrt{3n+1} < \sqrt{3n+2} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right].$

10. a) Evident $n < \sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow [a_n] = n.$

b) Avem $\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)} < \dfrac{3n+3}{3} = n+1$

și evident $n < b_n < n+1 \Rightarrow [b_n] = n.$

Scanned with OKEN Scanner

c) Aplicând inegalitatea mediilor avem:

$\sqrt[4]{n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{4n+6}{4} = n+\frac{3}{2} < n+2$

și se verifică ușor că $n+1 < c_n$, deci $n+1 < c_n < n+2 \Rightarrow [c_n] = n+1$.

d) Notăm $m = n^2+3n \Rightarrow d_n = \sqrt{m(m+2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow m < \sqrt{m(m+2)} < m+1 \Rightarrow [d_n] = m = n^2+3n$.

11. Evident $a_n > 0, b_n > 0$.

$a_n^2 = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 2 \Rightarrow a_n = \sqrt{2}$

$\Rightarrow a_n = 1+\sqrt{2}-1 \Rightarrow [a_n] = 1$ și $\{a_n\} = \sqrt{2}-1$.

Analog $b_n^2 = 2 \Rightarrow [b_n] = 1$, $\{b_n\} = \sqrt{2}-1$ (de remarcat că $a_n = b_n$).

12. Fie $a = \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{3}$ și cum $a > \sqrt{n} \Rightarrow [a] \geq [\sqrt{n}]$.

Din $\sqrt{n}+\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1} \Rightarrow a < \sqrt{n+1} \Rightarrow [a] < a < \sqrt{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow [a]^2 < n+1 \Rightarrow [a]^2 \leq n \Rightarrow [a] \leq \sqrt{n}$ deci $[a] = [\sqrt{n}]$.

13. Dacă notăm $[\sqrt{4n+6}] = k \Rightarrow k < \sqrt{4n+6} < k+1 \Rightarrow k^2 < 4n+6 <$

$< (k+1)^2$ $(*) \Rightarrow k^2 < k^2+1 \leq 4n+7 < (k+1)^2+1 \Rightarrow k^2 < 4n+7 <$

$< (k+1)^2$ (deoarece $4n+7$ nu poate fi pătrat perfect) $\Rightarrow k < \sqrt{4n+7} <$

$< k+1 \Rightarrow [\sqrt{4n+7}] = k$.

Din $(*)$ rezultă $k^2-1 < 4n+5 < (k+1)^2-1$, $(**) \Rightarrow k^2 \leq 4n+5 <$

$< (k+1)^2-1 < (k+1)^2 \Rightarrow k \leq \sqrt{4n+5} < k+1 \Leftrightarrow [\sqrt{4n+5}] = k$.

Gh. Andrei

14. Cum $[a_n] = 2 \Rightarrow 2 \leq a_n < 3 \Rightarrow 4 \leq a_n^2 < 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{n+1} < \frac{7}{2} \Rightarrow 0 \leq n < \frac{45}{4} \Rightarrow n \in \{0,1,2,\ldots,10,11\}$.

Liviu Pârsan, G.M. nr. 7-8/2004

15. Evident $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] \Leftrightarrow n$ pătrat perfect.

16. Notăm $[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+2}] = k \Rightarrow k \leq \sqrt{n} < k+1 \Rightarrow k^2 \leq n <$

$< (k+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \leq \sqrt{n+2} < k+1 \Rightarrow k^2 \leq n+2 < (k+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} n \in \{k^2, k^2+1, \cdots, k^2+2k\} \\ n \in \{k^2-2, k^2-1, k^2, k^2+1, \cdots, k^2+2k-2\} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{k^2, k^2+1, \cdots, k^2+2k-2\} = A_k$, dar card $A_k = 2k-1$.

Deoarece card $A = 2017 \Rightarrow 2017 = 2k-1 \Rightarrow k = 1008$

$[\sqrt{n+2}] = [\sqrt{n}] = 1008$.

Artur Bălăucă, Concursul „Marian Țarină", 2013

Scanned with OKEN Scanner

17. Avem: $2\sqrt{2n-1} < \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1} < 2\sqrt{2n} \Rightarrow$
$\Rightarrow 8n-4 < \left(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}\right)^2 < 8n.$
Așadar, numărul din enunț poate fi $8n-1, 8n-2, 8n-3$ deci nu poate fi pătrat perfect.

Ion Cucurezeanu

18*. Evident, $\left[2m\sqrt{m^2+1}\right] = 2m^2$ și egalitatea devine:
$\left[n\sqrt{m^2+1}\right] = mn$ adevărată pentru $n \in \{1,2,\cdots,2m\} \Rightarrow$
$mn < n\sqrt{m^2+1} < n\left(m + \frac{1}{2m}\right) = mn + \frac{n}{2m}$ pentru $n \in \{1,2,\ldots,2m\}$.

Concurs Universitatea Lomonosov, 2008

19. Avem: $a_n = 5n + 11 + 4\sqrt{n^2+2n-3}$ și $n + \frac{3}{4} < \sqrt{n^2+2n-3} <$
$< n+1$ care este adevărată $(\forall)\ n \geq 8 \Rightarrow 4n+3 < 4\sqrt{n^2+2n-3} <$
$< 4n+4$ $(*)$
$\Rightarrow [a_n] = \left[5n+11+4\sqrt{n^2+2n-3}\right] = 5n+11+\left[4\sqrt{n^2+2n-3}\right],$
dar din $(*)$ rezultă $\left[4\sqrt{n^2+2n-3}\right] = 4n+3 \Rightarrow$
$\Rightarrow [a_n] = 5n+11+4n+3 = 9n+14, (\forall)\ n \geq 7.$

Prin urmare, rezultă: $[a_n] = \begin{cases} 16, & n=1 \\ 29, & n=2 \\ 39, & n=3 \\ 49, & n=4. \\ 58, & n=5 \\ 67, & n=6 \\ 9n+14, & n \geq 7 \end{cases}$

G.M. nr. 12/1999

20. a) Notăm $(n+1)(n+6) = n^2+7n+6 = m \Rightarrow$
$(n+3)(n+4) = n^2+7n+12 = m+6,$
$(n+2)(n+5) = n^2+7n+10 = m+4$
$n(n+7) = n^2+7n = m-6$
atunci $x_n = \sqrt[4]{m(m+n)(m^2-36)}$, unde
$m^4 < m(m+n)(m^2-36) < (m+1)^4, (\forall)\ m \geq 12$
$\Rightarrow [x_n] = m = n^2+7n+6$ pentru $m \geq 12$, adică pentru
$n^2+7n-6 > 0, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$

b) Aplicând inegalitatea mediilor rezultă:
$y_n < \frac{5n+10}{5} = n+2$ și evident $n+1 < y_n$
$\Rightarrow n+1 < y_n < n+2 \Rightarrow [y_n] = n+1, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$

Liviu Pârsan, G.M. nr. 5/1987

Scanned with OKEN Scanner

21**. Utilizând inegalitatea $a+b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$:
$\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n^2-4} < n$ şi
$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} < 2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n^2-1} < n \Rightarrow$
$\sqrt{n-2}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1} < 4\sqrt{n} \Rightarrow$
$\left(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2 < 16n$
şi prin inducţie $16n-1 < \left(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$
$\Rightarrow \left[\left(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2\right] = 16n-1.$
(Vezi lucrarea *Radicali* pp. 203-204.)

§ 2.

22**. a) Se verifică uşor că:
$\sqrt{n-1} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\sqrt{n-1} < \sqrt{n} \Rightarrow n-1 < E_n < n \Rightarrow [E_n] = n-1.$

b) Funcţia radical este concavă deci: $\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1} < 2\sqrt[3]{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[3]{n-1} < \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n-1} < \sqrt[3]{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow n-1 < F_n < n \Rightarrow [F_n] = n-1.$

c) Din concavitatea funcţiei radical rezultă:
$\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n-1} < 2\sqrt[n]{n} \Rightarrow \sqrt[n]{n-1} < \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n-1} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow n-1 < G_n < n \Rightarrow [G_n] = n-1.$

23**. Cum funcţia radical este concavă, rezultă:
$\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n+2} < 2\sqrt[n]{n+1} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{n+2}-\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n}\right)^n < n+1,$
dar cum $\left(\sqrt[n]{n+2}-\sqrt[n]{n+1}+\sqrt[n]{n}\right)^n > \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n \Rightarrow [E_n] = n.$

24**. Arătăm $5 < \left(\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{5}\right)^n < 6 \Rightarrow \left[\left(\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{5}\right)^n\right] = 5.$
Într-adevăr avem $\sqrt[n]{5} < \sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{5}$, adevărată şi
$\sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{6}+\sqrt[n]{5} < \sqrt[n]{6} \Leftrightarrow \sqrt[n]{7}-\sqrt[n]{6} < \sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{5}$
şi cum funcţia $f(x) = \sqrt[n]{x+1}-\sqrt[n]{x}$ este descrescătoare şi $f(6) < f(5)$.

Cristinel Mortici

25**. Avem $a < a_n < a+1$, pentru că $\sqrt[n]{a+1}-\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a+2}-$
$-\sqrt[n]{a+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{(a+1)^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{a^{n-1}}}} > \frac{1}{\sqrt[n]{(a+2)^{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{(a+1)^{n-1}}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow [a_n] = a.$

G.M. nr. 7-8/2002

Scanned with OKEN Scanner

26**. Egalitatea se mai scrie: $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+1\right)\right]=$

$=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]\right]=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\right]\right]$.

Avem $\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)-1<\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\right]<\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right.$

$\left(\text{avem inegalitate strict şi în dreapta, deoarece } \frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\notin\mathbb{N}\right)$

$n+2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\right]<n+1$

$n<n+\frac{5-\sqrt{5}}{2}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1)\right]<n+1,$

de unde obţinem rezultatul.

27**. a) Notăm $[\sqrt{n}]=k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow k\leq\sqrt{n}<k+1\Leftrightarrow$

$k^2\leq n<k^2+2k+1\Rightarrow n\in\{k^2,k^2+1,+\cdots+k^2+2k\}.$

Dacă $n\in\{k^2,k^2+1,+\cdots+k^2+2k-1\}\Rightarrow[\sqrt{n}]=[\sqrt{n+1}]=k$

şi $\frac{n+2010}{k},\frac{n+2011}{k}$ sunt numere naturale dacă:

$k|n+2010$ şi $k|n+2010\Rightarrow k=1\Rightarrow n\in\{1,2\}.$

Dacă $n=k^2+2k\Rightarrow[\sqrt{n}]=k,[\sqrt{n+1}]=k+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{n+2010}{[\sqrt{n+1}]}=\frac{k^2+2k+2010}{k+1}=\frac{(k+1)^2+2009}{k+1}=k+1+\frac{2009}{k+1}$

şi $\frac{n+2011}{[\sqrt{n}]}=\frac{k^2+2k+1}{k}=k+2+\frac{2011}{k}\Rightarrow k+1|2009$

şi $k|2011$, imposibil (deoarece $k,k+1$ sunt de parităţi diferite, iar 2009 şi 2011 sunt impare).

Lucian Drăgoiu, G.M. nr. 12/2011

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi dacă $[\sqrt{n}]=k\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow k\leq\sqrt{n}<k+1\Rightarrow n\in\{k^2,k^2+1,k^2+2+\cdots+k^2+2k-1,k^2+2k\}.$

Distingem cazurile:

1. $n\in\{k^2,k^2+1,k^2+2,\cdots,k^2+2k-1\}\Rightarrow[\sqrt{n}]=[\sqrt{n+1}]=k,$ singurul divizor comun al numerelor consecutive $n+2013,n+2014$ este 1 deci $k=1\Rightarrow n\in\{1,2\}.$

2. Dacă $n=k^2+2k\Rightarrow[\sqrt{n}]=k,[\sqrt{n+1}]=k+1.$

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\frac{n+2014}{[\sqrt{n}]}=\frac{k^2+2k+2014}{k}=k+2+\frac{2014}{k}$

și $\frac{n+2013}{[\sqrt{n+1}]}=\frac{k^2+2k+2013}{k+1}=k+1+\frac{2012}{k+1}\Rightarrow k|2014$

și $k+1|2012\Rightarrow k=1\Rightarrow n=3$.

Lucian Dragomir, G.M. nr. 1/2015

c) Analog.

M. Bencze

28.** Avem $n-1<\sqrt{n^2-n}<n$ și $n<\sqrt{n^2+n}<n+1$

$\Rightarrow [\sqrt{n^2-n}]+[\sqrt{n^2+n}]=2n-1$ și $[\sqrt{4n^2-1}]=2n-1$ întrucât

$2n-1<\sqrt{4n^2-1}<2n, (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ ș.a.m.d.

și evident $[\sqrt{4n^2-2}]=[\sqrt{4n^2-3}]=2n-1$.

29.** Fie $[\sqrt{4n+2}]=k\Rightarrow k\leq\sqrt{4n+2}<k+1\Rightarrow k^2\leq 4n+2<$

$<(k+1)^2$

$\Rightarrow k^2+1\leq 4n+3<(k+1)^2+1\Rightarrow k^2\leq 4n+3\leq(k+1)^2$,

dar cum $4n+3$ și $4n+2$ nu pot fi pătrate perfecte, rezultă:

$k^2<4n+3<(k+1)^2\Rightarrow k<\sqrt{4n+3}<k+1$

$\Rightarrow [\sqrt{4n+3}]=k$, deci $[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$.

Putnam 1948, Austria 1984

30.** Cum $3n^2$ nu este pătrat perfect:

$k^2\leq 3n^2-2<3n^2-1<3n^2<(k+1)^2\Rightarrow k\leq\sqrt{3n^2-2}<\sqrt{3n^2-1}<$

$<\sqrt{3n^2}<k+1\Rightarrow [\sqrt{3n^2-2}]=[\sqrt{3n^2-1}]=[\sqrt{3n^2}]$.

31.** Fie $a_n=\sqrt{4n+1}, b_n=\sqrt{4n+2}, c_n=\sqrt{4n+3}$

$\Rightarrow a_n\leq b_n\leq c_n\Rightarrow [a_n]\leq[b_n]\leq[c_n]$.

Fie $k\leq\sqrt{4n+1}<k+1\Rightarrow [a_n]=k$, dar din

$k^2\leq 4n+1<(k+1)^2\Rightarrow k^2+1\leq 4n+2<(k+1)^2+1\Rightarrow$

$\Rightarrow k^2+1\leq 4n+2\leq(k+1)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow k<\sqrt{k^2+1}<\sqrt{4n+2}<k+1\Rightarrow [4n+2]=k$ (1).

(Întrucât restul împărțirii unui pătrat perfect la 4 nu poate fi decât 0 sau 1.)

Analog și $[\sqrt{4n+2}]=k\Rightarrow k<\sqrt{4n+2}<k+1$

$\Rightarrow k^2<4n+2<(k+1)^2\Rightarrow k^2<k^2+1<4n+3\leq(k+1)^2$

$\Rightarrow k<\sqrt{k^2+1}<\sqrt{4n+3}<k+1\Rightarrow [\sqrt{4n+3}]=k$.

Prima egalitate Putnam 1948, a doua inegalitate Austria 1984

Scanned with OKEN Scanner

32.** Soluția 1 *(Gh. Andrei)*

Notăm $a_n = \sqrt{4n+1}, b_n = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}, c_n = \sqrt{4n+2}, d_n = \sqrt{4n+3} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n \leq d_n \Rightarrow [a_n] \leq [b_n] \leq [c_n] \leq [d_n]$ însă
$[d_n]^2 \leq d_n^2 = 4n+3 \Rightarrow [d_n]^2 \leq 4n+1 \Rightarrow [d_n] < \sqrt{4n+1}$
(deoarece orice pătrat perfect la împărțirea cu 4 rezultă restul 0 sau 1).
Prin urmare, avem:
$[d_n] \leq \sqrt{4n+1} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3}$
$\Leftrightarrow [d_n] \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq d_n \Rightarrow [d_n] \leq [a_n] \leq [b_n] \leq [c_n] \leq [d_n] \Rightarrow$
$\Rightarrow [a_n] = [b_n] = [c_n] = [d_n]$.

Egalitatea 2 Putnam 1948, egalitatea 1 Canada 1987

33.** a) Deoarece pătratul unui număr natural nu poate fi decât de forma $3p$ sau $3p+1$, rezultă că $\sqrt{3n+2} \notin \mathbb{N}$. Notăm $[\sqrt{3n+2}] = k \Rightarrow$
$\Rightarrow k < \sqrt{3n+2} < k+1 \Rightarrow k^2 < 3n+2 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 \leq 3n+1 < (k+1)^2 \Rightarrow k \leq \sqrt{3n+1} < k+1 \Rightarrow [\sqrt{3n+1}] = k.$

b) Deoarece pătratul unui număr natural nu poate fi decât de forma $4p$ sau $4p+1$, rezultă că $\sqrt{4n+2}, \sqrt{4n+3} \notin \mathbb{N}$. Notăm $k = [\sqrt{4n+3}] \Leftrightarrow$
$k < \sqrt{4n+3} < k+1 \Rightarrow k^2 < 4n+3 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 < 4n+2 < (k+1)^2$ și $k^2 \leq 4n+1 < (k+1)^2$
$\Rightarrow k \leq \sqrt{4n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{4n+3} < k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}], (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$

c) Deoarece pătratul unui număr natural nu poate fi decât de forma $5p$ sau $5p+1, 5p+2 \Rightarrow \sqrt{5n+3} \notin \mathbb{N}$ și în mod analog rezultă:
$[\sqrt{5n+2}] = [\sqrt{5n+3}]$.

34.** a) Evident $k^2 = \{0,1,2,4\}$ (mod 7) deci $7n+3$ nu poate fi pătrat perfect.
Dacă $k^2 \leq 7n+2 < 7n+3 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \leq \sqrt{7n+2} < \sqrt{7n+3} < k+1 \Rightarrow [\sqrt{7n+2}] = [\sqrt{7n+3}]$.

b) Avem $7n+5, 7n+6$ nu poate fi pătrat perfect. Dacă:
$k^2 \leq 7n+4 < 7n+5 < 7n+6 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$k \leq \sqrt{7n+4} < \sqrt{7n+5} < \sqrt{7n+6} < k+1$
$\Rightarrow [\sqrt{7n+4}] = [\sqrt{7n+5}] = [\sqrt{7n+6}]$.

c) Evident $k^2 = \{0,1,2,4\}$ (mod 7). Fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât
$k^2 < 7n^2-3 < 7n^2-2 < 7n^2-1 < 7n^2$ unde:
$7n^2-2, 7n^2-1, 7n^2$ nu poate fi pătrat perfect,
$k < \sqrt{7n^2-3} < \sqrt{7n^2-2} < \sqrt{7n^2-1} < \sqrt{7n^2} < k+1$
deci $[\sqrt{7n^2-3}] = [\sqrt{7n^2-2}] = [\sqrt{7n^2-1}] = [n\sqrt{7}]$.

Scanned with OKEN Scanner

35**. Întrucât $16n+4$ și $16n+9$ sunt pătrate perfecte și $\sqrt{16n+5}, \sqrt{16n+6}, \sqrt{16n+7}, \sqrt{16n+8}$ nu pot fi pătrate perfecte, prin urmare, pentru
$a \in \{1,2,3,4\} \Rightarrow \sqrt{16n+4+a}$ nu poate fi pătrat perfect și prin urmare avem
$k^2 \leq 16n+4 < 16n+5 < 16n+6 < 16n+6 < 16n+8 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \leq \sqrt{16n+4} < \sqrt{16n+5} < \sqrt{16n+6} < \sqrt{16n+7} < \sqrt{16n+8} <$
$< k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{16n+p}\right] = k, \forall p \in \{4,5,6,7,8\}$. Prin urmare $a = 4$.

36**. a) Evident $n^3 \equiv \{0,1,8\} \pmod 9$. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:
$k^3 \leq 9n+1 < 9n+2 < 9n+3 < 9n+4 < 9n+5 < 9n+6 <$
$< 9n+7 < (k+1)^3 \Rightarrow k < \sqrt[3]{9n+1} < \sqrt[3]{9n+2} < \sqrt[3]{9n+3} < \sqrt[3]{9n+4} <$
$< \sqrt[3]{9n+5} < \sqrt[3]{9n+6} < \sqrt[3]{9n+7} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt[3]{9n+p}\right] = k,$
$(\forall)\, p \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

b) Notăm cu $\left[\sqrt{16n+20+a}\right] = k \Rightarrow k \leq \sqrt{16n+20+a} < k+$
$+1 \Leftrightarrow k^2 \leq 16n+20+a < (k+1)^2$ unde $a \in \{0,1,2,3,4\}$
(pentru $a = 5$ $16(n+1)+9$ poate fi pătrat perfect).
Prin urmare, rezultă că $\left[\sqrt{16(n+1)+a+4}\right] = k$ pentru $a \in \{0,1,2,3,4\}$ deci au loc egalitățile de mai sus.

37**. Se știe că restul împărțirii oricărui cub la 9 este $r \in \{0,1,8\}$, adică $m^3 = 9p+r, r \in \{0,1,8\}$. Fie $\left[\sqrt[3]{9n+1}\right] = p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9n+1 \in [p^3, (p+1)^3) \Rightarrow 9n+7 < (p+1)^3+6$, dar cum
$9n+7 \notin \{(p+1)^3, (p+1)^3+1, (p+1)^3+2, (p+1)^3+3, (p+1)^3+4, (p+1)^3+5\}$
(deoarece restul împărțirii unui cub la 9 este $r \in \{0,1,8\}$), prin urmare,
$9n+7 \geq p^3$ și $9n+7 < (p+1)^3 \Rightarrow \left[\sqrt[3]{9n+7}\right] = p$.

C. Apostolescu, O.L. Prahova 2010

38**. a) Deoarece cubul unui număr natural nu poate fi decât de forma $7p, 7p+1, 7p+6, p \in \mathbb{N}$, rezultă că numerele de forma $7p+2, 7p+3, 7p+4, 7p+5$ nu pot fi cubul unui număr natural. Dacă notăm:
$\left[\sqrt[3]{7n+5}\right] = k \Rightarrow k < \sqrt[3]{7n+5} < k+1 \Rightarrow k^3 < 7n+5 < (k+1)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^3 < 7n+1 < 7n+2 < 7n+3 < 7n+4 < 7n+5 < (k+1)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt[3]{7n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+2}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+3}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+4}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+5}\right],$
$(\forall) n \in \mathbb{N}$.

b) În mod analog, puterea a patra a unui număr natural nu poate fi decât de forma $4p, 4p+1$ deci numerele $\sqrt[4]{4n+3}, \sqrt[4]{4n+2} \notin \mathbb{N}$, așadar numerele $\sqrt[4]{4n+1}, \sqrt[4]{4n+2}, \sqrt[4]{4n+3}$ au aceeași parte întreagă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $k = \left[\sqrt[4]{4n+3}\right] \Rightarrow k < \sqrt[4]{4n+3} < k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^4 < 4n+3 < (k+1)^4 \Rightarrow k^4 < 4n+1 < 4n+2 < 4n+3 < (k+1)^4$
$\Rightarrow k \leq \sqrt[4]{4n+1} < \sqrt[4]{4n+2} < \sqrt[4]{4n+3} < k+1.$

39**. Pentru $n = 0 \Rightarrow [\sqrt{1}] = [\sqrt{2}] = \cdots = [\sqrt{a-1}] \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{a-1}] = 1 \Leftrightarrow 2 < a < 5 \Rightarrow a \in \{3,4\}.$
Pentru $a = 3 \Rightarrow [\sqrt{3n+1}] = [\sqrt{3n+2}], (\forall)\, n \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, pentru $n \in \mathbb{N}$ există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k^2 \leq 3n+1 < (k+1)^2$.
Numărul $3n+2 < (k+1)^2$ sau $3n+2 = (k+1)^2$ (care nu poate avea loc) deci $k^2 \leq 3n+1 < 3n+2 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \leq \sqrt{3n+1} < \sqrt{3n+2} < k+1 \Rightarrow [\sqrt{3n+1}] = [\sqrt{3n+2}].$
Pentru $n = 4$ trebuie să arătăm că:
$[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}], (\forall) n \in \mathbb{N}.$
Considerăm $k = [\sqrt{4n+1}] \Rightarrow k^2 \leq 4n+1 < (k+1)^2$ și cum $4n+2, 4n+3$ nu pot fi pătrate perfecte rezultă că:
$k^2 \leq 4n+1 < 4n+1 < 4n+3 < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}] = k, (\forall) n \in \mathbb{N}.$

Ovidiu Pop, R.M. 2004

40**. Se observă că:
$0 < \sqrt[3]{8n+4} - \sqrt[3]{8n+3} < 1 \quad (1).$
Pentru ca egalitatea dată să aibă loc este necesar să avem

$$k \leq \sqrt[3]{8n+3} < \sqrt[3]{8n+4} < k+1 \ (2) \Leftrightarrow \frac{k^3-3}{8} \leq n < \frac{(k+1)^3-4}{8}.$$

Reuniunea intervalelor în care se găsește k acoperă mulțimea $\mathbb{Z}$. De aici rezultă că egalitatea dată are loc pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.
Observație:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \left[\frac{k^3-3}{8}, \frac{(k+1)^3-4}{8} \right) \cup \left[\frac{(k+1)^3-3}{8}, \frac{(k+2)^3-4}{8} \right) \right\} \supset \mathbb{Z}.$$

Între $\frac{(k+1)^3-4}{8}$ și $\frac{(k+1)^3-3}{8}$ nu există numere întregi.

41**. Soluția 1
Se observă că $0 < \sqrt{9n+8} - \sqrt{9n+7} < 1.$
Pentru ca egalitatea dată să aibă loc este necesar să avem:

$$k \leq \sqrt{9n+7} < \sqrt{9n+8} < k+1, k \geq 2 \Leftrightarrow \frac{k^2-7}{9} \leq n < \frac{(k+1)^2-8}{9},$$

$k \geq 2$

$n \in \bigcup_{k\geq 2}\left[\frac{k^2-7}{9}, \frac{(k+1)^2-8}{9}\right) \supset \mathbb{N}.$

Deci, soluții sunt toate numerele naturale.

Soluția 2:

$\sqrt{9n+8} \notin \mathbb{N}$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

Presupunem prin absurd că $9n+8 = k^2$.

Dar resturile lui k^2 la împărțirea cu 9 sunt 1,4,0,7. Deci, $k^2 \neq 9n+8$ și nu există $k \in \mathbb{N}$ cu $\sqrt{9n+7} < k < \sqrt{9n+8} \Leftrightarrow 9n+7 < 9n+8$ (evident).

Deci, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}, k \leq \sqrt{9n+7} < \sqrt{9n+8} < k+1$ $(\exists) k \in \mathbb{N}$.

Rezultă $[\sqrt{9n+7}] = [\sqrt{9n+8}]$.

§ 3.

42.** Pentru $n = 1$ se verifică.

Avem $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 4n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ și

$4n-1 < 2n+2\sqrt{n^2-1}, \forall\, n \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}, (\forall)\, n \geq 2$

deci $4n-1 < \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2 < 4n$

$\sqrt{4n-1} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} < \sqrt{4n} \Rightarrow \left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right] = \left[\sqrt{4n-1}\right]$.

43.** Se arată ușor că: $\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n} < \sqrt{4n^2-1}, (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}\right] \leq \left[\sqrt{4n^2-1}\right]$.

Presupunând că ar exista n pentru care avem inegalitatea strictă, atunci există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât: $\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n} < m \leq \sqrt{4n^2-1}$ și cum în dreapta nu putem avea egalitate, rezultă: $2\sqrt{n^4-n^2} < m^2-2n^2 < 2n^2-1$

$4n^4-4n^2 < (m^2-2n^2)^2 < 4n^4-4n^2+1$, contradicție.

Aplicăm $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$, atunci $\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n} < \sqrt{4n^2} = 2n$

și $2n-1 < \sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n} \Rightarrow \left[\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+n}\right] = 2n-1$.

Dar cum $2n-1 < \sqrt{4n^2-1}, < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2-1}\right] = 2n-1$.

Ion Cucurezeanu, G.M. nr. 2/1996

44*.** Utilizând inegalitatea $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \Rightarrow \sqrt{n+m}+\sqrt{n-m} <$

$< 2\sqrt{n} \Rightarrow A < 2\sqrt{n} \Rightarrow [A] \leq A < 2\sqrt{n} \Rightarrow [A]^2 < 4n \Rightarrow [A]^2 \leq 4n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [A] \leq \sqrt{4n-1} \Rightarrow [A] \leq \left[\sqrt{4n-1}\right]$.

Să arătăm că:

$A \geq \sqrt{4n-2} \Leftrightarrow 2n+2\sqrt{n^2-m^2} \geq 4n-2 \Rightarrow \sqrt{n^2-m^2} \geq n-1 \Leftrightarrow$

$m^2 \leq 2n-1$ condiție satisfăcută, deci $A \geq \sqrt{4n-2} \Rightarrow [A] \geq \left[\sqrt{4n-2}\right] \Rightarrow$

$\left[\sqrt{4n-2}\right] \leq [A] \leq \left[\sqrt{4n-1}\right]$, dar cum $\left[\sqrt{4n-2}\right] = \left[\sqrt{4n-1}\right]$

Scanned with OKEN Scanner

(deoarece $4n-1$ și $4n-2$ nu pot fi pătrate perfecte).
Vezi și exercițiul $[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$.

Ion Cucurezeanu

45*.** Vom arăta că:
$[\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{16n+4}], (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2.$
Pentru $n=2$ se verifică direct. Va fi suficient să arătăm că
$\sqrt{16n+4}<f(n)<\sqrt{16n+8},$
unde s-a notat cu $f(n)=\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}.$
Avem $f(n)\geq 4\sqrt[8]{n(n+2)(n^2-1)}$, dar cum

$$n(n+2)(n^2-1)\geq\left(n+\frac{1}{4}\right)^4,$$

$$(\forall)n\geq 3\Rightarrow f(n)>4\sqrt{n+\frac{1}{4}}=\sqrt{16n+4}$$

și cum media aritmetică este mai mică decât media pătratică, rezultă:

$$\sqrt{n-1}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\leq 4\sqrt{n+\frac{1}{2}}=\sqrt{16n+8}, (\forall)\ n\geq 3.$$

Deci, $\sqrt{16n+4}<f(n)<\sqrt{16n+8}\Rightarrow[f(n)]=[\sqrt{16n+4}]$ (vezi aplicația precedentă).

Olimpiadă Iugoslavia, 1990

46*.** Notăm cu $E_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}$. Pentru $n\in\{0,1\}$ se verifică. Fie $n\geq 2$. Arătăm că:
$\sqrt{16n+23}\leq\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}<\sqrt{16n+24}.$
Într-adevăr, utilizând inegalitatea $a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$ rezultă
$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\leq\sqrt{2(2n+3)}+\sqrt{2(2n+3)}=$
$=2\sqrt{2(2n+3)}=\sqrt{8(2n+3)}=\sqrt{16n+24}.$
Sau utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz, adică:
$(1\sqrt{n}+1\sqrt{n+1}+1\sqrt{n+2}+1\sqrt{n+3})^2\leq 4(4n+6)\Rightarrow E_n<\sqrt{16n+24}.$
Pentru prima inegalitate se aplică inegalitatea mediilor

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\geq 4\sqrt[8]{n(n+1)(n+2)(n+3)}\geq$$
$$\geq\sqrt{16n+23}$$

$16n+23\leq E_{(n)}^2<16n+24\Rightarrow E_n=[\sqrt{16n+23}].$
Ultima inegalitate se reduce la:
$16384n^3+568352n^2-385472n-279841\geq 0, (\forall)\ n\geq 2.$
Așadar, $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}]=[\sqrt{16n+23}].$

Scanned with OKEN Scanner

47*.** Notăm cu $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+3}$ și $b_n = \sqrt{4n+6}$.
Vom arăta că $[b_n] \leq a_n < b_n$, de unde va rezulta $[b_n] = [a_n]$.
În inegalitatea $x + y \leq \sqrt{2(x^2+y^2)}$ luăm $x = \sqrt{n}$ și $y = \sqrt{n+3}$ și obținem
$a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+3} \leq \sqrt{2(2n+3)} = \sqrt{4n+6} = b_n \Rightarrow a_n \leq b_n$,
dar se arată ușor că $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+3} \geq \sqrt{4n+5}$ (1).
Pe de altă parte, $b_n^2 = 4n+6$ și cum $4n+6$ nu este pătratul unui număr natural, avem $b_n = \sqrt{4n+6} \Rightarrow [b_n] = \left[\sqrt{4n+6}\right] \leq \sqrt{4n+6} \Rightarrow$
$\Rightarrow [b_n]^2 \leq 4n+6 \Rightarrow [b_n]^2 \leq 4n+5 \Rightarrow$
$\Rightarrow [b_n] \leq \sqrt{4n+5} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+3} = a_n$
așadar $[b_n] \leq a_n < b_n \Rightarrow [b_n] \leq [a_n] \leq [b_n] \Rightarrow [a_n] = [b_n]$. În baza unei proprietăți (vezi 51) din $\sqrt{4n+5} < \sqrt{n} + \sqrt{n+3} < \sqrt{4n+6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+3}\right] = \left[\sqrt{4n+5}\right] = \left[\sqrt{4n+6}\right]$.

Dorinel Anca, G.M. nr. 10-11/1983

48*.** a) Utilizăm inegalitatea $a+b+c < \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \Rightarrow$
$\sqrt{n} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n+6} < \sqrt{3(3n+9)} = \sqrt{9n+27}$
și $\sqrt{n} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n+6} > 3\sqrt[6]{n(n+3)(n+6)} \geq \sqrt{9n+26}$.
Ultima inegalitate este adevărată pentru $n \geq 2$. Rezultă:
$\sqrt{9n+26} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n+6} < \sqrt{9n+27}$
$\Rightarrow \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+3} + \sqrt{n+6}\right] = \left[\sqrt{9n+26}\right]$.

b) Analog.

49*.** Avem:

$$\left(n+\frac{1}{7}\right)^2 < n^2 + \frac{n}{3} < \left(n+\frac{1}{6}\right)^2 \Leftrightarrow n + \frac{1}{7} < \sqrt{n^2+\frac{n}{3}} < n + \frac{1}{6}$$

$$\left(n+\frac{1}{4}\right)^2 < n^2 + \frac{2n}{3} < \left(n+\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow n + \frac{1}{4} < \sqrt{n^2+\frac{2n}{3}} < n + \frac{1}{3}$$

$$\left(n+\frac{1}{3}\right)^2 < n^2 + n < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow n + \frac{1}{3} < \sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3n < 3n + \frac{61}{84} < E_n < 3n+1 \Rightarrow [E_n] = 3n.$$

I. Safta, G.M. nr. 5-6/2002

50*.** $n + \frac{7}{16} < \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}$

$n + \frac{15}{16} < \sqrt{n(n+2)} < n + 1$

Scanned with OKEN Scanner

$$n+\frac{23}{16}<\sqrt{(n+1)(n+2)}<n+\frac{3}{2}$$

$$\frac{45}{16}<E_n-3n<3 \Rightarrow [E_n]=2$$

$$3<\frac{53}{16}<E_n+\frac{1}{2}<3{,}5 \Rightarrow \left[E_n+\frac{1}{2}\right]=3.$$

Mihaly Bencze, G.M. nr. 10/2005

51*.** Pentru demonstraţie este suficient să arătăm că:

$\sqrt[m]{an+b} \le S_n < \sqrt[m]{an+b+1} \Leftrightarrow an+b \le S_{(n)}^m < an+b+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [S_{(n)}^m] = an+b \Rightarrow \sqrt[m]{[S_{(n)}^m]} = \sqrt[m]{an+b} \Rightarrow \left[\sqrt[m]{[S_{(n)}^m]}\right] = [\sqrt[m]{an+b}],$

dar din identitatea $\left[\sqrt[m]{[a^m]}\right] = [a]$ rezultă că $\left[\sqrt[m]{[S_{(n)}^m]}\right] = [S_n]$ deci

$[S_n] = [\sqrt[m]{an+b}]$.

52*.** În baza exerciţiului 51 avem:

$8n+3 < \left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right)^3 < 8n+4$

$\Rightarrow 2n+\frac{2}{3} < \sqrt[4]{n^2(n+1)}+\sqrt[3]{n(n+1)^2} < 2n+1,$

dar cum $\left(n+\frac{1}{9}\right)^3 < n^2(n+1) < \left(n+\frac{1}{3}\right)^3$

şi $\left(n+\frac{5}{9}\right)^3 < n(n+1)^2 < \left(n+\frac{2}{3}\right)^3$

$\Rightarrow 2n+\frac{2}{3} < \sqrt[3]{n^2(n+5)}+\sqrt[3]{n(n+1)^2} < 2n+1.$

Aşadar, $\sqrt[3]{8n+3} < \sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1} < \sqrt[3]{8n+4}$

şi în baza exerciţiului 51 $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{8n+3}\right]$.

53*.** Soluţia 1

Notăm cu $S_{(n)} = \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$ şi în baza exerciţiului 51 trebuie să demonstrăm că $9n+8 < S_{(n)}^2 < 9n+9 \Leftrightarrow 9n+8 < 3n+3+$

$+2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}\right) < 9n+9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6n+5 < 2E < 6n+6 \Rightarrow 3n+\frac{5}{2} < E < 3n+3$ (1).

Dar cum $\left(n+\frac{4}{10}\right)^2 < n(n+1) < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$

$\left(n+\frac{7}{10}\right)^2 < n(n+2) < (n+1)^2$

Scanned with OKEN Scanner

116

$$\left(n+\frac{14}{10}\right)^2 < (n+1)(n+2) < \left(n+\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+\frac{4}{10}+n+\frac{7}{10}+n+\frac{14}{10} <$$

$$< \sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)} < 3n+3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3n+\frac{5}{2} < E < 3n+3$ deci rezultă (1).

Prin urmare, avem $9n+8 < S_{(n)}^2 < 9n+9 \Rightarrow \sqrt{9n+8} < S_{(n)} < \sqrt{9n+9}$ și în baza exercițiului 51 $\Rightarrow [S_n]=[\sqrt{9n+8}]$.

Soluția 2

Avem $\frac{S_{(n)}}{3} \geq \sqrt[3]{n(n+1)(n+2)} \Rightarrow S_{(n)} \geq 3\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{(n)}^2 \geq 9\sqrt[3]{n^2(n+1)^2(n+2)^2} > 9\sqrt[3]{\left(n+\frac{8}{9}\right)^3} = 9n+8 \Rightarrow 9n+8 < S_{(n)}^n.$$

De asemenea avem:

$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2} < \sqrt{n+1} \Rightarrow S_{(n)} < 3\sqrt{n+1} \Rightarrow S_{(n)}^2 < 9n+9$

deci $9n+8 < S_{(n)}^2 < 9n+9 \Rightarrow \sqrt{9n+8} < S_{(n)} < \sqrt{9n+9}$ și în baza exercițiului 51 $\Rightarrow [S_{(n)}] = [\sqrt{9n+8}]$.

(S-a utilizat inegalitatea $\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2} < \sqrt{n+1} \Rightarrow S_{(n)}^2 < 9n+9.$)

A.M.M. 3/1983, Olimpiadă Iran 1996

54*.** a) Considerăm cazurile:

1) Dacă $a \leq \frac{1}{2}$, atunci pentru $n=2$ avem $\sqrt{2}+\sqrt{2+a} \leq \sqrt{2}+$

$$+\sqrt{2+\frac{1}{2}} < 3 = \sqrt{4\cdot 2+1} \text{ deci } [\sqrt{n}+\sqrt{n+a}] = [\sqrt{4n+1}]$$

pentru $a \leq \frac{1}{2}$ și $n=2$.

2) Dacă $a>2$ atunci fie $a=2+b, b>0 \Rightarrow \sqrt{n}+\sqrt{n+2+b} >$

$> 2\sqrt{n^2+2n+nb} > 2\sqrt{n+1}$ pentru $nb>1$ și prin urmare:

$\sqrt{n}+\sqrt{n+a} > 2k = \sqrt{4n+4} = [\sqrt{4n+4}] > [\sqrt{4n+1}]$ pentru $n>2$,

$n > \frac{1}{b} = \frac{1}{a-2}$ și $n+1=k^2, k \in \mathbb{N}^*$.

3) Fie $a \in [1,2]$, atunci $[\sqrt{4n+1}] \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+a} \leq$

Scanned with OKEN Scanner

$\leq \sqrt{n}+\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}$, pentru $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$, $n\in\mathbb{N}^*$ și prin urmare
$(\sqrt{n}+\sqrt{n+a})^2\leq 4n+3\Rightarrow[\sqrt{n}+\sqrt{n+a}]\leq[\sqrt{4n+3}]$, dar cum $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+3}]$ rezultă $[\sqrt{n}+\sqrt{n+a}]=[\sqrt{4n+1}]$ pentru $a\in[1,2]$ și $n\in\mathbb{N}^*$.

4) Fie $\frac{1}{2}<a<1$, atunci pentru $n=1$ avem $[1+\sqrt{1+a}]=$
$=2=[\sqrt{4\cdot 1+1}]$ egalitate adevărată, pentru $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Pentru $n=2$, avem $[\sqrt{2}+\sqrt{2+a}]=3=[\sqrt{4\cdot 2+1}]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3\leq\sqrt{2}+\sqrt{2+a}<4\Rightarrow$
$\Rightarrow 3-\sqrt{2}\leq\sqrt{a+2}<4-\sqrt{2}\Rightarrow$
$\Leftrightarrow 11-6\sqrt{2}\leq a+2<18-8\sqrt{2}\Rightarrow 9-6\sqrt{2}\leq a<16-8\sqrt{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow a\geq 9-6\sqrt{2}$.

Pentru $n\geq 3, \sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+9-6\sqrt{2}}<\sqrt{4n+3}$ și pentru $a\geq 9-6\sqrt{2}\Rightarrow[\sqrt{4n+1}]\leq[\sqrt{n}+\sqrt{n+a}]\leq[\sqrt{4n+3}]\Rightarrow$
$[\sqrt{n}+\sqrt{n+a}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+3}]$, pentru $9-6\sqrt{2}\leq a\leq 2$.

Crux Mathematicorum, I. Bluskov

b) Notăm $E_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Rightarrow E_n^2=2n+1+2\sqrt{n^2+n}$ și cum
$n<\sqrt{n^2+n}<n+\frac{1}{2}\Rightarrow$
$4n+1<2n+1+2\sqrt{n^2+n}<2n+1+2\left(n+\frac{1}{2}\right)=4n+2\Rightarrow$
$\sqrt{4n+1}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\sqrt{4n+2}$ și în baza exercițiului 51 Cap. IV sau de la Cap. I Proprietăți, rezultă: $[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}]=[\sqrt{4n+1}]$, dar în baza exercițiului 31 Cap. V rezultă că $[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$.
Prin urmare $(a,b)\in\{(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

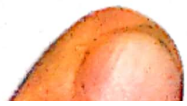
Lucian Dragomir, G.M. nr. 12/2017 (S)

55*.** Pentru $n=1\Rightarrow\left[\sqrt{1+a}+\frac{1}{2}\right]=1\Rightarrow\frac{-3}{4}\leq a<\frac{5}{4}$.

Pentru $n=2\Rightarrow\left[\sqrt{2+a}+\frac{1}{2}\right]=1\Rightarrow\frac{-7}{4}\leq a<\frac{1}{4}\Rightarrow a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Să arătăm că orice $a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ și $n\in\mathbb{N}^*$ avem: $\left[\sqrt{n+a}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$.

Notăm $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4}\leq n<k^2+k+\frac{1}{4}$
și cum $n,k\in\mathbb{N}^*$ rezultă:



Scanned with OKEN Scanner

$k^2-k+1\le n<k^2+k\Rightarrow k^2-k+1+a\le n+a<k^2+k+a\Rightarrow$

$\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4}\le n+a<k^2+k+\frac{1}{4}\Rightarrow k-\frac{1}{2}<\sqrt{n+a}<k+\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow k\le\sqrt{n+a}+\frac{1}{2}<k+1\Rightarrow\left[\sqrt{2+a}+\frac{1}{2}\right]=k.$

Matematica v scole nr. 1/1989

56***. Se consideră $n=m^2$ sau $n\neq m^2, m\in\mathbb{N}$. Pentru $n=m^2$, toți termenii egalității sunt egali cu 1 și pentru $n\neq m^2$, toți termenii sunt nuli. Pentru ultima egalitate se utilizează identitatea $\left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right]=$ $=\left[\sqrt{4n-1}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 6

Egalităţi şi identităţi

§ 1.

1*. Să se arate că $\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right], \forall\, n\in\mathbb{N}.$

2. Arătaţi că:

$$\left[\frac{[e]}{e}\right]+\left[\frac{[2e]}{e}\right]+\cdots+\left[\frac{[ne]}{e}\right]+\left[\frac{[\pi]}{\pi}\right]+\left[\frac{[2\pi]}{\pi}\right]+\cdots+\left[\frac{[n\pi]}{\pi}\right]=n(n-1).$$

3. Fie $x\in(0,1)$ şi $n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2.$

Să se calculeze: $E(x)=\left[\frac{x+1}{x}\right]+\left[\frac{x+2}{x+1}\right]+\cdots+\left[\frac{x+n}{x+n-1}\right].$

4.** Să se arate că: $\left[\frac{n+2-\left[\frac{n}{25}\right]}{3}\right]=\left[\frac{8n+24}{25}\right], \forall\, n\in\mathbb{N}.$

5.** Să se demonstreze egalitatea: $\left[\frac{8n+5}{25}\right]=\left[\frac{n-\left[\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right], \forall\, n\in\mathbb{Z}.$

6. Arătaţi că $2n\left[\sqrt{4-\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}\right]-\left[\sqrt{4n^2-6n+4}\right]=2$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*.$

7.** Să se arate că: $\left[\sqrt[n^2]{n+1}\right]=\left[\sqrt[n^2]{n+2}\right]=n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*-\{1\},=$

$=\left[\sqrt[n^2]{n+3}\right]=n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3.$

8. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ şi α iraţional cu $\alpha>n.$ Să se arate că: $\left[\frac{n[m\alpha]}{\alpha}\right]=mn-1.$

9. Să se demonstreze că:

$$\left[\frac{n(n+1)}{3}\right]+\left[\frac{(n+1)(n+2)}{3}\right]+\left[\frac{(n+2)(n+3)}{3}\right]=n^2+3n+2, \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

10.** Să se demonstreze identitatea:

$$a^3=[a]^3+3a[a[a]]-3[a][a[a]]+5\{a\}\{a[a]\}+\{a\}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

11.** Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ au loc egalitățile:

a) $\left[\frac{m}{2}\right]^2 + \left[\frac{m+1}{2}\right]^2 = \left[\frac{m^2+1}{2}\right]$;

b) $\left[\frac{m}{3}\right]^2 + \left[\frac{m+1}{3}\right]^2 + \left(\frac{m+2}{3}\right)^2 = \left[\frac{m^2+2}{3}\right]$.

12.** Arătați că: $\left[\frac{a+3}{6}\right] - \left[\frac{a+4}{6}\right] + \left[\frac{a+5}{6}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] - \left[\frac{a+1}{3}\right], \forall\, a \in \mathbb{R}$.

13*. Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, știind că: $\left\{\frac{n^2-3n}{4}\left\{\frac{n^2-3n}{4}\right\}\right\} = 0$.

14*. Fie $[x] + [y] + y = 43{,}8$ și $x + y - [x] = 18{,}4$.
Să se determine valoarea lui $E(x,y) = 10(x+y)$.

15*. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2x + y \equiv 2m$ și fie $E_n(x,y) = \frac{[x+y] + [x+2y] + \cdots + [x+ny]}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.
Să se arate că $[nx + ny - E_n(x,y)] = m(n-1)$.

16. Fie $E_n(x) = \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n}$ și $F_n(x) = \frac{(n+1)x}{2} - E_n(x)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $[F_n(x)] \cong 0$.

17*. Să se arate că: $\left[\frac{k^3}{p}\right] + \left[\frac{(p-k)^3}{p}\right] = p^2 - 3pk + 3k^2 - 1$,
unde p este număr prim, impar și $k \leq p-1, \forall\, a \in [-1,1]$.

18*. Să se arate că: $\left[\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}\right] = 1, \forall\, a \in [-1,1] = \{0\}$.

19*. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se calculeze:

$$E_n = \left\{n + \sqrt{n^2-1}\right\} + \left\{\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}\right\}.$$

20.** Fie $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și $E_n(a) = \left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^n + \left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^n$.
Să se calculeze $\left\{\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^n\right\} + \left\{\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^n\right\}$.

21.** Să se demonstreze că pentru $a \geq 0$ au loc identitățile:

a) $\left[\sqrt{a}\right] = \left[\sqrt{[a]}\right]$;

b) $\left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = \left[\sqrt{\left[\sqrt{a}\right]}\right] = \left[\sqrt{\left[\sqrt{[a]}\right]}\right]$;

c) $\underbrace{\left[\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a}}}\right]}_{n \text{ radicali}} = \underbrace{\left[\sqrt{\left[\sqrt{\ldots\left[\sqrt{a}\right]}\right]}\right]}_{n \text{ radicali și } n+1 \text{ semne } [\ ]}$.

Scanned with OKEN Scanner

22**. Să se demonstreze că $(\forall)\, a \in \mathbb{R}_+$ și $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ au loc egalitățile:

a) $\left[\sqrt[n]{a}\right] = \left[\sqrt[n]{[a]}\right]$;

b) $\left[\sqrt[n]{[a^n]}\right] = [a]$.

23**. Demonstrați că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ au loc egalitățile: $\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right] = \left[\sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{a}\right]}\right] = \left[\sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{[a]}\right]}\right] = \left[\sqrt[m]{\left[\sqrt[n]{a}\right]}\right]$.

24***. a) Fie $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Să se demonstreze că pentru orice $x \in (0, \infty)$ și $n \in \mathbb{N}^*$, avem: $\left[\frac{\sqrt[p]{[x]}}{n}\right] = \left[\frac{\sqrt[p]{x}}{n}\right]$.

b) Fie $q \in (1, \infty)$. Să se arate că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x > 0$, astfel încât:

$$\left[\frac{[x]^q}{n}\right] \neq \left[\frac{x^q}{n}\right].$$

25**. Să se arate că:

a) $\left[\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}\right)^2\right] = 9n + 17$;

b)) $\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}\right] = [9n + 17]$.

26. Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ au loc identitățile:

a) $\left[\sqrt[n]{m}\right] = \left[\sqrt[n]{m-1}\right] + 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}^*$;

b) $\left[\sqrt[n]{m}\right] = \left[\sqrt[n]{m-1}\right] \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}^*$.

27***. Fie $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $\left[\sqrt[p]{n}\right] - \left[\sqrt[p+1]{n}\right] = k$.

28**. Să se calculeze partea întreagă a numărului:

$$a_n = \left(\sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{5}\right)^n, \text{unde } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

29**. Să se arate că: $\left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 4(n+1)^2}}{2}\right] = \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4n^2}}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

30***. Să se arate că:

a) $\left[n + \sqrt{n^2+1}\right] + \left[n + 1 + \sqrt{n^2+2n}\right] = \left[\sqrt{4n^2+2}\right] + \left[\sqrt{4n^2+8n+2}\right]$;

b) $\left[\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2+n+1}\right] + \left[\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+3n+3}\right] = \left[\sqrt{4n^2+3} + \sqrt{4n^2+8n+5}\right]$;

c) $\left[\sqrt{n^2-n+1} + \sqrt{n^2+n+1}\right] + \left[\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+3n+2}\right] = \left[\sqrt{4n^2+3}\right] + \left[\sqrt{4n^2+8n+7}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. Probleme de concurs

31**. Să se calculeze și să se scrie sub forma mai simplă rezultatul, unde $n \in \mathbb{Z}$:

a) $A_n = \left[\frac{(n+1)^2}{2}\right] - \left[\frac{n^2}{2}\right]$;

b) $B_n = \left[\frac{(n+2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(n+1)^2}{2}\right]$;

c) $C_n = \left[\frac{(n+1)^2}{4}\right] - \left[\frac{n^2}{4}\right]$;

d) $D_n = \left[\frac{(n+1)^2}{3}\right] - \left[\frac{n^2}{3}\right]$.

32***. Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{Z}$ avem:

a) $\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{m^2}{4}\right]$;

b) $\left[\frac{m}{3}\right] \cdot \left[\frac{m+1}{3}\right] + \left[\frac{m+1}{3}\right] \cdot \left[\frac{m+2}{3}\right] + \left[\frac{m+2}{3}\right] \cdot \left[\frac{m}{3}\right] = \left[\frac{m^2}{3}\right]$;

c) $\left[\frac{m}{4}\right] \cdot \left[\frac{m+4}{4}\right] + \left[\frac{m+1}{4}\right] \cdot \left[\frac{m+2}{4}\right] + \left[\frac{m+2}{4}\right] \cdot \left[\frac{m+3}{4}\right] +$
$+ \left[\frac{m+3}{4}\right] \cdot \left[\frac{m}{4}\right] = \left[\frac{m^2}{4}\right]$.

33**. Să se calculeze:

a) $\left[\sqrt{n^2+k} + \sqrt{(n+1)^2-k}\right]$;

b) $\left[\sqrt{(n^2+k)(n+1)^2-k}\right]$, $0 \le k \le 2n+1$.

34***. Fie $n, k \in \mathbb{N}^*, n > \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$, $k \ge 3$.

Să se arate că $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+k}\right] = \left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n+k-1}\right]$.

35***. Să se determine valorile posibile ale expresiei:

$E(m,n,k) = \left[\frac{m-n}{k}\right] - \left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]$ unde $m, n \in \mathbb{Z}$ și $k \in \mathbb{N}^*$.

36. Să se arate că: $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2k+1}\right] = \left[\sqrt{4n+4k+2}\right]$, unde $n, k \in \mathbb{N}$, $n \ge k^2$.

37**. Fie $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se arate că:

$$\left[\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+k}\right)^2\right] = nk^2 + \frac{k^2(k+1)}{2} - 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

38*. Să se arate că: $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right]=\left[\sqrt{4n+2k-1}\right], \forall\, n,k\in\mathbb{N}$, $n\geq\left(\frac{k-1}{2}\right)^2$.

39. Fie $k\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}, n\geq\frac{k^2+1}{2}$, avem

$$\left[\sqrt{n^2-kn}+\sqrt{n^2+kn}\right]=\left[\sqrt{4n^2-k^2}\right].$$

40**. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Aflați partea întreagă a numărului:

$$8n\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2.$$

41***. Să se arate că:

$$\left[\sqrt{kn+1}+\sqrt{kn+2}+\sqrt{kn+3}\right]=\left[\sqrt{9kn+17}\right], \forall\, n,k\in\mathbb{N}^*.$$

42***. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ are loc egalitatea:

$$\left[\frac{3n+8}{25}\right]=\left[\frac{n+2}{25}\right]+\left[\frac{n+11}{25}\right]+\left[\frac{n+19}{25}\right].$$

43***. Să se demonstreze că pentru $\forall\, n\in\mathbb{N}$ avem egalitatea:

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right].$$

44***. Să se arate că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[\frac{n^2+n}{4}\right]+\left[\frac{n^2+3n+2}{4}\right]+\left[\frac{n^2+5n+6}{4}\right]+\left[\frac{n^2+7n+12}{4}\right]=(n+2)^2.$$

45***. Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și orice $x\in\mathbb{R}$

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+\frac{2}{2n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{2n}\right]=$$
$$=n(3[x]-[2x])-[2\{x\}]\cdot[2n\{x\}].$$

46**. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n pentru care:

$$\left[\sqrt{n+1+\sqrt{n}}\right]\neq\left[\sqrt{n+\sqrt{n+1}}\right].$$

47**. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem:

$$\frac{\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]}{\left[\sqrt{4n+2}\right]}+\frac{\left[\sqrt{4n+2}\right]}{\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]}=2.$$

48***. a) Să se arate că oricare ar fi $n\geq 3$ numărul $\left[\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}\right)^2\right]$ nu poate fi pătrat perfect.

b) Să se arate că $\forall\, n\geq m$ numărul $\left[\left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}\right)^2\right]$ nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi $m,n\in\mathbb{N}^*$ cu $m^2\leq 2n-1$.

Scanned with OKEN Scanner

49*.** Fie $a \geq 1+\sqrt{3}$. Să se arate că: $\left[\frac{\left[\frac{na^2+2}{a}\right]+2}{a}\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

50*.** Să se arate că: $\left\{\left[n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right], n \in \mathbb{N}^*\right\} = N - \{m^2, m \in \mathbb{N}\}$.

51*. Să se determine cel mai mic $\alpha \in (0,1)$ astfel încât: $\{\sqrt{n^2+5n+3}\} < \alpha$.

52*. Să se arate că: $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right] = \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}$.

53*.** Fie $a \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$. Demonstrați că: $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right] = \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n-a}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

54*.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\left[\sqrt{n+a+\frac{1}{2}}\right] = \left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

55.** Să se calculeze: $\left[\sqrt{n+4^{[\sqrt{n}]}+1}\right]$.

56.** Arătați că pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ avem: $\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right] + \left[\frac{1-\sqrt{8n+1}}{2}\right] = 0$.

57*.** Arătați că dacă $a \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, atunci: $\left[\frac{1+\left[\frac{1+na^2}{a}\right]}{a}\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

58.** Să se arate că: $\left[\sqrt[n^2]{n+m}\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ cu $1 \leq m \leq n$.

59.** Să se arate că: $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n+[\sqrt{n}]}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

60.** a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right]$.

b) Să se arate că $\sqrt{n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]}$ este irațional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

61*.** Arătați că: $[\sqrt{n}] = \left[\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+2}}}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

62**. Arătaţi că:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right]-\left[\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right]=\left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}\right]-\left[\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}+1}{2}\right].$$

63***. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\left[\sqrt{n-\frac{1}{4}}\right]=\left[\sqrt{n+\frac{3}{4}}\right] \Leftrightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{N}.$$

64***. Să se arate că: $\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]$.

65***. Să se arate că: $\left[\frac{2^n-1}{2^m-1}\right]\cdot 2^{m\left[\frac{n}{m}\right]}=\frac{2^{m\left[\frac{n}{m}\right]}-1}{2^m-1}\cdot 2^n, \forall\, m,n \in \mathbb{N}^*$.

66**. Să se arate că: $\left[\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}\right]=[\sqrt{n+1}], \forall\, n \in \mathbb{N}$.

67. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in (0,1)$. Să se arate că: $[\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}]=[\sqrt{4n-3}]$.

68***. Calculaţi:

$$E_n=\left[\sqrt{n(n+5)}+\sqrt{(n+1)(n+4)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

69***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in (0,1)$. Să se arate că:

$$[\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+\sqrt{n}]=[\sqrt{9n-2}].$$

70**. Să se arate că:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{n-\frac{1}{k(k+1)}}+\sqrt{n}+\sqrt{n+\frac{1}{k(k+1)}}\right]=n[\sqrt{9n-2}], \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

71**. Să se arate că: $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}]=[\sqrt{16n+20}]$.

72***. Fie k un număr natural. Atunci au loc egalităţile:

a) $[\sqrt{k+a}+\sqrt{k+a+1}]=[\sqrt{4k+1}], \forall\, a \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

b) Fie k un număr natural astfel încât $4k+4$ nu este pătrat perfect, atunci: $[\sqrt{k+a}+\sqrt{k+a+1}]=[\sqrt{4k+1}], \forall\, a \in \left[0,\frac{3}{4}\right]$.

73***. Să se arate că: $\left[\frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}+4\sqrt{n}}{2}\right]=[\sqrt{9n-2}], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in (0,1)$.

74***. Să se arate că, pentru orice $k, n \in \mathbb{N}^*$ $k \geq 2$, $n \geq 2^{k-3}$, avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left[\sqrt[k]{n}+\sqrt[k]{n+1}\right]=\left[\sqrt[k]{2^k\cdot n+2^{k-1}}\right].$$

75*. Să se arate că:

$$\left[\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+2}+\cdots+\sqrt{4n^2+4n}\right]=8n^2+2n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

76*. Să se arate că, pentru orice $n,p\in\mathbb{N}^*, p\geq 2, n\geq \left[\frac{p}{2}\right]^2-2\left[\frac{p}{2}\right]$, avem

$$\left[\sqrt[p]{(n+1)(n+2)+\cdots+(n+p)}\right]=n+\left[\frac{p}{2}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţii 6 | Egalităţi şi identităţi

§ 1.

1*. Se verifică pentru $n = 2k,\ n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$.

2. $ke - 1 < [ke] \leq ke \Rightarrow k - 1 < k - \frac{1}{e} \leq \frac{[ke]}{e} \leq k \Rightarrow \left[\frac{[ke]}{e}\right] = k - 1.$

Analog $k\pi - 1 < [k\pi] \leq k\pi \Rightarrow k - 1 < k - \frac{1}{\pi} \leq \frac{[k\pi]}{\pi} \leq k \Rightarrow \left[\frac{[k\pi]}{\pi}\right] =$

$= k - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{[ke]}{e}\right] + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{[k\pi]}{\pi}\right] = n(n-1) \quad (\text{unde } e \cong 2{,}71 \text{ şi } \pi \approx 3{,}14).$$

3. $E(x) = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + 1 + \left[\frac{1}{x+1}\right] + \cdots + 1 + \left[\frac{1}{x+n-1}\right] =$

$$= n + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{x+1}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{x+n-1}\right] = n + \left[\frac{1}{x}\right]$$

deoarece $\left[\frac{1}{x+p}\right] = 0, \forall\, p \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

4.** Fie $n = 25k + r,\ 0 \leq r \leq 24,\ r \in \mathbb{N}$, atunci relaţia devine:

$\left[\frac{r+2}{3}\right] = \left[\frac{8r+24}{25}\right]$ care verifică pentru orice $r \in \{0,1,\ldots,24\}$ şi prin urmare egalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5.** Se poate arăta că funcţia $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \left[\frac{n - \left[\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right] - \left[\frac{8n+5}{25}\right] \text{ este}$$

periodică cu $T = 25m$, adică $f(n+25) = f(n), \forall\, n \in \mathbb{Z}$ şi prin urmare verificăm pentru $n \in \{0,1,2,\ldots,23,24\} = A$. De remarcat că $\frac{n+7}{25} \in \mathbb{Z}$ numai dacă $n \equiv 18$ şi pentru $n = 18$ egalitatea se verifică. Trebuie arătat că pentru $n \neq 18$, adică pentru $n \in A - \{18\}$ este adevărată egalitatea, adică $\frac{n+7}{25} \notin \mathbb{Z}$ şi cum $[x] + [-x] = -1$, rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$\left[-\frac{n+7}{25}\right]+\left[\frac{n+7}{25}\right]=-1, \frac{k}{2} \leq 3n<\frac{k+1}{2}$. Avem:

$$\left[\frac{n-\left[\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right]=\left[\frac{n+1+\left[-\frac{n+7}{25}\right]}{3}\right]=\left[\frac{\left[\frac{24n+18}{25}\right]}{3}\right]=\left[\frac{24n+18}{3\cdot 25}\right]=$$

$=\left[\frac{8n+5}{25}\right]$, dar se arată că pentru $n \in A-\{18\}$ $\left[\frac{8n+5}{25}\right]=\left[\frac{8n+6}{25}\right]$

deci egalitatea din enunț este adevărată.

6. Evident $2n-2<\sqrt{4n^2-6n+4}<2n-1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2-6n+4}\right]=$

$=2n-2$ și

$2-\frac{2}{n}<\frac{\sqrt{4n^2-6n+4}}{n}<2-\frac{1}{n} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{4n^2-6n+4}}{n}\right]=1$ deci expresia din

stânga este $2n\cdot 1-(2n-2)=2$.

7**. Avem $n<n^{n^2}\sqrt{n+1}<n+1$ deoarece $n^{n^2}\sqrt{n+1}<n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow {}^{n^2}\sqrt{n+1}<<1+\frac{1}{n} \Rightarrow (n+1)<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (inegalitatea Bernoulli) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[n^{n^2}\sqrt{n+1}\right]=n$. Analog:

$n<n^{n^2}\sqrt{n+1}<n+1$ deoarece $n+2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \Leftrightarrow \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}>$

$>(1+1)^n=2^n \geq n+2, \forall\, n \geq 2 \Rightarrow \left[n^{n^2}\sqrt{n+1}\right]=n.$

De asemenea rezultă $n<n^{n^2}\sqrt{n+3}<n+1$. Ultima inegalitate devine:

$$n+3<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \Leftrightarrow \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n} \geq 2^n \geq n+3, \forall\, n \geq 3.$$

Nelu Chichirim

8. Avem: $\left[\frac{n(m\alpha-\{m\alpha\})}{\alpha}\right]=\left[nm-\frac{n\{m\alpha\}}{\alpha}\right]=mn+\left[\frac{-n\{m\alpha\}}{\alpha}\right]=$

$=m\cdot n-1$.

9. Se consideră pe rând $n \in \{3k, 3k+1, 3k+2\}$.

10**. Avem $[a]^3+3[a[a]](a-[a])+3\{a\}\{a[a]\}+\{a\}^3=$

$=[a]^3+3\{a\}[a[a]+3\{a\}\{a[a]\}]+\{a\}^3=$

$=[a]^3+3\{a\}([a[a]]+\{a[a]\})+\{a\}^3=[a]^3+3\{a\}a[a]+\{a\}^3=$

$=[a]^3+3\{a\}[a]([a]+\{a\})+\{a\}^3=([a]+\{a\})^3=a^3$

Scanned with OKEN Scanner

sau notând $[a]=k, \{a\}=t \Rightarrow$

$(k+t)^3 = k^3 + 3(k+t)\big[k[k+t]\big] - 3k\big[k[k+t]\big] + 3t\{k[k+t]\} + t^3$

ș.a.m.d.

11**. Fie $m \in \mathbb{Z}$.

a) Se consideră m par sau impar.

Pentru $m = 2p, p \in \mathbb{Z}$, avem $p^2 + p^2 = 2p^2$, iar pentru $m = 2p+1, p \in \mathbb{Z}$, avem $\left[p+\frac{1}{2}\right]^2 + [p+1]^2 = [2p^2+2p+1] \Leftrightarrow p^2 + (p+1)^2 =$

$= 2p^2 + 2p + 1$.

b) Considerăm cazurile $m = 3p + r, r \in \{0,1,2\}$.

Pentru $m = 3p$, relația devine $[p]^2 + \left[p+\frac{1}{3}\right]^2 + \left[p+\frac{2}{3}\right]^2 =$

$= \left[3p^2 + \frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow p^2 + p^2 + p^2 = 3p^2$.

Pentru $m = 3p+1 \Rightarrow \left[p+\frac{1}{3}\right]^2 + \left[p+\frac{2}{3}\right]^2 + [p+1]^2 = [3p^2+2p+1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 + p^2 + (p+1)^2 = 3p^2 + 2p + 1$.

La fel pentru $m = 3p+2 \Rightarrow p^2 + (p+1)^2 + (p+1)^2 = 3p^2 + 4p + 2$.

Dragoș Popescu

12**. Avem $\left[\frac{a+3}{6}\right] + \left[\frac{a+5}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+4}{6}\right]$.

Notăm cu A membrul stâng și cu B membrul drept.

$$A = \left[\frac{a+3}{6}\right] + \left[\frac{a+3}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{a+3}{6} + \frac{2}{3}\right] - \left[\frac{a+3}{6} + \frac{2}{3}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] =$$

$$= \left[3 \cdot \frac{a+3}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] - \left[\frac{a+3}{6} + \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{a+3}{2}\right] - \left[\frac{a+7}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] =$$

$$= \left[\frac{a+1}{2}\right] + 1 - \left(\left[\frac{a+1}{6}\right] + 1\right) + \left[\frac{a+1}{3}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+1}{3}\right] - \left[\frac{a+1}{6}\right].$$

Utilizând identitatea lui Hermite avem:

$\left[\frac{a+1}{3}\right] = \left[2 \cdot \frac{a+1}{6}\right] = \left[\frac{a+1}{6}\right] + \left[\frac{a+1}{6} + \frac{1}{2}\right]$ suma aceasta devine:

$$\left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+1}{6}\right] + \left[\frac{a+4}{6}\right] - \left[\frac{a+1}{6}\right] = \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left[\frac{a+1}{6}\right] = B.$$

13*. Pentru $n \in \{4p, 4p+3\}$ cu $p \in \mathbb{Z}$ rezultă:

$\frac{n^2-3n}{4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\frac{n^2-3n}{4}\right\} = 0$ deci egalitatea este adevărată.

Pentru $n = 4p+1$, avem $\frac{n(n-3)}{4} = 4p^2 - p - 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\frac{n^2-3n}{4}\right\} = \frac{1}{2}$

deci membrul stâng devine:

Scanned with OKEN Scanner

$\left\{\frac{n^2-3n}{4}\cdot\frac{1}{2}\right\}=\left\{\frac{n^2-3n}{8}\right\}\neq 0$ și egalitatea nu poate avea loc.

Pentru $n=4p+2$ egalitatea tot nu se realizează.

Așadar, pentru $n\in\{4p,4p+3\}$ are loc egalitatea dată.

Ovidiu Pop, G.M. nr. 2/2003

14*. Fie $x=a+\alpha$, unde $a=[x],\alpha=\{x\}$ și $y=b+\beta$, unde $b=[y]$ și $\beta=\{y\}$. Condițiile date devin: $\begin{matrix}a+2b+\beta=43{,}8\\ b+\alpha+\beta=18{,}4\end{matrix}$ $(*)\Rightarrow$

$\Rightarrow\{\beta=0{,}8$ și $\alpha+\beta=1{,}4\Rightarrow$

$\alpha=0{,}6$, atunci $(*)$ devine $\begin{cases}a+2b=43\\ b=17\end{cases}\Rightarrow a=9$

$x=9{,}6,\ y=17{,}8$. Atunci $E=10\cdot 27{,}4=274$.

15*. $x+ky-1<[x+ky]\leq x+ky$ și prin însumare rezultă:

$$nx+\frac{n(n+1)}{2}y-n<nE_n(x)\leq nx+\frac{n(n+1)}{2}y$$

$$n\left(\frac{2x+ny+y}{2}\right)-n<nE_n\leq\frac{n(2x+ny+y)}{2}$$

$$\frac{n(2m+ny)}{2}-n<nE_n<\frac{n(2m+ny)}{2}$$

$$m+\frac{ny}{2}-1<E_n<m+\frac{ny}{2},0\leq m+\frac{ny}{2}-E<1$$

$$nx+ny-m-\frac{ny}{2}<nx+my-E<nx+ny-m-\frac{ny}{2}+1$$

$$m(n-1)<nx+ny-E<m(n-1)+1.$$

Dan Secleman

16. $kx-1<[kx]\leq kx$ și prin însumare rezultă:

$$\frac{n(n+1)}{2}x-n<nE_n(x)\leq\frac{n(n+1)}{2}x$$

$$\Rightarrow 0\leq\frac{n(n+1)}{2}x-E_n(x)<1\Rightarrow[F_n(x)]=0.$$

17*. Avem $\left[\frac{k^3}{p}\right]+\left[\frac{(p-k)^3}{p}\right]=\frac{k^3}{p}+\frac{(p-k)^3}{p}-\left(\left\{\frac{k^3}{p}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^3}{p}\right\}\right)=$

$=p^2-3pk+3k^2-1$ deoarece $\left\{\frac{k^3}{p}\right\}+\left\{\frac{(p-k)^3}{p}\right\}=1.$

Într-adevăr, cum $\frac{k^3}{p}+\frac{(p-k)^3}{p}=p^2-3pk+3k^2-4=m\in\mathbb{Z},$

atunci $\left\{\frac{k^3}{p}\right\}+\left\{m-\frac{k^3}{p}\right\}=\left\{\frac{k^3}{p}\right\}+\left\{\frac{-k^3}{p}\right\}=1.$

Se aplică egalitatea $\{x\}+\{-x\}\equiv 1,\forall\, x\notin\mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

18*. Avem: $1 < \sqrt{1+a} < \sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}$ și aplicând inegalitatea CBS obținem $\left(1\sqrt{1+a} + 1\sqrt{1-a}\right)^2 \leq (1+1)(1+a+1-a) = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{1+a} + \sqrt{1-a} < 2, \forall\, a \in [-1,1] - \{0\}$.
Prin urmare, $\left[\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}\right] = 1$.

19*. Cum $\left[\sqrt{n^2-1}\right] = n-1, \forall\, n \geq 2$, avem:

$$E_n = \left\{\sqrt{n^2-1}\right\} + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} = \sqrt{n^2-1} - \left[\sqrt{n^2-1}\right] + \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}} =$$

$$= \sqrt{n^2-1} - n + \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} + 1 = \sqrt{n^2-1} - n + n - \sqrt{n^2-1} + 1 = 1$$

$\Rightarrow E_n = 1$.

20**. Se arată că $E_n(a) \in \mathbb{Z}$, unde $E_n(a) = A_n(a) + B_n(a)$ cu $A_n(a) = \left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^n$ și $B_n(a) = \left(a - \sqrt{a^2-1}\right)^n$.
Avem $[A_n(a)] + \{A_n(a)\} + [B_n(a)] + \{B_n(a)\} \equiv A_n(a) + B_n(a) \equiv E_n(a) \in$
$\in \mathbb{Z} \Rightarrow \{A_n(a)\} + \{B_n(a)\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{A_n(a)\} + \{B_n(a)\} = 1$, unde $A_n(a)$, $B_n(a) \notin \mathbb{Z}$.

21**. a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $k^2 \leq a < (k+1)^2$ (1)
$k^2 \leq [a] < (k+1)^2 \Rightarrow k \leq \sqrt{[a]} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{[a]}\right] = k$, dar din (1) avem și $k \leq \sqrt{a} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{a}\right] = k$, deci $\left[\sqrt{a}\right] = \left[\sqrt{[a]}\right]$.

b) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $k^4 \leq a < (k+1)^4 \Rightarrow k^2 \leq \sqrt{a} < (k+1)^2$
$\Rightarrow k \leq \sqrt{\sqrt{a}} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = k$, dar și $k^2 \leq \left[\sqrt{a}\right] < (k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \leq \sqrt{\sqrt{a}} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = k$, deci $\left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = \left[\sqrt{\left[\sqrt{a}\right]}\right]$. Pentru prima egalitate se poate utiliza și rezultatul de la (1) făcându-se substituția $a \to \sqrt{a}$ obținem: $\left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = \left[\sqrt{\left[\sqrt{a}\right]}\right]$ (2). Utilizând din nou (1) în relația (2) obținem:

$$\left[\sqrt{\sqrt{a}}\right] = \left[\sqrt{\left[\sqrt{a}\right]}\right] = \left[\sqrt{\left[\sqrt{[a]}\right]}\right].$$

Facem următoarea observație: semnul părții întregi se adaugă succesiv sub fiecare semn de radical. În primul membru, un semn [ ], în al doilea două semne și în al treilea, trei semne. Rezultatul se poate geometriza.

Andrei Cristian, CdP

Scanned with OKEN Scanner

22**. a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $k^n \leq a < (a+1)^n$ $k?$ (1)
$\Rightarrow k \leq \sqrt[n]{a} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{a}\right] = k$ şi din (1) $\Rightarrow$ $k^n \leq [a] < (k+1)^n$
$\Rightarrow k \leq \left[\sqrt[n]{a}\right] < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{[a]}\right] = k$, deci $\left[\sqrt[n]{a}\right] = \left[\sqrt[n]{[a]}\right]$.

b) Fie $a = m + t, m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1)$ atunci:
$m \leq a < m+1 \Rightarrow m^n \leq a^n < (m+1)^n \Rightarrow m^n \leq [a^n] < (m+1)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow m \leq \sqrt[n]{[a^n]} < m+1 \Rightarrow \sqrt[n]{[a^n]} = m = [a]$.

Florin Rotaru, G.M. nr. 1991

23**. Demonstrăm mai întâi că $\left[\sqrt[n]{a}\right] = \left[\sqrt[n]{[a]}\right]$.
Fie $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $k^n \leq a < (k+1)^n \Rightarrow k^n \leq [a] < (k+1)^n \Rightarrow$
$\left[\sqrt[n]{[a]}\right] = k$ deci
$k \in \sqrt[n]{a} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{[a]}\right] = k$, deci $\left[\sqrt[n]{a}\right] = \left[\sqrt[n]{[a]}\right], (\forall)\ a \geq 0$ (1).
Efectuând substituirea $a \to \sqrt[n]{a}$ în ultima egalitate, obţinem:

$$\left[\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right] = \left[\left[\sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{a}\right]}\right]\right] = \left[\sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{[a]}\right]}\right] \quad (2),$$

unde s-a aplicat din nou relaţia (1) în termenul al doilea al egalităţii (2).
Pentru ultima egalitate se schimbă m cu n.
Soluție alternativă
Fie $p = \left[\sqrt[nm]{a}\right] \Rightarrow p^{nm} \leq a < (p+1)^{nm} \Rightarrow p^n \leq \left[\sqrt[m]{a}\right] < (p+1)^n$ şi cum
$p^n \in \mathbb{N} \Rightarrow p^n \leq \left[\sqrt[m]{a}\right] < (p+1)^n \Rightarrow p = \sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{a}\right]} < p+1 \Rightarrow p = \left[\sqrt[n]{\left[\sqrt[m]{a}\right]}\right]$.
Schimbând n cu m rezultă şi egalităţile rămase.

Andrei Cristian, CdP

24***. Dacă $x \in \mathbb{N}$, egalitatea este evidentă.

a) Presupunem că există $x > 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left[\frac{\sqrt[p]{[x]}}{n}\right] \neq \left[\frac{\sqrt[p]{x}}{n}\right] \text{ şi cum } \sqrt[p]{[x]} < \sqrt[p]{x} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt[p]{[x]}}{n}\right] < \left[\frac{\sqrt[p]{x}}{n}\right],$$

deci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{\sqrt[p]{[x]}}{n} < k < \frac{\sqrt[p]{x}}{n} \Rightarrow [x] < (kn)^p \leq x$, fals
(deoarece $(kn)^p \in \mathbb{N}^*$).

b) Alegem $x = 1 + \frac{1}{q}$ şi $n = 1$. Cum $[x] = 1$ rezultă $[[x]^q] = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [x^q] = \left[\left(1+\frac{1}{q}\right)^q\right] \geq \left[1 + q\frac{1}{q}\right] = 2, \text{ deci } [[x]^q] \neq [x^q].$$

Paul Georgescu, Gabriel Popa, G.M. nr. 2/2010

Scanned with OKEN Scanner

25**. a) Aplicând inegalitatea CBS avem
$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)^2 < 3(3n+6) = 9n+18$
(inegalitatea este strictă!). Aplicând inegalitatea mediilor avem:
$3\sqrt[3]{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}} \le \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}$
$9\sqrt[3]{\left((\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2})(\sqrt{n+3})\right)^2} < \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)^2,$
dar cum $9n+17 < 9\sqrt[3]{\left(\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\sqrt{n+3}\right)^2}$ (se verifică prin calcul)
rezultă că $9n+17 < \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)^2 < 9n+18 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right)^2\right] = [9n+17] = 9n+17.$

b) Aplicând rezultatul de la ex. 51 Cap. V rezultă
$\sqrt{9n+17} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3} < \sqrt{9n+18} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}\right] = \left[\sqrt{9n+17}\right]$ (vezi ex. 51 Cap. V).

Gh. Andrei, Constantin Caragea, O.L., 1991 (vezi generalizarea ex. 41)

26. a) Fie $k = \sqrt[n]{m} \Rightarrow k-1 = \sqrt[n]{(k-1)^n} \le \sqrt[n]{k^n-1} = \sqrt[n]{m-1} <$
$< \sqrt[n]{k^n} = k \Rightarrow \left[\sqrt[n]{m-1}\right] = k-1 = \left[\sqrt[n]{m}\right]-1 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{m}\right] = \left[\sqrt[n]{m-1}\right]+1.$

b) Notăm $\left[\sqrt[n]{m}\right] = k \Leftrightarrow k < \sqrt[n]{m} < k+1, k^n < m < (k+1)^n \Rightarrow$
$\Rightarrow k^n \le m-1 < (k+1)^n \Rightarrow k \le \sqrt[n]{m-1} < k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt[n]{m-1}\right] = k = \left[\sqrt[n]{m}\right].$
Reciprocele implicaţiilor a) şi b) se rezolvă prin aducere la absurd.

CdP (1)

27***. Fie $n = m^P$ şi fie şirul $a_m = m - \sqrt[p+1]{m^P}$ care este crescător şi poate avea valori oricât de mari ($a_n \to \infty$) cu $a_{m+1} - a_m < 1$.
Într-adevăr $a_{m+1} - a_m = 1 - \left(\sqrt[p+1]{(m+1)^p} - \sqrt[p+1]{m}\right) < 1$. Rezultă că există $m_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_{m_0-1} \le k-1 < a_{m_0} < k$ (din $a_{m_0} - a_{m_0-1} <$
$< 1) \Rightarrow m_0 - k < m_0 - a_{m_0} < m_0 - k + 1 \Leftrightarrow m_0 - k <$
$< \sqrt[p+1]{m_0^p} < m_0 - k + 1 \Rightarrow \left[\sqrt[p+1]{m^P}\right] = m_0 - k \Rightarrow \left[\sqrt[p]{m_0^p}\right] - \left[\sqrt[p+1]{m_0^p}\right] = k.$

Laurenţiu Panaitopol

28**. <u>Soluţia 1</u>
Arătăm că $5 < a_n < 6 \Rightarrow [a_n] = 5$. Într-adevăr $\sqrt[n]{5} < \sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{5}$ şi
$\sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{6} + \sqrt[n]{5} < \sqrt[n]{6} \Leftrightarrow \sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{6} < \sqrt[n]{6} - \sqrt[n]{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[n]{7^{n-1}} + \sqrt[n]{7^{n-2}\cdot 6} + \cdots + \sqrt[n]{6^{n-1}}} < \dfrac{1}{\sqrt[n]{6^{n-1}} + \sqrt[n]{6^{n-2}\cdot 5} + \cdots + \sqrt[n]{5^{n-1}}}$

Soluția 2

Se consideră funcția strict descrescătoare $f(k)=\sqrt[n]{k+1}-\sqrt[n]{k}\Rightarrow$ $f(6)<f(5)$ etc.

Cristinel Mortici, G.M. nr. 9/1997

29**. Fie șirurile $x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2}, y_n=\dfrac{-1+\sqrt{1+4(n+1)^2}}{2}, n\in\mathbb{N}$ și cum $x_n, y_n\in(n,n+1)\Rightarrow[x_n]=[y_n]=n.$

Ovidiu Pop, R.M., 2013

30***. a) Avem $2n<n+\sqrt{n+1}<2n+1\Rightarrow\left[n+\sqrt{n+1}\right]=2n$

$2n+1<n+1+\sqrt{n^2+2n}<2n+2\Rightarrow\left[n+1+\sqrt{n^2+2n}\right]=2n+1$

și suma din stânga este egală cu $4n+1$.

Pentru suma din dreapta avem:

$2n<\sqrt{4n^2+2n}<2n+1\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+2n}\right]=2n$

$2n+1<\sqrt{4n^2+8n+2}<2n+2\Rightarrow\left[\sqrt{4n^2+8n+2}\right]=2n+1$

și suma din dreapta este egală cu $4n+1$.

b) Analog, avem:

$$\begin{cases}n-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n^2-n+1}<n\\ n+\dfrac{1}{2}<\sqrt{n^2+n+1}<n+1\end{cases}\Rightarrow 2n<\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}$$

$$<2n+1$$

$\Rightarrow\left[\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right]=2n$ și

$$\begin{cases}n+\dfrac{1}{2}<\sqrt{n^2+n+1}<n+1\\ n+\dfrac{3}{2}<\sqrt{n^2+3n+3}<n+2\end{cases}\Rightarrow 2n+2<\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+3n+3}$$

$<2n+3\Rightarrow\left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+3n+3}\right]=2n+2.$

Așadar, suma din stânga este egală cu $4n+2$.

Pentru suma din dreapta:

$$\begin{cases}2n<\sqrt{4n^2+3}<2n+\dfrac{1}{2}\\ 2n+2<\sqrt{4n^2+8n+5}<2n+\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4n+2<\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+8n+2}<4n+3\\ \left[\sqrt{4n^2+3}+\sqrt{4n^2+8n+5}\right]=4n+2\end{cases}$$

Așadar, ambii membri sunt egali cu $4n+2$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Avem $2n < \sqrt{4n^2+3} < 2n+\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2+3}\right] = 2n$ și

$2n+2 < \sqrt{4n^2+8n+7} < 2n+3 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2+8n+7}\right] = 2n+2$

deci membrul drept este egal cu $4n+2$. De asemenea avem:

$n-\frac{1}{2} < \sqrt{n^2-n+1} < n-\frac{1}{3}$ (1) și $n+\frac{1}{2} < \sqrt{n^2+n+1} < n+1$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2+n+1}\right] = 2n$ și $2n+2 < \sqrt{n^2+n+1}+$

$+\sqrt{n^2+3n+2} < n+1+n+\frac{3}{2} = 2n+\frac{5}{2}$ (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+3n+2}\right] = 2n+2.$

Prin urmare și membrul stâng este egal cu $4n+2$.

Prima inegalitate din (3) se arată prin calcul.

Mihaly Bencze, Octogon

ϕ 2. Probleme de concurs

31**. a) Considerăm n par sau impar.

Pentru $n = 2m \Rightarrow A = \left[\frac{(2m+1)^2}{2}\right] - \left[\frac{4m^2}{2}\right] = 2m^2+2m-2m^2 = 2m$

și pentru $n = 2m+1 \Rightarrow A = \left[\frac{(2m+2)^2}{2}\right] - \left[\frac{(2m+1)^2}{2}\right] = 2(m+1)^2 -$

$-2m^2-2m = 2m+2 = n+1 \Rightarrow A_{(n)} = \begin{cases} n & ,n \text{ par} \\ n+1, & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{(n)} = 2\left[\frac{n+1}{2}\right].$

b) În mod analog, rezultă $B_{(n)} = \begin{cases} n+2, & n \text{ par} \\ n+1, & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow B_{(n)} = 2\left[\frac{n+2}{2}\right].$

c) În mod analog, pentru $n = 2m \Rightarrow C = m = \frac{n}{2}$

și pentru $n = 2m+1 \Rightarrow C = m+1 = \frac{n+1}{2}.$

Prin urmare $C_{(n)} = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ par} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow C_{(n)} = \left[\frac{2n+2}{4}\right]$

ultima egalitate se verifică.

d) Se consideră cazurile $n = 3m, n = 3m+1$ și $n = 3m+2$.

Pentru $n = 3m \Rightarrow D = 2m = \frac{2n}{3}.$

Pentru $n = 3m+1 \Rightarrow D = 2m+1 = \dfrac{2n+1}{3}$ și

pentru $n = 3m+2 \Rightarrow D = 2m+2 = 2\dfrac{n-2}{3}+2 = \dfrac{2n+2}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_{(n)} = \begin{cases} \dfrac{2n}{3}, \text{dacă } n = 3m \\ \dfrac{2n+1}{3}, \text{dacă } n = 3m+1 \\ \dfrac{2n+2}{3}, \text{dacă } n = 3m+2 \end{cases}.$$

Se poate deduce că $D_{(n)} = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$.

preluare Vasile Zidaru, G.M. nr. 7/1980

32***. a) Considerăm cazurile m par și m impar și rezultă imediat egalitățile.

b) Se consideră cazurile $m = 3p+r, r \in \{0,1,2\}$ cu $p \in \mathbb{Z}$.

Dacă $m = 3p \Rightarrow [p]\left[p+\frac{1}{3}\right] + \left[p+\frac{1}{3}\right]\left[p+\frac{2}{3}\right] + \left[p+\frac{2}{3}\right][p] = [3p^2]$,

adevărată.

Dacă $m = 3p+1 \Rightarrow \left[p+\frac{1}{3}\right]\left[p+\frac{2}{3}\right] + \left[p+\frac{2}{3}\right][p+1] + [p+1]\left[p+\frac{1}{3}\right] =$

$= \left[3p^2+2p+\frac{1}{3}\right] \Rightarrow p^2 + p(p+1) + p(p+1) = 3p^2+2p.$

Dacă $m = 3p+2 \Rightarrow \left[p+\frac{2}{3}\right][p+1] + [p+1]\left[p+\frac{4}{3}\right] + \left[p+\frac{1}{3}\right]\left[p+\frac{2}{3}\right] =$

$= \left[3p^2+4p+\frac{4}{3}\right] \Rightarrow p(p+1) + (p+1)^2 + p(p+1) = 3p^2+4p+1.$

c) Se consideră situațiile $m = 4p+r,\ r \in \{0,1,2,3\}$ și în fiecare din cele 4 cazuri se verifică egalitatea. Generalizare:

$$\left[\frac{m}{n}\right]\left[\frac{m+1}{n}\right] + \left[\frac{m+1}{n}\right]\left[\frac{m+2}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{m+n-1}{n}\right]\left[\frac{m}{n}\right] = \left[\frac{m^2}{n}\right].$$

M.O. Drîmbe

33**. a) Utilizând inegalitatea $a+b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}, \forall a,b \in \mathbb{R}$, avem:

$\sqrt{n^2+k} + \sqrt{(n+1)^2-k} < \sqrt{2[2n^2+2n+1]} = \sqrt{4n^2+4n+2} <$

$< 2n + \dfrac{1}{4n} + 1$ verifică prin ridicare la pătrat, $0 \le k \le 2n+1$

$\Rightarrow 2n+1 < \sqrt{n^2+k} + \sqrt{(n+1)^2-k} < 2n+2$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2+k} + \sqrt{(n+1)^2-k}\right] = 2n+1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, 0 \le k \le 2n+1.$

Scanned with OKEN Scanner

b) Se verifică prin calcul că:

$$n^2+n<\sqrt{(n^2+k)((n+1)^2-k)}<n^2+n+\frac{1}{2}<n^2+n+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\sqrt{(n^2+k)((n+1)^2-k)}\right]=n^2+n.$$

Gh. Andrei

34***. Fie $a=\sqrt{n}+\sqrt{n+k}$ și $b=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+k-1}$ și evident $a<b$. Utilizând inegalitatea $a+b\leq\sqrt{2(a^2+b^2)}$ deci: $\sqrt{n}+\sqrt{n+k}<$ $<\sqrt{2(2n+k)}=\sqrt{4n+2k}$ și $\sqrt{n+1}+\sqrt{n+k-1}<\sqrt{2(2n+k)}=$ $=\sqrt{4n+2k}$.

Se arată că: $\sqrt{4n+2k-1}<a<\sqrt{4n+2k}\Rightarrow\sqrt{4n+2k-1}<b<$ $<\sqrt{4n+2k}$ și nu există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât:

$\sqrt{4n+2k-1}<p<\sqrt{4n+2k}\Leftrightarrow 2k-1<p^2-4n<2k$, fals.

Prin urmare, $\left[\sqrt{4n+2k-1}\right]=\left[\sqrt{4n+2k}\right]\Rightarrow[a]=[b]=\left[\sqrt{4n+2k}\right]$.

Cerasela Grigore, Birant Ramazan, G.M. nr. 7/1991

35***. Fie $m=ka+r,\ n=kb+q$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$ și $r,q\in\mathbb{N}$ cu $r\leq k-1, q\leq k-1\Rightarrow m-n=k(a-b)+r-q$

$\left[\frac{m}{k}\right]=a,\left[\frac{n}{k}\right]=b$ și $\left[\frac{m-n}{k}\right]=a-b+\left[\frac{r-q}{k}\right]\Rightarrow E(m,n,k)=\left[\frac{r-q}{k}\right]$

cu $-(k-1)\leq r-q<k-1<-1<\frac{r-q}{k}<1\Rightarrow\left[\frac{r-q}{k}\right]\in\{-1,0\}$.

Dar cum $E(0,0,k)=0$ și $E(0,1,k)=\left[\frac{-1}{k}\right]-0+\left[\frac{1}{k}\right]=-1, k\geq 2$.

Rezultă că ambele valori se obțin pentru $k\geq 2$, pentru $k=1\Rightarrow E=0$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, G.M. nr. 3/2010

36. $\sqrt{4n+4k+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+2k+1}<\sqrt{4n+4k+2}$ și nu există $p\in\mathbb{N}$ astfel încât: $\sqrt{4n+4k+1}<p<\sqrt{4n+4k+2}\Leftrightarrow$

$0<\underbrace{p^2-4m-4k-1}_{\in\mathbb{N}}<1$, fals.

Deci, $(\exists)\ q\in\mathbb{N}$ și $q\leq\sqrt{4n+4k+1}<\sqrt{4n+4k+2}<q+1$.

Rezultă că $\left[\sqrt{4n+4k+1}\right]=\left[\sqrt{4n+4k+2}\right]=\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+2k+1}\right]$.

Willy Portal, G.M. nr. 2-3/1992

(Generalizare a problemei O 386 G.M. nr. 10-11/1983 și 3411 Matematica ϑ scole)

37**. Egalitatea este echivalentă:

$$\Leftrightarrow\sqrt{nk^2+\frac{k^2(k+1)}{2}-1}<\sqrt{n+1}+\cdots+\sqrt{n+k}<\sqrt{nk^2+\frac{k^2(k+1)}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Inducție după k pentru ambele inegalități sau se aplică inegalitatea CBS în dreapta și inegalitatea de medie în stânga.

Ovidiu Pop, G.M. nr. 10/2004

38*. Avem $\sqrt{4n+2k-1} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+k} < \sqrt{4n+2k} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2n+k-1 \leq 2\sqrt{n^2+kn} < 2n+k \Leftrightarrow (k-1)^2-4n \leq 0 < k^2$
deci putem scrie $\left[\sqrt{4n+2k-1}\right] \leq \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right] \leq \left[\sqrt{4n+2k}\right]$.
Dacă $\sqrt{4n+2k} \notin \mathbb{N}$ atunci avem $\left[\sqrt{4n+2k-1}\right] = \left[\sqrt{4n+2k}\right] \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right] = \left[\sqrt{4n+2k-1}\right]$.
Dacă $\sqrt{4n+2k} \in \mathbb{N}$ atunci avem (conform ex. 12)
$\sqrt{4n+2k} = \left[\sqrt{4n+2k}\right] = \left[\sqrt{4n+2k-1}\right]+1$, dar avem și
$\sqrt{n}+\sqrt{n+k} < \sqrt{4n+2k}$ deci obținem: $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+k}\right] = \left[\sqrt{4n+2k-1}\right]$.
Observație: s-a utilizat ex. 51 Cap. V.

O.M. Drîmbe

39. Se arată că $\sqrt{n^2-kn}+\sqrt{n^2+kn} < \sqrt{4n^2-k^2}$ de unde rezultă:
$\left[\sqrt{n^2-kn}+\sqrt{n^2+kn}\right] \leq \left[\sqrt{4n^2-k^2}\right]$ (1).
Să presupunem că există n, cu $n \geq \dfrac{k^2+1}{2}$ pentru care inegalitatea (1) este strictă.
Prin urmare, există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât:
$\sqrt{n^2-kn}+\sqrt{n^2+kn} < m < \sqrt{4n^2-k^2}$ (2)
și prin ridicare la pătrat rezultă:
$2\sqrt{n^4-k^2n^2} < m^2-2n^2 < 2n^2-k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4n^4-4k^2n^2 < (m^2-2n^2)^2 < (2n^2-k^2)^2$ (3).
Pentru $n \geq \dfrac{k^2+1}{2} \Rightarrow 4n^4-k^2n^2 \geq (2n^2-k^2-1)^2$
ceea ce arată că (3) este imposibilă.
Așadar, $\left[\sqrt{n^2-kn}+\sqrt{n^2+kn}\right] = \left[\sqrt{4n^2-k^2}\right], \forall\, n \geq \dfrac{k^2+1}{2}$.

Dumitru Acu, G.M. nr. 5/2005

40**. Avem $E_n = 8n\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)^2 = 8n\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\right)\cdot\ldots\cdot$
$\cdot\left(\dfrac{2n-1}{2n-2}\right)\cdot\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{2n} \geq 2$ (egalitate numai pentru $n=1$).
$E_n = 8n\cdot\dfrac{3}{2^2}\cdot\dfrac{2n-1}{(2n)^2} = \dfrac{6n-3}{2n} < 3 \Rightarrow [E_n] = 2.$

Mihaly Bencze, R.M.T., 2000

Scanned with OKEN Scanner

41***. Notăm $p = kn + 2 \geq 3$ și egalitatea devine:
$[\sqrt{p-1} + \sqrt{p} + \sqrt{p+1}] = [\sqrt{9p-1}]$.
Fie $x = [\sqrt{p-1} + \sqrt{p} + \sqrt{p+1}] \Rightarrow x^2 =$
$= 3p + 2\left(\sqrt{p^2-p} + \sqrt{p^2-1} + \sqrt{p^2+p}\right) \Rightarrow p - \frac{3}{5} < \sqrt{p^2-1} < p - \frac{1}{2}$;
$p - \frac{1}{5} < \sqrt{p^2-1} < p$; $p + \frac{2}{5} < \sqrt{p^2+1} < p + \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3p - \frac{1}{2} < 3p - \frac{2}{5} < x < 3p \Rightarrow 9p - 1 < x^2 < 9p \Rightarrow \sqrt{9p-1} < x < \sqrt{9p}$.
Dacă $p = m^2, m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3m - 1 < \sqrt{9p-1} < x < 3m \Rightarrow$
$\Rightarrow [x] = [\sqrt{9p-1}] = 3m - 1$. Dacă p nu e pătrat perfect și $t = [\sqrt{9p}] \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 < 9p \Rightarrow t^2 \leq 9p - 1$, deci $t \leq \sqrt{9p-1} < t + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sqrt{9p-1}] = t \Rightarrow t = [\sqrt{9p-1}] \leq [x] \leq [\sqrt{9p}] = t \Rightarrow [x] = [\sqrt{9p-1}]$.

Cristian Moanță, G.M. nr. 4/2010

42***. Considerăm funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(n) = \left[\frac{3n+8}{25}\right] - \left[\frac{n+2}{25}\right] - \left[\frac{n+1}{25}\right] - \left[\frac{n+19}{25}\right]$.
Arătăm că f are perioada $T = 25$.
Într-adevăr: $f(n+25) = \left[\frac{3n+83}{25}\right] - \left[\frac{n+27}{25}\right] - \left[\frac{n+36}{25}\right] - \left[\frac{n+44}{25}\right] =$
$= \left[\frac{3n+8}{25}\right] + 3 - \left[\frac{n+2}{25}\right] - 1 - \left[\frac{n+11}{25}\right] - 1 - \left[\frac{n+19}{25}\right] - 1 = f(n)$.
Este necesar să verificăm egalitatea pentru $n \in \{0,1,2,3,\ldots,24\}$, care se verifică cu ușurință.

43***. <u>Soluția 1</u>
Considerăm funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$f(n) = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n+3}{6}\right]$
și se deduce că $f(n+6) = f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$ și prin urmare vom calcula $f(n)$ pentru $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ și se deduce că $f(n) = 0$, deci $f(n) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>Soluția 2</u>
Aplicăm identitatea lui Hermite pentru $n = 2$ și $n = 3$.
Avem $\left[\frac{n}{3}\right] = \left[2\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right]$; $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[3 \cdot \frac{n}{6}\right] =$
$= \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right]$
care introduse în ambii membri, rezultă o identitate
adică ambii membri sunt egali cu: $\left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 3

Evident $n = 6m + r, r \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Vom da un tabel al valorilor fiecărui termen de unde va rezulta egalitatea din enunț.

n	$\left[\frac{n}{3}\right]$	$\left[\frac{n+2}{6}\right]$	$\left[\frac{n+4}{6}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n+3}{6}\right]$
$6m$	$2m$	m	m	$3m$	m
$6m+1$	$2m$	m	m	$3m$	m
$6m+2$	$2m$	m	$m+1$	$3m+1$	m
$6m+3$	$2m+1$	m	$m+1$	$3m+1$	$m+1$
$6m+4$	$2m+1$	$m+1$	$m+1$	$3m+2$	$m+1$
$6m+5$	$2m+1$	$m+1$	$m+1$	$3m+2$	$m+1$

44*.** Soluția 1

Se consideră pe rând $n \in \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\}$.

Soluția 2

Dacă $n \in \{4k, 4k+2\}$, atunci $\frac{(n+2)^2}{4} \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right] = \frac{(n+2)^2}{4}$.

Avem $\left[\frac{n^2+n}{4}\right] = \left[\frac{(n+2)^2}{4} - 1 - \frac{3n}{4}\right] = \frac{(n+2)^2}{4} - 1 + \left[-\frac{3n}{4}\right]$

$\left[\frac{n^2+7n+12}{4}\right] = \left[\frac{(n+2)^2}{4} + \frac{3n}{4} + 2\right] = \frac{(n+2)^2}{4} + 2 + \left[\frac{3n}{4}\right]$

$\left[\frac{n^2+3n+2}{4}\right] = \left[\frac{(n+2)^2}{4} - \frac{n-2}{4}\right] = \frac{(n+2)^2}{4} + \left[-\frac{n+2}{4}\right]$

$\left[\frac{n^2+5n+6}{4}\right] = \left[\frac{(n+2)^2}{4} + \frac{n+2}{4}\right] = \frac{(n+2)^2}{4} + \left[\frac{n+2}{4}\right]$.

Avem $S = 4\frac{(n+2)^2}{4} + 1 + \left[\frac{3n}{4}\right] + \left[\frac{-3n}{4}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[-\frac{n+2}{4}\right]$.

Dacă $n = 4k \Rightarrow S = (n+2)^2 + 1 + \left(\frac{3n}{4}\right) + \left(-\frac{3n}{4}\right) + (-1) = (n+2)^2$.

Deoarece $[-x] + [x] = -1$, dacă $x \notin \mathbb{Z}$.

Dacă $n = 4k+2$ $b \Rightarrow S = (n+2)^2 + 1 - 1 + 0 = (n+2)^2$.

Pentru $n \in \{4k+1, 4k+3\}$ punem în evidență $\frac{(n+1)^2}{4} \in \mathbb{N}$ deci

$\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right] = \frac{(n+1)^2}{4}$.

Obținem $\left[\frac{n^2+n}{4}\right] = \left[\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{n+1}{4}\right] = \frac{(n+1)^2}{4} + \left[-\frac{n+1}{4}\right]$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left[\frac{n^2+3n+2}{4}\right]=\left[\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{n+1}{4}\right]=\frac{(n+1)^2}{4}+\left[\frac{n+1}{4}\right]$$

$$\left[\frac{n^2+5n+6}{4}\right]=\left[\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{3n+5}{4}\right]=\left[\frac{(n+1)^2}{4}+n+1-\frac{n-1}{4}\right]=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}+n+1+\left[-\frac{n-1}{4}\right]$$

$$\left[\frac{n^2+7n+12}{4}\right]=\left[\frac{(n+1)^2}{4}+n+2+\frac{n+3}{4}\right]=$$

$$=\frac{(n+2)^2}{4}+n+2+\left[\frac{n+3}{4}\right]=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}+n+3+\left[\frac{n-1}{4}\right]\Rightarrow S_n=4\frac{(n+1)^2}{4}+n+3+n+1+$$

$$+\left[-\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right]+\left[-\frac{n-1}{4}\right]=$$

$$=(n+1)^2+2n+4+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[-\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right]+\left[-\frac{n-1}{4}\right].$$

Dacă $n=4k+1\Rightarrow\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[-\frac{n+1}{4}\right]=-1$ și $\left[\frac{n-1}{4}\right]+\left[-\frac{n-1}{4}\right]=0$

$\Rightarrow S_n=(n+1)^2+2n+3=(n+2)^2$.

Analog dacă $n=4k+3$.

45***. Vom arăta că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+\frac{2}{2n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{2n}\right]-$$

$$-n(3[x]-[2x])-[2\{x\}]\cdot[2n\{x\}]$$

este periodică cu $T=1$ și că $f(x)=0,\forall\, x\in\mathbb{R}$. Avem:

$$f(x+1)=[x+1]+\left[x+1+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+1+\frac{2}{2n}\right]+\cdots+\left[x+1+\frac{n-1}{2n}\right]-$$

$$-n(3[x+1]-[2(x+1)])-[2\{x+1\}]\cdot[2n\{x+1\}]=$$

$$=[x]+\left[x+\frac{1}{2n}\right]+\left[x+\frac{2}{2n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{2n}\right]+n-$$

$$-n(3[x]+3-[2x])-2-[2\{x\}]\cdot[2n\{x\}]=f(x).$$

Prin urmare, este suficient să arătăm că $f(x)=0,\forall\, x\in[0,1)$.

Fie $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,

atunci $[x]=\left[x+\frac{1}{2n}\right]=\left[x+\frac{2}{2n}\right]=\cdots=\left[x+\frac{n-1}{2n}\right]=0$ și $[2n\{x\}]=0$,

prin urmare $f(x)=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci $\{x\} = x, [x] = 0, [2\{x\}] = [2x] = 1$ și

$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2n}\right] + \left[x + \frac{2}{2n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{2n}\right] + n - [2nx].$

Calculăm $f\left(x + \frac{1}{2n}\right) = \left[x + \frac{1}{2n}\right] + \left[x + \frac{2}{2n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{2n}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] +$

$+ n - [2nx + 1] = f(x)$, întrucât $\left[x + \frac{1}{2}\right] = 1.$

Prin urmare, $f(x) = 0, \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right).$

Pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$ avem:

$[x] = \left[x + \frac{1}{2n}\right] = \left[x + \frac{2}{2n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{2n}\right] = 0$ și $[2nx] = n \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0.$

O.M. Drîmbe

46**. Fie $n = k^2 + k, k \in \mathbb{N}^*$. Avem:

$\sqrt{n + 1 + \sqrt{n}} = \sqrt{k^2 + k + 1 + \sqrt{k^2 + k}} \geq \sqrt{k^2 + k + 1 + k} = k + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n + 1 + \sqrt{n}}\right] \geq k + 1$, dar

$\sqrt{n + \sqrt{n + 1}} = \sqrt{k^2 + k + \sqrt{k^2 + k + 1}} < \sqrt{k^2 + k + \sqrt{k^2 + 2k + 1}} =$

$= k + 1 = \sqrt{k^2 + 2k + 1} = k + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\sqrt{n + \sqrt{n + 1}}\right] < k + 1 \leq \left[\left[\sqrt{n + 1 + \sqrt{n}}\right]\right].$

Andrei Horvat, Concursul „Grigore Moisil"

47**. Soluția 1

Fie $a = \sqrt{n} + \sqrt{n + 1}$ și $b = \sqrt{4n + 2}$ și cum $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow x = y$ deci este suficient să demonstrăm că $[a] = [b]$.

Evident $a \leq b \Rightarrow [a] \leq [b]$ și $\sqrt{4n + 1} \leq a \Rightarrow$ și $b \leq \sqrt{4n + 1} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [b] < \left[\sqrt{4n + 1}\right] + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n + 1}\right] \leq [a] \leq [b] < \left[\sqrt{4n + 1}\right] + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [a] = [b] = \left[\sqrt{4n + 1}\right]$ de unde rezultă egalitatea din enunț.

Soluția 2

Se știe că $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n + 1}\right] = \left[\sqrt{4n + 2}\right]$ (vezi punctul a)).

Concurs „Gh. Țițeica", 2002

Scanned with OKEN Scanner

48***. a) Pentru $n \in \{3,4\}$ se verifică direct. Fie $n \geq 5$, atunci avem:

$\sqrt{4n-2} \leq \sqrt{n+3}+\sqrt{n-3} < 2\sqrt{n} \Rightarrow 4n-2 \leq \left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}\right)^2 < 4n$

$\Rightarrow 4n-2 \leq \left[\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}\right)^2\right] < 4n \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n-2 \leq \left[\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}\right)^2\right] \leq 4n-1.$

Așadar, expresia $\left[\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}\right)^2\right] \in \{4n-2, 4n-1\}$ care nu pot fi pătrate perfecte.

b) Avem $\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m} < 2\sqrt{n} \Rightarrow \left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-,}\right)^2 < 4n$

$\Rightarrow \left[\left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}\right)^2\right] < 4n \Rightarrow \left[\left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}\right)^2\right] \leq 4n-1.$

Arătăm că $\sqrt{4n-2} \leq \sqrt{n+m}+\sqrt{n-m} \Rightarrow 4n-2 \leq 2n+2\sqrt{n^2-m^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow n-1 \leq \sqrt{n^2-m^2} \Leftrightarrow m^2 \leq 2n-1.$

Prin urmare $4n-2 \leq \left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}\right)^2 < 4n-1$

$4n-2 \leq \left[\left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}\right)^2\right] \leq 4n-1$

$\Rightarrow \left[\left(\sqrt{n+m}+\sqrt{n-m}\right)^2\right] \in \{4n-2, 4n-1\}$

care nu pot fi pătrate perfecte.

Concurs Coreea, 1995

49***. Vom arăta că expresia $n \leq E_n < n+1$.

Într-adevăr $E_n \geq n \Leftrightarrow \left[\frac{na^2+2}{a}\right]+2 \geq na$ (1)

și $E_{n+1} < n+1 \Leftrightarrow \left[\frac{na^2+2}{a}\right]+2 < (n+1)a$ (2)

$\left[\frac{na^2+2}{a}\right] = \left[na+\frac{2}{a}\right] > na+\left[\frac{2}{a}\right] > na+\frac{2}{a}-1$

$\Rightarrow \left[\frac{na^2+2}{a}\right]+2 > na+\frac{2}{a}+1 > na$

și $\left[\frac{na^2+2}{a}\right] \leq \frac{na^2+2}{a} \Rightarrow \left[\frac{na^2+2}{a}\right]+2 \leq na+\frac{2}{a}+2 < (n+1)a$

(s-a ținut cont că $a \geq 1+\sqrt{3}$).

Irinel Dafincescu, Concurs „Matematica – modus vivendi", 2006

50***. Considerăm funcția $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}^*, f(n) = n+\sqrt{n}+\frac{1}{2}$ strict crescătoare cu $f(0) = \frac{1}{2}$ și $f(n+1)-f(n) = 1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1$ (1).

Scanned with OKEN Scanner

Fie $m \notin \left\{k+\sqrt{k}+\frac{1}{2}\right\}, k \in \mathbb{N}^*$ (2). În baza lui (1) deducem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $n+\sqrt{n}+\frac{1}{2} < m \leq n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow m \leq \left[n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow m+1 \leq \left[n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2}\right] \leq$

$\leq n+1+\sqrt{n+1}+\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{n}+\frac{1}{2} < m-n \leq \sqrt{n+1}+\frac{1}{2}.$

Notând $p = m-n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n < \left(p-\frac{1}{2}\right)^2 \leq n+1 \Rightarrow -\frac{1}{4} <$

$< p^2-p-n \leq \frac{3}{4}$ (3).

Dar cum $t^2-t-n \in \mathbb{Z}$, atunci din (3) deducem:

$p^2-p-n=0 \Rightarrow n = p^2-p \Rightarrow m = n+p = p^2.$

De unde rezultă cerința.

CdP Alex Gică

51*. Avem $\left\{\sqrt{n^2+5n+3}\right\} = \sqrt{n^2+5n+3} - \left[\sqrt{n^2+5n+3}\right] =$

$= \sqrt{n^2+5n+3} - (n+2)$ (deoarece $\left[\sqrt{n^2+5n+3}\right] = n+2$ deci

$\sqrt{n^2+5n+3} < n+2+\alpha \Rightarrow n+3 < 2n\alpha + (\alpha+2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(2\alpha-1) + (\alpha+2)^2 - 3 > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$

52*. Notăm $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right] = k \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}} < k+1.$

$k^2-k \leq n < k^2+k \Rightarrow k^2-k \leq n \leq k^2+k-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4} < k^2-k+\frac{1}{2} < n+\frac{1}{2} < k^2+k-\frac{1}{2} < k^2+k+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \left(k-\frac{1}{2}\right) < \sqrt{n+\frac{1}{2}} < k+\frac{1}{2} \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}} < k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right] = k.$

Concursul „Teodor Topan", 2015

53***. Avem $\frac{1}{2}+\sqrt{n}-1 < \left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right] \leq \frac{1}{2}+\sqrt{n}-\frac{1}{2}-\sqrt{n-a} \leq$

$\leq -\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n-a}\right] < -\frac{1}{2}-\sqrt{n}+1 \Rightarrow \sqrt{n}-\sqrt{n-a}-1 < 0 < 1.$

Dacă considerăm funcția $f(n) = \sqrt{n}-\sqrt{n-a}-1$, pentru $f(n) = 0 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\sqrt{n-a}=\sqrt{n}-1\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{1+a}{2}\Rightarrow n_0=\left(\frac{1+a}{2}\right)^2<1\Rightarrow$

$\Rightarrow f(n_0)=f\left(\frac{(a+1)^2}{4}\right)=\frac{1+a}{2}-\sqrt{\left(\frac{1+a}{2}\right)^2-a-1}=a-1<0$

deoarece $a\in\left(0,\frac{3}{4}\right]$ și $n-a\geq a\Rightarrow n\in[a,\infty)\cap\mathbb{N}^*\Rightarrow f(n)<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Funcția nu are rădăcini pe $[a,\infty)$, deci are semn constant.

Cezar Stoica, O.L. Ploiești, 2013

54***. Pentru $n\in\{1,2\}\Rightarrow\left[\sqrt{1+a}+\frac{1}{2}\right]=n$ și $\left[\sqrt{2+a}+\frac{1}{2}\right]=1\Rightarrow$

$a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Arătăm că pentru $a\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ egalitatea este adevărată pentru orice n.

Fie $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow p^2-p+\frac{1}{4}\leq n<p^2+p+\frac{1}{4}$, dar cum $n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow p^2-p+1\leq n\leq p^2+p\Rightarrow p^2-p+1+a\leq n+a\leq p^2+p+a$

$\Rightarrow p^2-p+\frac{1}{4}\leq n+a<p^2+p+\frac{1}{4}\Rightarrow p\leq\sqrt{n+a}+\frac{1}{2}<p+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\sqrt{n+a}+\frac{1}{2}\right]=p.$

Concurs Slovenia, 2005

55**. Demonstrăm că $\left(2^{[\sqrt{n}]}\right)^2<n+2^{2[\sqrt{n}]}+3<\left(2^{[\sqrt{n}]}+1\right)^2$ de unde rezultă

$2^{[\sqrt{n}]}<\sqrt{n+4^{[\sqrt{n}]}+1}<2^{[\sqrt{n}]}+1\Rightarrow\left[\sqrt{n+4^{[\sqrt{n}]}+1}\right]=2^{[\sqrt{n}]},\forall n\geq 4.$

Prima inegalitate este evidentă, iar pentru a doua rezultă $n<2\cdot 2^{[\sqrt{n}]}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n<2^{[\sqrt{n}]+1}$. Într-adevăr din $\sqrt{n}-1<[\sqrt{n}]\leq\sqrt{n}\Rightarrow 2^{[\sqrt{n}]+1}>2^{\sqrt{n}}\geq n$,

$\forall n\geq 4\left(3<4^{\sqrt{2}}+3<4\right)$. Notăm cu $E_n=\left[\sqrt{n+4^{\sqrt{n}}+1}\right]\Rightarrow E_0=[\sqrt{2}]=$

$=1$. Pentru $n=1\Rightarrow E_1=[\sqrt{6}]=2, n=2\Rightarrow E_2=3, E_3=3$.

56**. Notăm $\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]=k\Rightarrow k\leq\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}<k+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k-1\leq\sqrt{8n-7}<2k+1\Leftrightarrow(2k-1)^2\leq 8n-7<(2k+1)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{(k-1)k}{2}+1\leq n<\frac{k(k+1)}{2}+1\Leftrightarrow\frac{k(k-1)}{2}<n\leq\frac{k(k+1)}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(2k-1)^2<8n+1<(2k+1)^2\Leftrightarrow 2k-1<\sqrt{8n+1}\leq 2k+1\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow -2k-1 \le -\sqrt{8n+1} < -2k+1 \Leftrightarrow -k \le \frac{1-\sqrt{8n+1}}{2} < -k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -k = \left[\frac{1-\sqrt{8n+1}}{2}\right]$ deci egalitatea este adevărată.

M.O. Drîmbe

57***. Soluția 1

Dacă $a \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a^2 - a - 1 \ge 0 \Rightarrow a \ge \frac{1}{a} + 1$

$\Rightarrow \left[\frac{1+na^2}{a}\right] = \left[\frac{1}{a} + na\right] = \frac{1}{a} + na - t, 0 \le t < 1$

$\Rightarrow \left[\frac{1+\left[\frac{1+na^2}{a}\right]}{a}\right] = \left[\frac{1+\frac{1}{a}+na-t}{a}\right] = \left[\left(1+\frac{1}{a}-t\right)\frac{1}{a}+n\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N},$

deoarece $\left(1+\frac{1}{a}-t\right)\frac{1}{a} \le (a-t)\frac{1}{a} = 1-\frac{t}{a} < 1$, $\left(1+\frac{1}{a}-t\right)\frac{1}{a} > \frac{1}{a^2} > 0$.

Soluția 2

Arătăm că $\frac{1+\left[\frac{1+na^2}{a}\right]}{a} \ge n \Leftrightarrow na - 1 \le \left[\frac{1+na^2}{a}\right]$.

Apoi demonstrăm că $\frac{1+\left[\frac{1+na^2}{a}\right]}{a} < n+1 \Leftrightarrow 1+\left[\frac{1+na^2}{a}\right] < an+a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{1+na^2}{a}\right] < an+a-1$, dar $\left[\frac{1+na^2}{a}\right] \le \frac{1+na^2}{a} < an+a-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+na^2 < a^2n+a^2-a \Rightarrow n(a^2-a)+a^2-a-1 > 0$, cu $a^2-a > 0$ și $a^2-a-1 > 0$

deoarece $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ este rădăcină a ecuației $x^2 - x - 1 = 0$.

Titu Andreescu, R.M.T. nr. 1/1978

58**. Vom arăta că $\left[n\sqrt[n^2]{2n}\right] = n$ de unde va rezulta și egalitatea din enunț. Avem: $n < n\sqrt[n^2]{2n} < n+1$. Prima inegalitate este evidentă, iar pentru a doua rezultă: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \ge 2n$ care rezultă din $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^n \ge 2^n \ge 2n$, $\forall\, n \ge 2$.

Nelu Chichirim, Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

59**. Notăm $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow k\le\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1\Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow k^2-k+1\le n\le k^2+k$ (2) $k^2-k+\frac{1}{4}\le n\le k^2+k.$

Din (1) rezultă $k-1<k-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<k+\frac{1}{2}\Rightarrow k-1\le[\sqrt{n}]\le k$ (3).

Din (2) și (3) rezultă $k^2\le n+[\sqrt{n}]\le k^2+2k<(k+1)^2$

$k<\sqrt{n+[\sqrt{n}]}<k+1\Rightarrow\left[\sqrt{n+[\sqrt{n}]}\right]=k.$

60**. a) <u>Soluția 1</u>

Notăm $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=p$ (1) și $\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right]=q$ (2) unde $p,q\in\mathbb{N}.$

Din (1) rezultă $p\le\sqrt{n}+\frac{1}{2}<p+1\Rightarrow p-\frac{1}{2}\le\sqrt{n}<p+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow p^2-p+\frac{1}{4}\le n<p^2+p+\frac{1}{4}\Rightarrow p^2-p+1\le n\le p^2+p.$

Din (2) $q\le\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}<q+1\Rightarrow q^2-q+\frac{1}{4}\le n-\frac{3}{4}<q^2+q+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow q^2-q+1\le n\le q^2+q\Rightarrow p=q.$

<u>Soluția 2</u>

Arătăm $\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}<\sqrt{n}+\frac{1}{2}$. Dacă $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=k$

$\Rightarrow k<\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4}<n\Rightarrow k^2-k+1\le n$

$(2k-1)<\sqrt{4n-3}\Rightarrow 2k<\sqrt{4n-3}+1\Rightarrow k<\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}.$

Prin urmare, avem $k<\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}<\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1,$

$\left[\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}\right]=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right].$

Concurs Austria

b) Notăm $k=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow k\le\sqrt{n}+\frac{1}{2}<k+1\Rightarrow k^2-k+\frac{1}{4}\le n<$

$<k^2+k+\frac{1}{4}\Rightarrow k^2<k^2+\frac{1}{4}\le n+k<k^2+2k+\frac{1}{4}<(k+1)^2.$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, expresia $n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=n+k$

este cuprinsă între două pătrate perfecte deci $\sqrt{n+k}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Gh. Stoica, G.M. nr. 12/2017

61*.** Soluția 1

Fie $k=[\sqrt{n}+1]\Rightarrow\sqrt{n-1}<k-1=[\sqrt{n}]\leq\sqrt{n}\Rightarrow k>\sqrt{n}\Rightarrow$

$\Rightarrow k-\sqrt{n}=\frac{k^2-n}{k+\sqrt{n}}>\frac{1}{2k}\Rightarrow 2k^2-2k\sqrt{n}-1>0$ cu rădăcinile

$\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2}\Rightarrow k>\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2}=\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}>\sqrt{n}.$

Prin urmare, rezultă $[\sqrt{n}]+1>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}>[\sqrt{n}]$

$\Rightarrow\left[\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\right]=[\sqrt{n}].$

Gh. Eckstein, R.M.T. nr. 2/1984

Soluția 2

Notăm $[\sqrt{n}]=k\in\mathbb{N}\Rightarrow k\leq\sqrt{n}<k+1\Rightarrow k^2<n<(k+1)^2\Rightarrow k^2\leq n\leq$

$\leq(k+1)^2-1\Rightarrow k\leq\sqrt{n}\leq\sqrt{(k+1)^2-1}$ de unde rezultă că $k\leq\sqrt{n}<$

$<\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$. Vom arăta că $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}<k+1\quad(*)m$

de unde rezultă că $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right]=k=[\sqrt{n}]$. Să arătăm $(*)$

că $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}\leq$

$\leq\frac{\sqrt{(k+1)^2+1}+\sqrt{(k+1)^2-1}}{2}<k+1$

deoarece se arată după calcule că

$\sqrt{(k+1)^2+1}+\sqrt{(k+1)^2-1}\leq 2k+2.$

Gh. Eckstein, Concurs „ONI(x) Math", 2014

62.** Utilizăm identitatea lui Hermite $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, unde

$x=\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$.

Avem $\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right]+\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{2}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right]\Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right]+\left[\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}+1}{2}\right]=\left[\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right]-\left[\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right]=-\left[\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}+1}{2}\right]$$

deoarece $\left[\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right]=0.$

Nicolae Stănică, O.L. Brăila

63***. Va fi suficient să arătăm că

$$\sqrt{n}\notin\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\sqrt{n-\frac{1}{4}}\right]=\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}\right]$$

$$\sqrt{n}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\sqrt{n-\frac{1}{4}}\right]\neq\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}\right]$$

pentru implicaţiile inverse se procedează prin reducere la absurd.

Fie $\sqrt{n}=k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n=k^2\Rightarrow\left[\sqrt{n-\frac{1}{4}}\right]=\left[\sqrt{k^2-\frac{1}{4}}\right]=k-1$ şi

$\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}\right]=\left[\sqrt{k^2-\frac{3}{4}}\right]=k$ deci $\left[\sqrt{n-\frac{1}{4}}\right]\neq\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}\right]$. Fie $\sqrt{n}\notin\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\sqrt{n-\frac{1}{4}}\right]=k\Rightarrow k\leq\sqrt{n-\frac{1}{4}}<k+1\Rightarrow k^2+\frac{1}{4}\leq n<(k+1)^2+\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2+1\leq n\leq k^2+2k\Rightarrow k^2+\frac{7}{4}\leq n+\frac{3}{4}\leq k^2+2k+\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2<n+\frac{3}{4}<(k+1)^2\Rightarrow\left[n+\frac{3}{4}\right]=k=\left[n-\frac{1}{4}\right].$$

64***. Fie $\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]=k, k\in\mathbb{N}^*$, dar cum $\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}$

va fi suficient să arătăm că $\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$

Într-adevăr din $k\leq\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}<k+1\Rightarrow 8n-7<(2k+1)^2\Rightarrow 2n<$

$$<k^2+k+2\Rightarrow 2n\leq k^2+k\Rightarrow 2n<k^2+k+\frac{1}{4}\Rightarrow\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2}<k+1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că $\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

CdP

65***. Dacă $n<m \Rightarrow \left[\frac{n}{m}\right]=0$ și $\left[\frac{2^n-1}{2^m-1}\right]=0$, egalitate adevărată.

La fel pentru $n=m$. Fie $n>m \Rightarrow \exists\, k,r \in \mathbb{N}$ astfel încât $n=mk+r,\ 0 \leq$

$\leq r<m$. Egalitatea devine $\left[\frac{2^{mk+r}-1}{2^m-1}\right]\cdot 2^{mk}=\frac{2^{mk}-1}{2^m-1}\cdot 2^{mk+2} \Leftrightarrow$ (*)

$\Leftrightarrow \left[\frac{2^{mk+r}-1}{2^m-1}\right]=\frac{2^{mk}-1}{2^m-1}\cdot 2^r$. Dar $\frac{2^{mk+r}-1}{2^m-1}=\frac{2^r(2^{mk}-1)}{2^m-1}+\frac{2^r-1}{2^m-1}$,

unde $\frac{2^r(2^{mk}-1)}{2^m-1} \in \mathbb{N}$ și $\frac{2^r-1}{2^m-1} \in (0,1)$ deci $\left[\frac{2^{mk+r}-1}{2^m-1}\right]=\frac{2^r(2^{mk}-1)}{2^m-1}$

și egalitatea (*) este adevărată.

O.L. Vaslui, 2006

66**. <u>Soluția 1</u>

Observăm că $\frac{n}{2}+1+2\sqrt{\frac{n}{4}\left(\frac{n}{4}+1\right)}=\left(\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}\right)^2$ deci vom arăta că

$\sqrt{n+1}<\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}<\sqrt{n+2}$ (*) de unde rezultă egalitatea dată.

Notăm $\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}=a$ și (*) devine $\sqrt{n+1}<a<\sqrt{n+2}$.

Există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m^2 \leq n+1<n+2 \leq (m+1)^2$

$\Rightarrow m \leq \sqrt{n+1}<\sqrt{n+2} \leq m+1$ deci

$\Rightarrow [a]=\left[\sqrt{n+1}\right]=m \Rightarrow \left[\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}\right]=\left[\sqrt{n+1}\right]$.

(Se poate considera $n \in \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3\}$ și se ține seama că $\left[\sqrt{4k+1}\right]=\left[\sqrt{4k+2}\right]=\left[\sqrt{4k+3}\right]$.)

67. Pentru $n \geq 2$ avem: $\sqrt{4n-3}<\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a} \Leftrightarrow$ (1)

$\Leftrightarrow 4n-3<2n+2\sqrt{n^2-a^2} \Leftrightarrow 2n-3<2\sqrt{n^2-a^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n^2-12n+9<4n^2-4a^2 \Rightarrow 12n>4a^2+9$.

Ultima inegalitate devine: $12n \geq 24>13>4n^2+9$.

Notând $k=\left[\sqrt{4n-3}\right]$ din (1) rezultă: $k=\left[\sqrt{4n-3}\right] \leq \sqrt{4n-3}<$

$<\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}<\sqrt{4n}$ (2)

(deoarece $E^2=\left(\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}\right)^2<2(n+a+n-a)=4n \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}<\sqrt{4n}$).

Scanned with OKEN Scanner

Avem $k \le \sqrt{4n-3} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \le 4n-3 < (k+1)^2$, dar cum $4n-1$ și $4n-2$ nu pot fi pătrate perfecte rezultă că $4n \le (k+1)^2$.
Prin urmare din (2) rezultă $k < \sqrt{n+a}+\sqrt{n-a} < \sqrt{4n} \le k+1$, adică $\left[\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}\right] = k = \left[\sqrt{4n-3}\right]$.
Rămâne să arătăm că egalitatea este adevărată și pentru $n=1$, adică $\left[\sqrt{n+a}+\sqrt{n-a}\right] = 1, \forall\, a \in (0,1)$.
Într-adevăr $1 < \sqrt{1+a}+\sqrt{1-a} < 2$ deoarece
$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)^2 = 2+2\sqrt{1-a^2} < 4 \Rightarrow \sqrt{n+a}+\sqrt{n-a} < 2$.

Marius Drăgan, (L) 600

68***. Considerăm $n \ge 7$ și notăm $m = n^2+5n \ge 84$ și
$F_n = \sqrt{n(n+5)}+\sqrt{(n+1)(n+4)}+\sqrt{(n+2)(n+3)} =$
$= \sqrt{m}+\sqrt{m+4}+\sqrt{m+6}$.
Vom arăta că: $\sqrt{9m+28} < F_n < \sqrt{9m+30}, \forall\, m \ge 5$ (1).
Avem $F_n < \sqrt{3(m+m+4+m+6)} = \sqrt{3(3m+10)} = \sqrt{9m+30}$ (2)
și $\sqrt{9m+28} < \sqrt{m}+\sqrt{m+4}+\sqrt{m+6}$ (3)
care se verifică prin calcul.
Dar cum $9m+29$ nu este pătrat perfect rezultă că:
$F_n = [F_n] = \left[\sqrt{9m+28}\right] = \left[\sqrt{9n^2+45n+28}\right]$ (vezi ex. 51 Cap. V) (4)
verifică $3n+7 < \sqrt{5n^2+45n+28} < 3n+8$ (5)
care este adevărată pentru $n \ge 7$ deci: $\left[\sqrt{9n^2+45n+28}\right] = 3n+7$.
Pentru $n=0 \Rightarrow E_n = [F_n] = 4$ și $E_n = [F_n] = 3n+6$ pentru $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Prin urmare, $E_n = \begin{cases} 4, & n=0 \\ 3n+6, & n \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 3n+7, & n \ge 7 \end{cases}$.

Marius Drăgan, (L) 600

69***. Vom arăta că:
$\sqrt{9n-2} < \sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n} < \sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+\sqrt{n} < \sqrt{9n}$ (*).
Pentru prima inegalitate avem: $\sqrt{9n-2}-\sqrt{n-1} < \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow 10n-3-2\sqrt{(9n-2)(n-1)} < 2n+1+2\sqrt{n^2+n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4n-2 < \sqrt{n^2+n}+\sqrt{9n^2-11n+2}$
care este evident adevărată, deoarece putem deduce că:
$\sqrt{n^2+n}+\sqrt{9n^2-11n+2} > \sqrt{n^2}+\sqrt{(3n-2)^2} = 4n-2$.

Scanned with OKEN Scanner

Inegalitatea devine $\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}<\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+\sqrt{n}$.
Rămâne să arătăm ultima inegalitate din (*) care rezultă din inegalitatea CBS.

$$\left(\left(1\cdot\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+1\cdot\sqrt{n}\right)^2<(1^2+1^2+1^2)(n-a+n+a+n)=\right.$$
$$\left.=9n\Rightarrow\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+\sqrt{n}<\sqrt{9n}\right).$$

Dacă notăm $k=[\sqrt{9n-2}]$, atunci:
$k^2\leq 9n-2<(k+1)^2$, dar întrucât $9n-1$ nu poate fi pătrat perfect $\Rightarrow$
$\Rightarrow 9n\leq(k+1)^2\Rightarrow\sqrt{9n}\leq k+1$.
Aplicând în (*) funcția parte întreagă, rezultă:
$k=[\sqrt{9n-2}]\leq\sqrt{9n-2}<\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+\sqrt{n}<\sqrt{9n}\leq k+1$
$\Rightarrow[\sqrt{9n-2}]=[\sqrt{n-a}+\sqrt{n+a}+\sqrt{n}]$.

Marius Drăgan, (L) 600

70**. Se poate arăta (vezi exercițiul precedent) că:
$[\sqrt{n-a}+\sqrt{n}+\sqrt{n+a}]=[\sqrt{9n-2}],\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ și $a\in(0,1)$.
Prin urmare, suma de mai sus este egală cu $n[\sqrt{9n-2}]$.

71**. Notăm cu $E_n=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}$.
Trebuie să arătăm că:
$\sqrt{16n+20}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}<\sqrt{16n+24}$ (1).
Pentru inegalitatea din dreapta avem:
$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}<\sqrt{4(n+n+1+n+2+n+3)}=$
$=\sqrt{16n+24}$.
În cele ce urmează vom utiliza inegalitatea:
$\sqrt{n(n+k)}\geq n+\sqrt{k+1}-1,\forall\, k\in\mathbb{N}^*$ (2).
Într-adevăr, rezultă $n(n+k)\geq n^2+2n(\sqrt{k+1}-1)+k+2-$
$-2\sqrt{k+1}\Rightarrow(k-2\sqrt{k+1}+2)\geq k+2-2\sqrt{k+1},\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.
Prin urmare, $E_n^2=4n+6+2\left[\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+3)}+\right.$
$\left.+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+3)}+\sqrt{(n+2)(n+3)}\right]=4n+6+2F_n$.
Dar $F_n\geq n+\sqrt{2}-1+n+\sqrt{3}-1+n+\sqrt{4}-1+n+1+\sqrt{2}-1+n+$
$+\sqrt{3}-1\Rightarrow$ (s-a aplicat (2)) $n+2+\sqrt{2}-1=6n+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}>6n+7$
$\Rightarrow E_n^2=4n+6+2(6n+7)=16n+20$ (utilizând $\mathbf{P_{42}}$ Cap. I sau ex. 51 Cap. V).

(L) 600

Scanned with OKEN Scanner

72*.** a) Mai întâi trebuie să demonstrăm identitatea:

$\left[\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}\right]=[\sqrt{n+1}]$.

Într-adevăr, vom arăta că:

$\sqrt{n+1}<\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}<\sqrt{n+2}\Rightarrow\sqrt{n+1}<x<\sqrt{n+2}$.

Există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$m^2\leq n+1<n+2\leq(m+1)^2\Rightarrow m\leq\sqrt{n+1}<\sqrt{n+2}\leq m+1$.

Dar $m\leq\sqrt{n+1}<\sqrt{n+2}\leq m+1\Rightarrow[x]=[\sqrt{n+1}]=m\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\sqrt{\frac{n}{4}+1}+\sqrt{\frac{n}{4}}\right]=[\sqrt{n+1}]$ (1).

Dacă $n=4k$ din (1) rezultă: $[\sqrt{k}+\sqrt{k+1}]=[\sqrt{4k+1}]$ (2).

Dacă $n=4k+2\Rightarrow\left[\sqrt{k+\frac{3}{2}}+\sqrt{k+\frac{1}{2}}\right]=[\sqrt{4k+3}]$ (3).

Cum $4k+2, 4k+3$ nu pot fi pătrate perfecte atunci: $[\sqrt{4k+1}]=$

$=[\sqrt{4k+3}]$ (4) (vezi și exercițiul precedent).

Din (2), (3) și (4)rezultă: $[\sqrt{k}+\sqrt{k+1}]=\left[\sqrt{k+\frac{1}{2}}+\sqrt{k+\frac{1}{2}+1}\right]=$

$=[\sqrt{4k+1}]$ (5). Cum $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}_+, f(a)=[\sqrt{a+k}+\sqrt{a+k+1}]$

este crescătoare și cum din (5) rezultă $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$, rezultă că f este

constantă pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ deci $f(a)=[\sqrt{4k+1}],\forall\, a\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

c) Dacă în (1) $n=4k+3\Rightarrow\left[\sqrt{k+\frac{3}{4}+1}+\sqrt{k+\frac{3}{4}}\right]=$

$=[\sqrt{4k+4}]$ și $f\left(\frac{3}{4}\right)=[\sqrt{4k+4}]$ (6). Dar cum $4k+2, 4k+3,$

$4k+4$ nu sunt pătrate perfecte atunci: $[\sqrt{4k+1}]=[\sqrt{4k+4}]$ și din (2)

și (6) rezultă $f(0)=f\left(\frac{3}{4}\right)$ care este crescătoare deci f este constantă

pe $\left[0,\frac{3}{4}\right]\Rightarrow f(a)=[\sqrt{4k+1}]$.

Marius Drăgan, L(600)

Scanned with OKEN Scanner

73***. Mai întâi vom arăta că:

$$\sqrt{9n-2} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} + 4\sqrt{n}}{2} <$$

$$< \frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} + 4\sqrt{n}}{2} < \sqrt{9n}, \forall\, n \geq 2.$$

Pentru prima inegalitate, avem:

$$\sqrt{9n-2} - \sqrt{n-1} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \Rightarrow 10n - 3 - 2\sqrt{(9n-2)(n-1)} <$$

$$< 2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n} \Rightarrow 4n - 2 < \sqrt{n^2+n} + \sqrt{9n^2-11n+2} \quad (*)$$

care este evident adevărată, deoarece:

$$\sqrt{n^2+n} + \sqrt{9n^2-11n+2} > \sqrt{n^2} + \sqrt{(3n-2)^2} = 4n-2$$

(vezi și exercițiul precedent), $\forall\, n \geq 2$.

Pentru a demonstra a doua inegalitate rezultă:

$$2\sqrt{n-1} + 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} + 4\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n^2-1} < n.$$

Pentru a treia inegalitate avem:

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} + 4\sqrt{n} < \sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} + 4\sqrt{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} < \sqrt{n+a} + \sqrt{n-a}$ care este evidentă.

Pentru ultima inegalitate avem: $\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} + 4\sqrt{n} < 6\sqrt{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} < 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n^2-a^2} < n$ (evidentă).

Așadar, avem: $\sqrt{9n-2} < \dfrac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} + 4\sqrt{n}}{2} < \sqrt{9n}$ (2).

Într-adevăr notând cu $k = [\sqrt{9n-2}] \Rightarrow k^2 \leq 9n-2 < (k+1)^2$ și cum $9n-1$ nu poate fi pătrat perfect rezultă $k^2 \leq 9n-2 < 9n-1 \leq 9n \leq$ $\leq (k+1)^2$ și (2) devine

$$k \leq \sqrt{9n-2} < \sqrt{9n} \leq k+1, k < \sqrt{9n-2} < \frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} + 4\sqrt{n}}{2} <$$

$$< \sqrt{9n} \leq k+1 \quad (3) \Rightarrow [\sqrt{9n-2}] = \left[\frac{\sqrt{n+a} + \sqrt{n-a} + 4\sqrt{n}}{2}\right], \forall\, n \in \mathbb{R}.$$

Trebuie să arătăm că pentru $n = 1 \Rightarrow \left[\dfrac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{2}\right] + 2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{2} < 1$ care este evident adevărată.

Prin urmare, inegalitatea din enunț este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Marius Drăgan

Scanned with OKEN Scanner

74***. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt[k]{x}$, care este strict crescătoare și concavă, deci avem:

$$\sqrt[k]{n}+\sqrt[k]{n+1}<2\sqrt[k]{\frac{n+n+1}{2}}=\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}}$$

și $\sqrt[k]{n}+\sqrt[k]{n+1}>2\sqrt{\sqrt[k]{n}\cdot\sqrt[k]{n+1}}=2\sqrt[2k]{n^2+n}$.

Avem $2\sqrt[2k]{n^2+n}>\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}-1} \Leftrightarrow 2^{2k}(n^2+n)>(2^k n+2^{k-1}-1)^2$ $\Leftrightarrow 2^{k+1}\cdot n\geq(2^{k-1}-1)^2$ (din $2^{k+1}\cdot n\geq 2^{2k-2}>(2^{k-1}-1)^2$).

Din inegalitățile de mai sus avem:

$\left[\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}-1}\right]\leq\left[\sqrt[k]{n}+\sqrt[k]{n+1}\right]\leq\left[\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}}\right]$ și cum $\left[\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}}\right]=\sqrt[k]{2^{k-1}(2n+1)}\notin\mathbb{N}$ și utilizând o proprietate cunoscută rezultă:

$$\left[\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}-1}\right]=\left[\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}}\right]\Rightarrow\left[\sqrt[k]{n}+\sqrt[k]{n+1}\right]=\left[\sqrt[k]{2^k n+2^{k-1}}\right].$$

M.O. Drîmbe

75***. Soluția 1

Se desparte suma în patru sume:

$$S_1=\sum_{p=1}^{n}\sqrt{4n^2+p},\ S_2=\sum_{p=n}^{n-1}\sqrt{4n^2+p+1},$$

$$S_3=\sum_{p=2n}^{3n-1}\sqrt{4n^2+p+1},\ S_4=\sum_{p=3n}^{4n-1}\sqrt{4n^2+p+1}.$$

Avem
$$2n<\sqrt{4n^2+p}<2n+\frac{1}{4} \qquad p=\overline{1,n}$$
$$2n+\frac{1}{4}<\sqrt{4n^2+p+1}<2n+\frac{1}{2} \qquad p=\overline{n,2n-1}$$
$$2n+\frac{1}{2}<\sqrt{4n^2+p+1}<2n+\frac{3}{4} \qquad p=\overline{2n,3n-1}$$
$$2n+\frac{3}{4}<\sqrt{4n^2+p+1}<2n+1 \qquad p=\overline{3n,4n-1}.$$

Însumând: $8n^2+1{,}5n<S<8n^2+2{,}5n<8n^2+3n\Rightarrow[S]=8n^2+2n$.

Soluția 2

Se arată că $\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+4m}\leq\sqrt{4n^2+m}+\sqrt{4n^2+4n-m+1}\leq$ $\leq\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2+2n+1},\forall m\in\{0,\ldots,2n-1,2n\}$.

Scanned with OKEN Scanner

De aici rezultă că $2n\left(\sqrt{4n^2}+\sqrt{4n^2+4n-1}\right) \leq \sum_{i=m}^{4n}\left(\sqrt{4n^2+i}\right) \leq$

$\leq 2n\left(\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2+2n+1}\right)$. Dar $2n^2+2n \leq 2n(2n+2n+1)$.

Asemănător $2n\left(\sqrt{4n^2+2n}+\sqrt{4n^2+2n+1}\right) < 2n^2+2n+1$ deci

$\left[\sqrt{4n^2+1}+\cdots+\sqrt{4n^2+4n}\right] = 8n^2+8n$.

76*.** Considerăm cazurile n par și n impar.

Fie $p=2k$, atunci avem de arătat că: $(n+k)^{2k} \leq$

$\leq (n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)(n+k)(n+k+1)\cdots(n+2k) \leq$

$\leq (n+k+1)^{2k}$. Într-adevăr din inegalitatea:

$(n+k+1-h)(n+k+1+h) = (n+k+1)^2-h^2 < (n+k+1)^2$

pentru $h \in \{1,2,\cdots,k-1\}$. Înmulțind aceste inegalități și apoi cu

$(n+1)(n+k+1)$, atunci rezultă:

$(n+1)(n+2)\cdots(n+2k) < (n+1)(n+k+1)^{2k-1} < (n+k+1)^{2k}$.

Fie $a<b$ și $h>0 \Rightarrow ab > (a-h)(b+h)$ și din

$(n+k-h)(n+k+1+h) \geq (n+1)(n+2k)$

pentru $h \in \{1,2,3,\cdots,k-1\}$.

Înmulțind aceste inegalități și apoi înmulțind cu $(n+k)(n+k+1) \Rightarrow$

$(n+1)(n+2)\cdots(n+2k) \geq (n+1)^{k-1}(n+2k)^{k-1}(n+k)(n+k+1) >$

$> (n+1)^{k-1}(n+2k)^{k-1}(n+k)^2 \geq (n+k)^{2k}$.

Ultima inegalitate rezultă din:

$$(n+1)(n+2k) \geq (n+k)^2 \Leftrightarrow n+2k \geq k^2 \Leftrightarrow n \geq \left[\frac{p}{2}\right]-2\left[\frac{p}{2}\right].$$

Pentru $p=2k+1$ trebuie să arătăm că

$(n+k)^{2k+1} \leq (n+1)(n+2)\cdots(n+2k+1) < (n+k+1)^{2k+1}$,

dar din $(n+k+1-h)(n+k+k+1+h) = (n+k+1)^2-h^2 <$

$< (n+k+1)^2, h \in \{1,2,\cdots,k\}$.

Înmulțind aceste inegalități și apoi înmulțind cu $n+k+1$, rezultă

$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2k+1) < (n+k+1)^{2k+1}$.

Înmulțind inegalitățile $(n+k-h)(n+k+1+h) \geq (n+1)(n+2k)$

pentru $h \in \{1,2,\cdots,k-1\}$ și înmulțind apoi cu

$(n+k)(n+k+1)(n+2k+1)$ rezultă

$(n+1)(n+2)\cdots(n+2k+1) > (n+1)^{k-1}(n+2k)^{k-1}(n+k)\cdot$

$\cdot(n+k+1)(n+2k+1) > (n+1)^{k-1}(n+2k)^{k-1}(n+k)^2 \geq$

$\geq (n+k)^{2k+1}$.

Dar ultima inegalitate se justifică prin:

$$(n+1)(n+2k) \geq (n+k)^2 \Leftrightarrow n+2k \geq k^2 \Leftrightarrow n \geq \left[\frac{p}{2}\right]^2-2\left[\frac{p}{2}\right].$$

O.M. Drîmbe

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 7 | Mulţimi

1. Să se determine mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = x\}$;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \{x\} = x\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = |x|\}$;
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] + x = k \in \mathbb{Z}\}$;
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid [a][x] = 0, a \in \mathbb{R}\}$;
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid [x]\{x\} = 0\}$;
g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid \{[x]\} = [\{x\}]\}$;
h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid \{|x|\} = |\{x\}|\}$;
i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid [|x|] = |[x]|\}$.

2*. Să se determine mulţimile şi să se reprezinte în plan mulţimile de puncte

a) $A = \{(x, y) | [x] = [y]\}$;
b) $B = \{(x, y) | \{x\} = \{y\}\}$;
c) $C = \{(x, y) | [x] \cdot [y] = 1\}$;
d) $D = \{(x, y) | [x] \cdot [y] = p\}, p$ prim;
e) $E = \{(x, y) | [x] + [y] = 1\}$;
f) $F = \{(x, y) | [x] = |y|\}$;
g) $G = \{(x, y) \big| |x| = |y|\}$.

3*. Demonstraţi că $\left\{y \in \mathbb{R} | y = \frac{x - [x]}{x}, x \in [1, \infty)\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

4. Fie $M = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x + [x]} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 1\right\}$.
Să se determine mulţimea M.

5. Să se determine elementele mulţimii

$$A = \left\{a \in \mathbb{N} | \left[\frac{5x + 1}{2}\right] + \left[\frac{5y + 2}{2}\right] = a, x, y \in \mathbb{N}\right\}.$$

6. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x]^3 - 4[x] - 20 = -[x]^2\}$ şi
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2\{x\}^2 + \{x\} = 1\}$. Să se determine $A \cap B$.

7. Să se determine mulţimea

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} | \left[x + \frac{3}{8}\right] + [x] = \frac{7x - 2}{3}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

8*. Determinați mulțimea

$$M = \left\{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x + [x]} \cdot \sqrt{x - \sqrt{x}} = x\right\}.$$

9*. Să se determine mulțimile:

a) $A = \left\{(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* | \left[\frac{n^2 + 1}{n}\right] = \frac{2005}{p^2 + 1}\right\}$;

b) $B = \left\{(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* | \frac{n^2 + 1}{n} = \left[\frac{2005}{p^2 + 1}\right]\right\}$.

10. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, definim mulțimile

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + [x] \leq n\} \text{ și}$$
$$B_n = \{x \in \mathbb{R} | x + [x^2] \leq n\}.$$

Să se demonstreze că $A_n \subset B_{n+1}$ și $B_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

11. Fie mulțimile

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} | \left[\sqrt{x - 1}\right] = \frac{x - 1}{2}\right\} \text{ și } B = \left\{y \in \mathbb{Z} | \left[\sqrt{y - 2}\right] = \frac{3y - 7}{2}\right\}.$$

Să se determine $A \cap B$ și $A \cup B$.

12*. Să se determine mulțimile

$$A = \{x | x \geq 0 | [x^2] = [x]^2\} \text{ și}$$
$$B = \{x | x \leq 0 | [x^2] = [x]^2\}.$$

13. Să se determine mulțimea

$$M = \{x \geq 1 | x^{[x]} = [x]^x\}.$$

14*. Să se determine cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii

$$A_n = \left\{n + \left[\frac{1999}{n}\right], n = \overline{1,1999}\right\}.$$

15*. Să se determine cel mai mare și cel mai mic element al mulțimii

$$A_n = \left\{n + \left[\frac{2003}{n}\right], 1 \leq n \leq 2003\right\}.$$

16. Să se determine cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii:

$$A = \left\{n + \left[\frac{2015}{n}\right] \middle| n \equiv \overline{1,2015}\right\}.$$

17. Fie $m, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și $A_n = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.
Să se arate că dacă există $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^{n} [x + a_k] = [mx], \forall x \in \mathbb{R}, \text{atunci } m = n \text{ și } A_n \subset [0,1).$$

18*. Să se determine mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} | [2^x] = 2^{[x]}\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

19.** Fie mulțimile $A=\left\{x|2^{[x]}\sqrt{[x]}=1\right\}$ și $B=\left\{x|\{x\}36^{[x]}=81\right\}$.

a) Să se arate că $A\cup B\subset\mathbb{Q}$.

b) $(A\cup B)\cap Z=\emptyset$.

c) Să se determine $A\cap B$.

20*. Să se determine mulțimea

$$A=\{m\in\mathbb{R}|[m[x]]=[[m]x],\forall\, x\in\mathbb{R}\}.$$

21*. Fie mulțimea $A=\left\{a\in\mathbb{R}|\{a\}+\left\{\frac{1}{a}\right\}\in\mathbb{Z}^*\right\}$.

Arătați că A nu conține numere raționale.

22. Determinați cardinalul mulțimii

$$A=\left\{\left\{\frac{n^2}{2}\right\}+\left\{\frac{n^2}{5}\right\},n\in\mathbb{N}\right\}.$$

23.** Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ cu $(m,n)=1$. Să se stabilească egalitatea de mulțimi:

$$\left\{\left\{\frac{m}{n}\right\},\left\{\frac{2m}{n}\right\},\ldots,\left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\}\right\}=\left\{\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}\right\}.$$

24*. Determinați mulțimea $A_n=\left\{n\sqrt{2}+\frac{n}{2}\right\}-\{n\sqrt{2}\},n\in\mathbb{N}$.

25*. Să se determine numărul elementelor mulțimii

$$A_n=\left\{n\sqrt{2}+\frac{n}{3}\right\}-\{n\sqrt{2},n\in\mathbb{N}\}.$$

26.** Fie p un număr prim, $p\geq 3$ și d un număr liber de pătrate. Să se determine numărul elementelor mulțimii

$$A_p=\left\{x=\left\{n\sqrt{d}+\frac{n}{p}\right\}-\{n\sqrt{2}\};|n\in\mathbb{N}\right\}.$$

27.** Fie $A=\{[n\sqrt{2}],n\in\mathbb{N}^*\}$, $B=\{n(2+\sqrt{2}),n\in\mathbb{N}^*\}$.

Să se determine $A\cap B$ și $A\cup B$.

28.** Fie $a,b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ distincte și pozitive.

Arătați că mulțimea $A=\{n\in\mathbb{N}|[na]=[nb]\}$ este finită.

29.** Dacă $a,b\in\mathbb{R}$ notăm cu $M(a,b)=\{n\in\mathbb{N}^*|[na]=[nb]\}$.

a) Să se determine mulțimea $M=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

b) Să se arate că $M(a,b)$ este infinită $\Leftrightarrow a=b$.

30. Fie $A=\left\{x\left|x=\left[\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2\right],n\in\mathbb{N}\right.\right\}$.

Arătați că A conține o infinitate de numere naturale, pătrate perfecte.

31*. Fie $a,b\in\mathbb{N}$. Să se arate că mulțimea

$$M_n=\left\{n\in\mathbb{N}|\left[\sqrt{(n+a)(n+b)}\right]=n+a\right\}$$

este infinită, dacă și numai dacă $b\in\{a,a+1,a+2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

32*.** Să se determine $\min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{100} < \{\sqrt{n}\} < \frac{1}{10}\right\}$.

33*.** Să se determine $\min\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{100} < \left\{\sqrt{[2002x]}\right\} < \frac{1}{10}\right\}$.

34.** Fie $A_p = \{n \in \mathbb{N} \mid n = p[\sqrt{n}] + 1, p \in \mathbb{N}\}$.

a) Determinați A_2.

b) $\forall\, p \geq 3$ mulțimea A_p conține exact două elemente.

35*.** Fie $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ și mulțimea

$$A = \{\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \ldots, \{2009\alpha\}\}.$$

Să se arate că există cel puțin două elemente ale mulțimii A care au primele două zecimale egale.

36*.** Fie $A_p = \{a + b\sqrt{p}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*, p$ număr prim și $a^2 - pb^2 = 1\}$.

a) Să se arate că partea întreagă a oricărui element din A_p este un număr impar.

b) Calculați $[x]$ și $\{x\}, \forall\, x \in A_p$ și arătați că $3\{x\} \leq [x]$.

37*.** Se consideră un număr natural a și mulțimea

$$A_n = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Să se arate că A_n este finită dacă și numai dacă $a \neq 0$.

b) Pentru $a \neq 0$ determinați maximul mulțimii A_n.

38*.** Fie mulțimea $M = \{n \mid n \in \mathbb{Z}, n^2 = x^2 + y^2 + 1, x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Dacă $a, a + 2 \in M$, să se arate că $\left[\frac{a+1}{2}\right] \in M$.

39*.** Pentru orice număr natural $n \geq 2$ notăm A_n mulțimea soluțiilor nenule ale ecuației:

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3} + \cdots + \left[\frac{x}{n}\right]\right].$$

a) Determinați mulțimea $A_2 \cup A_3$.

b) Arătați că mulțimea $A = \bigcup_{n \geq 2} A_n$ este finită și determinați $\max A$.

40*.** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim:

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] + [x^2] + \cdots + [x^n] = n\}.$$

Să se arate că, pentru orice număr natural $k \geq 3$ și orice $x_n \in A_n$, avem $x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot \ldots \cdot x_{2k-1} < k$.

41*.** Fie a un număr impar care nu este pătrat perfect.

Arătați că dacă m și n sunt numere naturale nenule, atunci:

a) $\{m(a + \sqrt{a})\} \neq \{n(a - \sqrt{a})\}$;

b) $[m(a + \sqrt{a})] \neq [n(a - \sqrt{a})]$.

Scanned with OKEN Scanner

42*.** Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Să se determine mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \left[\frac{a+x}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]\right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \left[\frac{a+x}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] + 1\right\}.$$

Care mulțime are mai multe elemente? Să se determine $A \cap B$.

43*.** Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se arate că există o submulțime $A \subset \{1,2,3, \dots, n\}$ cu cel mult $2\left[\sqrt{n}\right] + 1$ elemente având proprietatea că

$$\{|x-y| | x, y \in A,\ x \neq y\} = \{1,2, \dots, n-1\}.$$

44.** Fie mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{N}^* \middle| \left[\sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{n}\right]_{n \leq 2013}, 0 \leq n \leq 2013\right\}$.

Aflați cardinalul mulțimii A.

45.** Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} | [x]\{x\} = 1\}$. Demonstrați că:

a) dacă $x \in A$, atunci $x^2 = [x]^2 + \{x\}^2 + 2$;

b) dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ și $x_1 < x_2 < \dots < x_{2016}$, atunci $\{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2016}^2\} = \{x_1\}^2 + \{x_2\}^2 + \dots + \{x_{2016}\}^2$.

46*. Să se determine mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} | x = 4\left[\sqrt{x}\right] + 3\right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{N} | x = 5\left[\sqrt[3]{x}\right]^2\right\}.$$

47.** Determinați mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \{x\} + \{2x\} + \dots + \{2012x\} + \{-x\} + \{-2x\} + \dots + \{-2012x\} < 0 \text{ și } \frac{3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\}$$

48*.** Determinați submulțimile finite nevide $A \subset \mathbb{R}$, cu proprietatea $\forall x \in A \Rightarrow x + \{x\} \in A$.

49*.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii:

$$M = \left\{\sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{7 + n + \left[\frac{2017}{n}\right]}}} \middle| n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq n \leq 2017\right\}.$$

50*.** Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și $A_p = \{x \in \mathbb{R} | px\{x\} = (p+1)[x]\}$.

Să se determine numărul elementelor mulțimilor A_p și $A_1 \cup A_2 \dots \cup A_p$.

Scanned with OKEN Scanner

soluții 7 | Mulțimi

1. a) $A = Z$.

b) $B = [0,1)$.

c) $C = N$.

d) Avem x =k-$[x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ și $[x] = x \Rightarrow 2x = k \Rightarrow k$ par, deci $D = \emptyset$ dacă k impar și $D = \left\{\frac{k}{2}, k \text{ par}\right\} = Z$.

e) Dacă $a \in [0,1) \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow E = R$, iar dacă $a \in \mathbb{R} - [0,1) \Rightarrow E =$ $= [0,1)$.

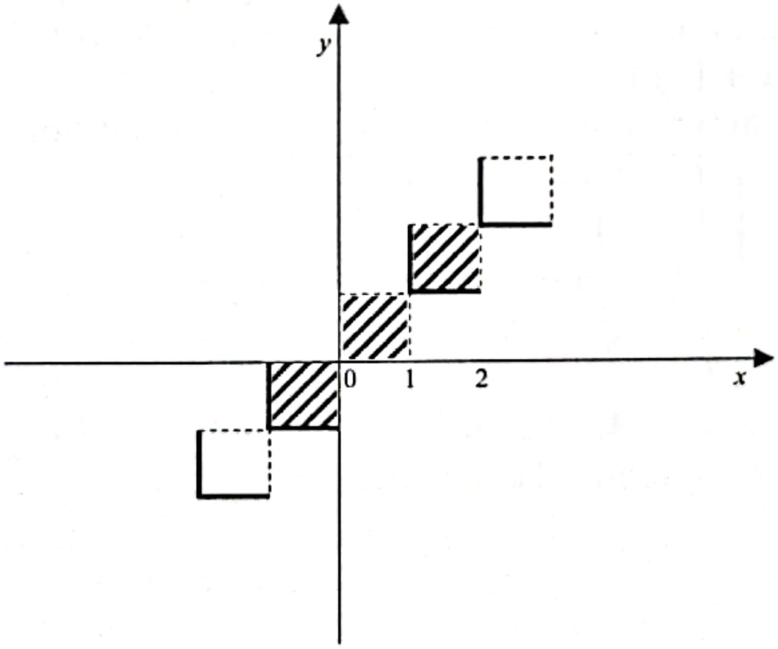
f) $F = [0,1) \cup \mathbb{Z}$.

g) $G = R$.

h) $x \in [0, \infty)$.

i) $x \in [0, \infty) \cup \mathbb{Z}_-$.

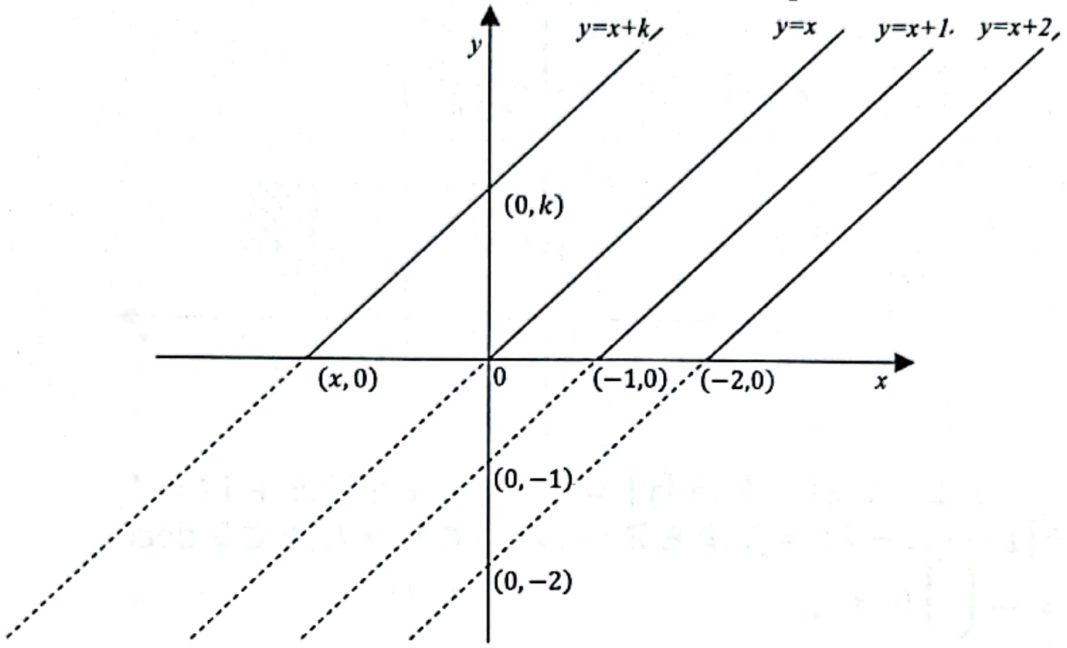
2*. a) Evident $[x] = [y] = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,y) \in [k,k+1) \times (k,k+1) = I_k$, $k \in \mathbb{Z}$, deci $A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$.



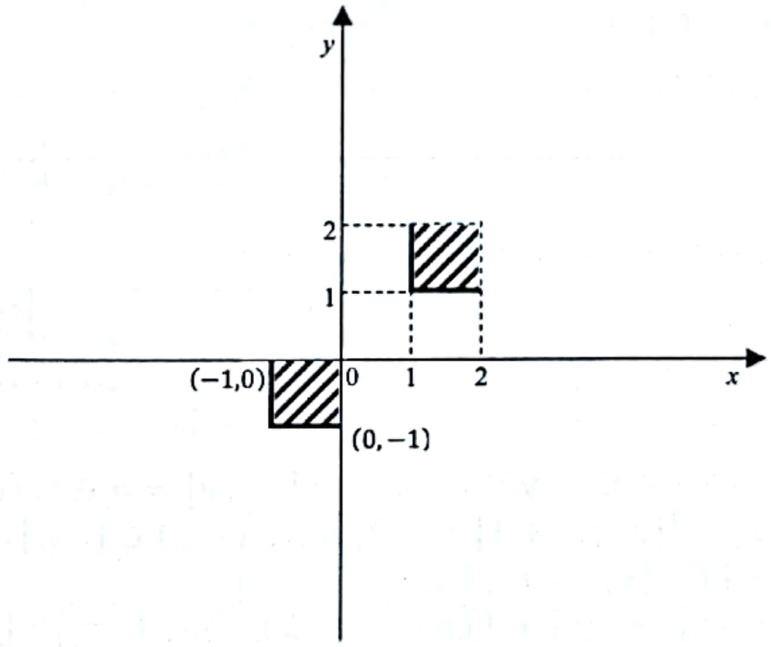
b) Din $\{x\} = \{y\} \Rightarrow y - x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = x + k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x,y) = (x, x+k), k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ $(\{y\} = \{x+k\} = \{x\})$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem un fascicul de drepte $y = x + k, k \in \mathbb{Z}$ paralele cu prima bisectoare.

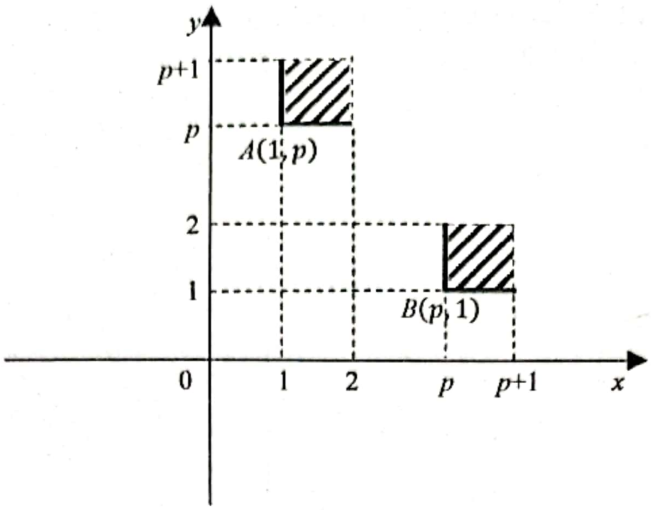


c) Deoarece $[x], [y] \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = [y] = 1$
$(x,y) \in [1,2) \times [1,2) = C_1$ sau $[x] = [y] = -1$
$(x,y) \in [-1,0 \times [-1,0) = C_2 \Rightarrow (x,y) \in C_1 \cup C_2 = C.$

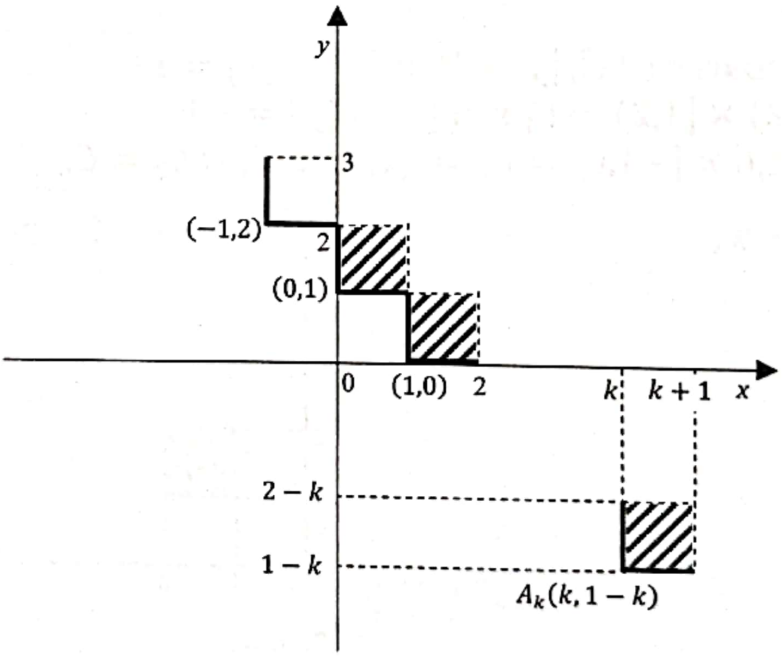


d) Avem $[x] = 1, [y] = p \Leftrightarrow x \in [1,2), y \in [p,p+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) \in [1,2) \times [p,p+1) = D_1$ sau $[x] = p, [y] = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x,y) \in [p,p+1) \times [1,2) = D_2 \Rightarrow (x,y) \in D_1 \cup D_2 = D.$

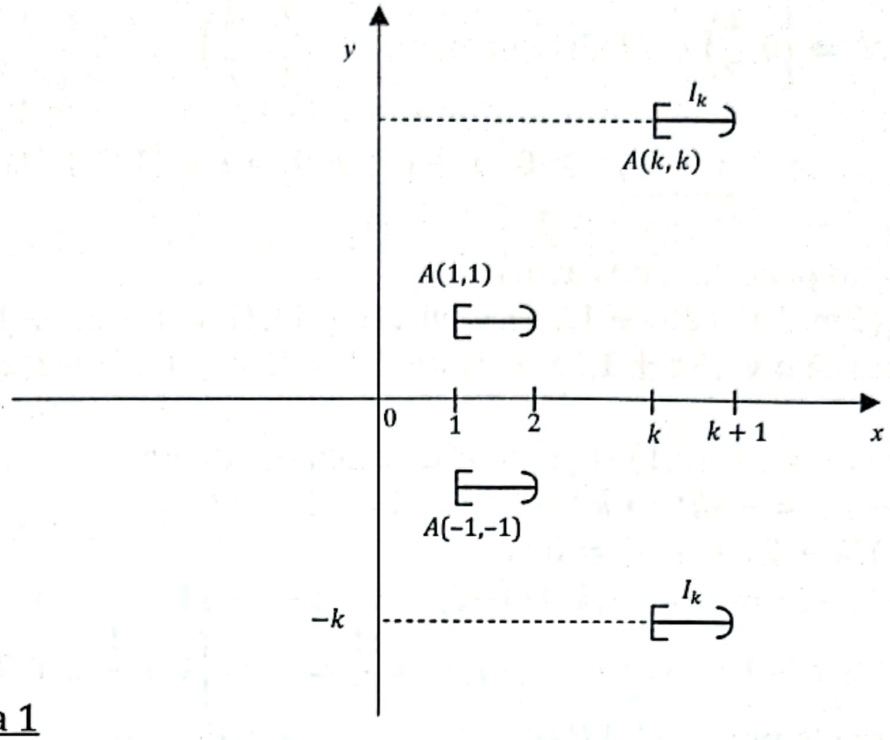
Scanned with OKEN Scanner



e) Dacă $[x] = k \Rightarrow [y] = 1 - k \Rightarrow x \in [k, k+1) = I_k$
$y \in [1-k, 2-k) = J_k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, y) \in I_k \times J_k, k \in \mathbb{Z}$ deci
$\leftarrow E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k \times J_k$.



f) Cum $|y| \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$ și din $[x] = [y] = n \in \mathbb{N}$ rezultă
$x \in [n, n+1] = [|y|, |y|+1], y \in \mathbb{Z}$, adică $(x, y) \in [|y|, |y|+1] \times \{y\} =$
$= ([|k|, |k|+1) \times \{k\}) = F_k, k \in \mathbb{Z}$.
Mulțimea $F_k = [(|k|, |k|+1), k) = (I_k, k)$, unde $I_k = [|k|, |k|+1)$.
Graficul este simetric față de axa OX, adică $k \to -k \Rightarrow F_{-k} = (I_k, -k)$.



3*. Soluția 1

Fie A prima mulțime și $B = \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Dacă $y \in A$, există $x \geq 1, y = \frac{x-[x]}{x}$.

Dacă $[x] = n \in \mathbb{N}^*$, atunci $y = \frac{x-n}{n} \geq 0$ și $y < 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow A \subset B$. Fie $y \in B = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ și $x = \frac{1}{1-y} \in [1,2)$. Rezultă că

$\frac{x-[x]}{x} = y \Rightarrow y \in A \Rightarrow B \subset A$. Așadar, $A = B$.

Concursul „Eremia Georgescu–Buzău", 2011

Soluția 2

Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

Fie $y \in M \Rightarrow (\exists) x \geq 1$, astfel încât $y = \frac{x-[x]}{x} = \frac{\{x\}}{x} = \frac{t}{k+t}$.

Dar cum $x \geq 1 \Rightarrow k \geq 1$ deci $0 \leq \frac{t}{k+t} < \frac{1}{2}, \frac{t}{k+t} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \leq k \Rightarrow$

$\Rightarrow M \subset \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Reciproc, fie $Z \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 0 \leq Z < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - z \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-z} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{1-z}\right] = 1$ și Z se poate scrie astfel:

$Z = \frac{\frac{1}{1-z} - 1}{\frac{1}{1-z}} = \frac{\frac{1}{1-z} - \left[\frac{1}{1-z}\right]}{\frac{1}{1-z}} = \frac{x-[x]}{x}$ (unde s-a notat $x = \frac{1}{1-z} \geq 1$

deci $Z \in M \Rightarrow \left[0,\frac{1}{2}\right) \subset M$. Prin urmare, $M = \left[0,\frac{1}{2}\right)$.

O.L. Timiș, 2014

4. Evident $x \geq 0$ și $x - \sqrt{x} \geq 0$, $x + [x] \geq 0 \Rightarrow x \in [1,\infty)$. Dar se impune ca $\sqrt{x+[x]} \leq 1, \sqrt{x-\sqrt{x}} \leq 1 \Rightarrow M = \emptyset$.

5. Analizând perechile de cazuri:
$(x,y) \in \{(2m,2n),(2m+1,2n),(2m,2n+1),(2m+1,2n+1)\}$
se constată că $a \in \{5x \pm 1, 5x+3\}$ deci $A = \{5k \pm 1, 5k+3 | k \in \mathbb{N}\}$.

G.M. nr. 7-8/1992

6. Notăm $\{x\} = t \in [0,1)$ și $[x] = k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:
$k^3 - 4k - 20 = -5k^2 \Rightarrow k^3 + 5k^2 - 4k - 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (k-2)(k+2)(k+5) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \in \{\pm 2, -5\} \Rightarrow A = [2,3) \cup [-2,-1) \cup [-5,-4)$
și din $2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \left\{k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Câte dintre elementele lui B se află în intervalul de mai sus.
Pentru $k = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$, pentru $k = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{-3}{2}$ și pentru
$k = -5 \Rightarrow x_3 = -5 + \frac{1}{2} = \frac{-9}{2}$. Prin urmare, $A \cap B = \left\{\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-9}{2}\right\}$.

Concursul „Petru Moroșanu-Trident", 2008, G.M. nr. 2/2009

7. Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Egalitatea devine
$3\left[t + \frac{3}{8}\right] = k + 7t - 2$ (1). Dacă $t \in \left[0,\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left[t + \frac{3}{8}\right] = 0 \Rightarrow k + 7t - 2 = 0$
$t = \frac{2-k}{7} \in \left[0,\frac{5}{8}\right) \Rightarrow k \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$ (2). Dacă $t \in \left[\frac{5}{8}, 1\right)$, atunci din (1)
rezultă $3 = k + 7t - 2 \Rightarrow t = \frac{5-k}{7} \in \left[\frac{5}{8}, 1\right) \Rightarrow k \in \{-3,-2,-1,0\}$ (3).
Din (2) și (3) rezultă:

$$A = \left\{ \begin{matrix} \pm 2 + \alpha, \pm 1 + \alpha, \alpha, -3 + \beta, -2 + \beta, -1 + \beta, \beta | \alpha \in \left[0,\frac{5}{8}\right) \text{ și} \\ \beta \in \left[\frac{5}{8}, 1\right) \end{matrix} \right\}.$$

Se poate pune sub formă de intervale.

8*. Rezultă ușor că $x \in [1,\infty)$. Notăm $y = \sqrt{x} \geq 1$ și $[x] = k$.
Rezultă $(x + [x])(x - \sqrt{x}) = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}[x] = x + [x] \Rightarrow y^2 - ky + k = 0$
și cum $y \geq 1$ și din $\Delta \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4k \geq 0 \Rightarrow k \geq 4$
$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$ și cum $x = y^2 \Rightarrow [x] = [y^2] = k$

Scanned with OKEN Scanner

$k \le y^2 < k+1 \Rightarrow \sqrt{k} \le y < \sqrt{k+1}$

$\sqrt{k} \le \frac{k \pm \sqrt{k^2-k4}}{2} < \sqrt{k+1} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow M = \{4\}.$

R.M.G. nr. 32

9*. a) Avem $2005 = 5 \cdot 401 \Rightarrow p^2 + 1 = 401 \Rightarrow p = 20 \Rightarrow \frac{2005}{401} = 5$

$\left[n + \frac{1}{n}\right] = 5 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow A = \{5,20\}.$

b) Rezultă $n + \frac{1}{n} \in N \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \frac{n^2+1}{n} = 2 \Rightarrow \left[\frac{2005}{p^2+1}\right] = 2$

$2 \le \frac{2005}{p^2+1} < 3 \Rightarrow p \in \{26,27,28,29,30,31\}$

$\Rightarrow B = \{(1,26),(1,27),(1,28),(1,29),(1,30),(1,31)\}.$

G.M. nr. 2/2005

10. Fie $x \in A_n \Rightarrow n \ge x^2 + [x] > x^2 + x - 1 \Rightarrow n + 1 > x^2 + x \ge [x^2] + x$
$\Rightarrow x \in B_{n+1} \Rightarrow A_n \subset B_{n+1}$.
Fie acum $x \in B_n \Rightarrow n \ge [x^2] + x > x^2 - 1 + x \Rightarrow$
$n + 1 > x^2 + x \ge [x^2] + x \Rightarrow x \in A_{n+1} \Rightarrow B_n \subset A_{n+1}$.

Cătălin Cristea, G.M. nr. 3/2013

11. Evident $x \ge 1$ notăm $\frac{x-1}{2} \in k \Rightarrow x = 2k + 1$

$\left[\sqrt{2k}\right] = k \Rightarrow k \in \{0,1,2\} \Rightarrow x \in \{1,3,5\}$

$\Rightarrow A = \{1,3,5\}$ și analog $B = \left\{\frac{7}{3}, 3\right\} \Rightarrow A \cap B = \{3\}$ și $A \cup B = \left\{1,3,\frac{7}{3},5\right\}$.

Aida Elena Bălăucă, Concursul „Speranțe" 2012, G.M. 6-7-8/2012

12*. Evident $[0,1] \subset A$.
Dacă $x \in [k,k+1) \Rightarrow [x] = k \Rightarrow [x^2] = k^2$ și $x^2 \in [k^2, k^2 + 2k + 1) \Rightarrow$
$[x^2] \in \{k^2, k^2+1, \cdots k^2+2k\}$, dar cum $[x^2] = [x^2] \Rightarrow$
$[x^2] = k^2 \Rightarrow x^2 \in [k^2, k^2+1) \Rightarrow x \in [k, \sqrt{k^2+1})$. Prin urmare,
$x \in [k, \sqrt{k^2+1})\ k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$$A = [0,1] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [k, \sqrt{k^2+1}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k, \sqrt{k^2+1}) = A.$$

Dacă $x \in [-k-1, -k)$ unde $k \in \mathbb{N}$, atunci $[x] = -k - 1 \Rightarrow [x]^2 = (k+1)^2$
și $x^2 \in [k^2, (k+1)^2) \Rightarrow [x^2] \in \{k^2, k^2+1, \cdots, (k+1)^2, (k+1)^2+1\}$, dar
$[x^2] = [x]^2 \Rightarrow [x^2] = (k+1)^2 \Rightarrow x^2 \in [(k+1)^2, (k+1)^2+1) \Rightarrow$
$x \in \left(-\sqrt{(k+1)^2-1}, -k-1\right]$ și intersectat cu $x \in [-k-1, -k) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -k - 1 \Rightarrow x \in \{-k | k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B = Z.$

G.M. nr. 2/1983

Scanned with OKEN Scanner

13. Fie $x = n + t, n \in \mathbb{N}^*$ și $t \in [0,1)$.

Ecuația se scrie $(n+t)^n = n^{n+t} = n^n \cdot n^t < (n+1)^n \Rightarrow n^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 3$.

Dacă $t \in (0,1)$ inegalitatea este falsă $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Așadar, rezultă $t = 0 \Rightarrow x = n \in \mathbb{N}^*$ și $M = \mathbb{N}^*$.

Ion Nedelcu, G.M. nr. 11-12/1991

14*. Avem $n + \left[\frac{1999}{n}\right] > n + \frac{1999}{n} - 1 > 2\sqrt{1999} = 88{,}4$.

Rezultă $n + \left[\frac{1999}{n}\right] \geq 89$, egalitatea are loc pentru $n = 44 \Rightarrow \min A_n = 89$.

Fie $n + \left[\frac{1999}{n}\right] \leq n + \frac{1999}{n} \leq 2000 \Rightarrow (n-1)(n-1999) \leq 0$.

Pentru $n = 1$ sau $n = 1999$ rezultă $\max A_n = 2000$ cu egalitate pentru $n \in \{1,1999\}$.

Cristinel Mortici, O.L. Constanța 1999

15*. Avem $n + \left[\frac{2003}{n}\right] > n + \frac{2003}{n} - 1 > 2\sqrt{2003} - 1 > 88$

$\Rightarrow \min A_n \geq 89$, dar cum $44 + \left[\frac{2003}{44}\right] = 89 \in A_n \Rightarrow \min A_n = 89$.

De asemenea $n + \left[\frac{2003}{n}\right] \leq n + \frac{2003}{n} \leq 2004$ și

$1 + \left[\frac{2003}{1}\right] = 2003 + \left[\frac{2003}{2003}\right] = 2004 \Rightarrow \max A_n = 2004$.

O.L. Dolj, 2003

16. Avem $n + \left[\frac{2015}{n}\right] > n + \frac{2015}{n} - 1 \geq 2\sqrt{2015} - 1 \cong 88{,}8$ și cum

$n + \left[\frac{2015}{n}\right] \in \mathbb{N}^*$ rezultă că $n + \left[\frac{2015}{n}\right] \geq 89$ cu egalitate pentru $n = 45$

deci minimul este 89. De asemenea $n + \left[\frac{2015}{n}\right] \leq n + \frac{2015}{n} \leq 2016$,

unde $n + \frac{2015}{n} \leq 2016 \Leftrightarrow (n-1)(n-2015) \leq 0$ cu egalitate pentru $n \in \{1,2015\}$ deci maximul este 2016.

Cristinel Mortici, R.M.T. nr. 3/2015

17. Pentru $x = 0 \Rightarrow \sum_{n+1}^{n} [a_k] \Rightarrow 0$ și cum $a_k \geq 0 \Rightarrow [a_k] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k \in [0,1) \Rightarrow A_n \subset [0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 1 \Rightarrow m = \sum_{k=1}^{n}[1 + a_k] = \left(\sum_{k+1}^{n}(1 + [a_k])\right) = n + \sum_{n+1}^{n}[a_k] = n \Rightarrow$

$\Rightarrow m = n.$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

18*. Evident $x < 0$ nu poate fi soluţie. Observăm că $x \in \mathbb{N}$ sunt soluţii şi de asemenea $x \in [0,1)$ sunt soluţii.

Fie $x \in (n, n+1) \Rightarrow 2^n < 2^x < 2^{n+1}; 2^{[n]} = 2^n \Rightarrow 2^n < 2^x < 2^n + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n < x < \log_2(2^n + 1)$,

adică $x \in (n, \log_2(2^n + 1)), \forall n \in \mathbb{N}$ de unde rezultă

$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, \log_2(2^n + 1)]$

care include pentru $n = 0$, intervalul $[0,1)$ şi mulţimea $\mathbb{N}$.

Călin Burdusel, G.M. nr. 7-8, 1992

19**. Vom determina mulţimile A şi B de unde vor rezulta punctele a), b), c).

Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ şi $2^{[x]}\sqrt{\{x\}} = 1 \Leftrightarrow \{x\} = \frac{1}{4^k}$,

$k \in \mathbb{N}^*$ şi prin urmare $x = k + \frac{1}{4^k} \Rightarrow A = \left\{k + \frac{1}{4^k}, k \in \mathbb{N}^*\right\} \Rightarrow A \subset Q$ şi

$A \cap Z = \emptyset$. Analog pentru mulţimea $B \Rightarrow \{x\} = \frac{81}{36^m}, m \geq 2$ unde s-a

notat $[x] = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \left\{m + \frac{81}{36^m}, m \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right\} \Rightarrow B \subset Q$ şi $A \cap Z =$

$= \emptyset$. Prin urmare rezultă punctele a) şi b).

Fie $p \in A \cap B \Rightarrow k + \frac{1}{4^k} = m + \frac{81}{36^m} \Leftrightarrow k - m = \frac{81}{36^m} - \frac{1}{4^k} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = k = 2 \Rightarrow A \cap B = \left\{\frac{33}{16}\right\}$.

G.M. nr. 4/2001

20*. Evident $m \in \{0,1\}$ verifică relaţia pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Vom arăta că oricare altă valoare a lui m nu verifică relaţia şi prin urmare $A = \{0,1\}$.

Într-adevăr, fie $m > 0$ şi $\frac{1}{2} < x < 1$ cu $x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*$, atunci din enunţ

rezultă $[[m]x] = 0 \Rightarrow 0 \leq [m]x < 1 \Rightarrow 0 \leq [m] < \frac{q}{p} < 2 \Rightarrow [m] \in \{0,1\}$.

Dacă $[m] = 0$ şi $m \in (0,1) \Rightarrow [m[x]] = [[m]x] = 0 \Rightarrow$

$[m[x]] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, fals (deci numai $m = 0$ este soluţie).

Dacă $[m] = 1$ şi $m \in (1,2)$ şi ($m = 1$ este soluţie)

Scanned with OKEN Scanner

atunci avem $[m[x]] = [[m]x] = [x]$, fals.
Dacă $m < 0 \Rightarrow [m] \leq -1 \Rightarrow [[m]x] \leq -1, \forall x > 0$, fals, $A = \{0,1\}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

21*. Dacă $a \in A$ raţional, atunci din:
$a + \frac{1}{a} = [a] + \left[\frac{1}{a}\right] + \{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + \frac{1}{a} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - ka + 1 = 0$
care ar avea rădăcinile raţionale dacă $\Delta = k^2 - 4 = p^2, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = \pm 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \pm 1$ care este imposibil, deoarece atunci $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 0$, fals.
Aşadar, Δ nu poate fi pătrat perfect, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Mihai Dicu, Concurs „Gh. Dumitrescu", 2002

22. Pătratul oricărui număr natural este de forma:
$10k + r, k \in \mathbb{N}, r \in \{0,1,4,5,6,9\} \Rightarrow A = \left\{0, \frac{7}{10}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{13}{10}\right\} \Rightarrow \text{card}A = 6.$

23**. Conform teoremei împărţirii numerelor întregi rezultă că pentru fiecare $k \in \{1,2,3,\cdots,n-1\}$ există $q_k, r_k \in \mathbb{Z}$ unici, astfel încât
$km = nq_k + r_k, 0 < r_k \leq n - 1$.
Evident că pentru $i \neq j \Rightarrow r_i \neq r_j$ deci:
$\left\{\frac{km}{n}\right\} = \left\{\frac{nq_k + r_k}{n}\right\} = \left\{q_k + \frac{r_k}{n}\right\} = \left\{\frac{r_k}{n}\right\} = \frac{r_k}{n},$
dar când k parcurge mulţimea $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$ şi r_k parcurge aceeaşi mulţime. Prin urmare, cele două mulţimi din enunţ sunt egale.

24*. Pentru n par rezultă $A_n = \{n\sqrt{2}\} - \{n\sqrt{2}\} = 0$, iar pentru n impar rezultă:
$A_n = \left\{n\sqrt{2} + \frac{n}{2}\right\} - \{n\sqrt{2}\} = \left\{n\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\right\} - \{n\sqrt{2}\}.$
Dacă $\{n\sqrt{2}\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow A_n = \frac{1}{2}$. Dacă $\{n\sqrt{2}\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow A_n = -\frac{1}{2}$
deci $A_n = \left\{0, \pm\frac{1}{2}\right\}$.

Gh. Iurea, G.M. nr. 1/2011

25*. $x_n = \left\{n\sqrt{2} + \frac{n}{3}\right\} - \{n\sqrt{2}\} = n\sqrt{2} + \frac{n}{3} - \left[n\sqrt{2} + \frac{n}{3}\right] - n\sqrt{2} + [n\sqrt{2}] =$
$= \frac{n}{3} - \left(\left[n\sqrt{2} + \frac{n}{3}\right] - [n\sqrt{2}]\right).$
Utilizând relaţia $[a+b] - [a] \in \{[b], [b]+1\}$ sau
$[a+b] \in \{[a]+[b], [a]+[b]+1\}$ (vezi cap. I)
rezultă $\left[n\sqrt{2} + \frac{n}{3}\right] - [n\sqrt{2}] \in \left\{\left[\frac{n}{3}\right], \left[\frac{n}{3}\right] + 1\right\}$, adică
$x_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right] = \left\{\frac{n}{3}\right\}$ sau $x_n = \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right] - 1 = \left\{\frac{n}{3}\right\} - 1.$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $\left\{\frac{n}{3}\right\} \in \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} \Rightarrow x_n \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$.

Deoarece x_n este diferența a două părți fracționare, rezultă că $x_n \in (-1,1)$ deci $x_n \neq -1\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă $x_n \in \left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ deci A_n are 5 elemente.

Gheorghe Iurea, G.M. nr. 6/2011

26**. Dacă $p|n \Rightarrow \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = p \cdot q \Rightarrow \left\{n\sqrt{d} + \frac{n}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\}$.

Dacă $p \nmid n \Rightarrow n = pq + r, r \in \{1,2,3, p-1\}$

și $\left\{n\sqrt{d} + \frac{pq+r}{p}\right\} = \left\{n\sqrt{d} + \frac{r}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\} \Rightarrow$

$n\sqrt{d} + \frac{r}{p} - n\sqrt{d} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{r}{p} \in \mathbb{Z}$ fals (p prim).

Prin urmare, dacă $n = pq \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_p = \{0\}$, iar dacă $n \neq pq \Rightarrow$

$n = pq + r, r \in \{1,2, \cdots, p-1\} \Rightarrow x = \left\{n\sqrt{d} + \frac{r}{p}\right\} - \{n\sqrt{d}\} =$

$= \left(n\sqrt{d} + \frac{r}{p} - \left[n\sqrt{d} + \frac{r}{p}\right]\right) = (n\sqrt{d} - [n\sqrt{d}]) = \frac{r}{p} - \left(\left[n\sqrt{d} + \frac{r}{p}\right] - [n\sqrt{2}]\right)$,

dar $\left[n\sqrt{d} + \frac{r}{p}\right] - [n\sqrt{d}] \in \left\{\left[\frac{r}{p}\right], \left[\frac{r}{p}\right] + 1\right\} = \{0,1\}$

deci $x \in \left\{\frac{r}{p}, \frac{r}{p} - 1\right\}$ întrucât $\left[\frac{r}{p}\right] = 0$

$x \in \left\{\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \cdots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{p} - 1, \frac{2}{p} - 1, \cdots, \frac{p-1}{p} - 1\right\} = B$

$x \in B \cup \{0\} = A$, A are $2p - 1$ elemente.

Cecilia Deaconescu, Dumitru Dobre, L.S, Olt 2011

27**. Arătăm că $A \cap B = \emptyset$. Să presupunem prin absurd că există

$x \in A \cap B$, deci $x = [n\sqrt{2}] = [m(2+\sqrt{2})]$ și prin urmare

$x < n\sqrt{2} < n + 1$ și $x < m(2+\sqrt{2}) < x + 1$

(inegalități stricte, întrucât $\sqrt{2}$ și $2 + \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Avem $\frac{n}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{n}{x}$ și $\frac{m}{x+1} < \frac{1}{2+\sqrt{2}} < \frac{m}{x}$

$\Rightarrow \frac{m+n}{x+1} < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} < \frac{m+n}{x}$ unde $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1$

$x < m + n < x + 1$. Contradicție. Se arată că $A \cup B = N^*$.

Daniel Sitaru, G.M. nr. 3/2014

Scanned with OKEN Scanner

28**. Avem $[na] = [nb] \Leftrightarrow na - \{na\} = nb - \{nb\} \Rightarrow$
$n(a-b) = \{na\} - \{nb\}$. Distingem două cazuri.
Cazul $a > b \Rightarrow 0 < \{na\} - \{nb\} < 1$
și $n < \frac{1}{a-b} \Rightarrow n \leq \left[\frac{1}{a-b}\right] \Rightarrow A \subseteq \left\{1,2,3,\cdots,\left[\frac{1}{a-b}\right]\right\}$
de unde rezultă A finită.
Cazul $a < b \Rightarrow n(b-a) = \{nb\} - \{na\} < 1$
$n \leq \frac{1}{b-a} \Rightarrow n \leq \left[\frac{1}{b-a}\right]$ și prin urmare $A \subseteq \left\{1,2,\cdots,\left[\frac{1}{b-a}\right]\right\}$,
deci A finită.

29***. a) Dacă $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{3}\right] \Rightarrow \left[\frac{n}{2} - \frac{n}{3}\right] < 1 \Rightarrow n < 6$.
O simplă verificare conduce la $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) = \{1,3\}$.

b) Dacă $a = b \Rightarrow M(a,b) = N$ adică infinită.
Dacă $a \neq b$ și $n \geq \frac{1}{|a-b|}$, atunci $|na - nb| \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [na] \neq [nb]$ deci $n \notin M(a,b)$.
Prin urmare, $M(a,b)$ este finită. Așadar, $M(a,b)$ este infinită $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow M(a,b) = N \Leftrightarrow a = b$ (vezi și ex. 28).

Dan Ștefan Marinescu, R.M.T., 2010

30. Fie $x \in A$, adică $x = \left[\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^2\right] = \left[2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\right] =$
$= 2n + 1 + \left[\sqrt{4n^2 + 4n}\right]$, dar $2n \leq \sqrt{4n^2 + 4n} < 2n + 1 \Rightarrow$
$\left[\sqrt{4n^2 + 4n}\right] = 2n$ deci $x = 4n + 1$ și pentru care
$n = k(k+1), k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 4k(k+1) + 1 = (2k+1)^2$,
deci A conține pătratele tuturor numerelor impare.

31*. Fie $b \in \{a, a+1, a+2\} \Rightarrow n + a < \sqrt{(n+a)(n+b)} < n + a + 1 \Rightarrow$
$\left[\sqrt{(n+a)(n+b)}\right] = n + a$ deci M_n este infinită.
Reciproc, din $n + a \leq \sqrt{(n+a)(n+b)} < n + a + 1 \Rightarrow$
$a \leq b$ și $b - a - 2 < \frac{(a+1)^2 - ab}{n} \Rightarrow b - a - 2 \leq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b \leq a + 2 \Rightarrow b \in \{a, a+1, a+2\}$ (pentru n suficient de mare).

32***. Soluția 1
Fie $n = a^2 + k, a, k \in \mathbb{N}$ cu $0 < k \leq 2a$. Presupunem că n este soluție, atunci:
$$\{\sqrt{n}\} = \sqrt{n} - [\sqrt{n}] = \sqrt{a^2 + k} - a = \frac{k}{a + \sqrt{a^2 + k}}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă $\frac{1}{10} > \frac{k}{a+\sqrt{a^2+k}} > \frac{1}{2a+1} \Rightarrow 2a+1 > 10$ şi $a \geq 5$.

Deci, $n \geq 26$. Se verifică dacă $n = 26$ este soluţia, adică minimum căutat este 26.

Soluţia 2

Fie $\sqrt{n} = k + t$, unde $[\sqrt{n}] = k, \{\sqrt{n}\} = t \in [0,1)$.

Din $\frac{1}{100} < t < \frac{1}{10} \Leftrightarrow k + \frac{1}{100} < k + t < k + \frac{1}{10} \Leftrightarrow$

$k + \frac{1}{100} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{10} \Leftrightarrow k^2 + 0{,}02k + 0{,}0001 < n < k^2 + 0{,}2k + 0{,}01.$

De remarcat că valorile $k \in \{0,1,2,3,4\}$ nu verifică.

Pentru $k = 5$ rezultă $25{,}1001 < n < 26{,}01 \Rightarrow n = 26$ care este cel mai mic număr natural ce verifică condiţiile din enunţ.

Dorin Mărghidan, L.S., 2006

33***. Evident $x > 0$ şi fie $n = [2002x]$ şi $k = [\sqrt{n}] \in \mathbb{N}^*$.

$t = \{\sqrt{n}\} \Rightarrow \sqrt{n} = k + t$ şi în cazul luat $t \in \left(\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right) \Rightarrow k + \frac{1}{100} < k + t =$

$= \sqrt{n} < k + \frac{1}{10} \Rightarrow k^2 + \frac{1}{50}k + \frac{1}{10^4} < n < k^2 + \frac{1}{5}k + \frac{1}{100}$ (1).

Dar cum $\left[k^2 + \frac{1}{50}k + \frac{1}{10^4}\right] = \left[k^2 + \frac{1}{5}k + \frac{1}{10}\right]$ pentru $k \in \{0,1,2,3,4\}$ rezultă că (1) nu poate avea loc decât pentru $k \geq 5$. Pentru $k = 5 \Rightarrow$ $25{,}1001 < n < 26{,}01$ (2) deci valoarea minimă a lui n este 26

şi (2) devine $25{,}1001 < [2002x] < 26{,}01$ (3)

de unde rezultă: $26 \leq 2002x < 27 \Rightarrow x \in \left[\frac{26}{2002}, \frac{27}{2002}\right)$ deci $x_{min} = \frac{13}{1001}$

Dorin Mărghidan, G.M. nr. 3/2005

34**. a) Pentru $p = 2 \Rightarrow n = 2[\sqrt{n}] + 1$.

Notăm $s = [\sqrt{n}] \Rightarrow n = 2s + 1$, deci impar.

$[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1 \Leftrightarrow s \leq \sqrt{2s+1} < s + 1 \Rightarrow s \in \{1,2\} \Rightarrow n \in \{3,5\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = \{3,5\}$.

b) Dacă $p \geq 3 \Rightarrow n = p[\sqrt{n}] + 1 \Rightarrow n = ps + 1 \Rightarrow s \leq \sqrt{ps+1} < s + 1 \Leftrightarrow$

$s^2 \leq ps + 1 < s^2 + 2s + 1 \Rightarrow s \in \{p-1, p\} \Rightarrow n \in \{p^2 - p + 1, p^2 + 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_p = \{p^2 - p + 1, p^2 + 1\}$.

Traian Duţă, O.L. Braşov, 2009

Scanned with OKEN Scanner

35***. Evident $A \subset (0,1)$. Împărțim intervalul $(0,1)$ în 2008 intervale de lungime egală cu $\frac{1}{2008}$, adică intervale de forma $\left(\frac{k}{2008}, \frac{k+1}{2008}\right)$, unde $k = \overline{0,2007}$.

Conform principiului cutiei, există cel puțin un interval în care se află două elemente din mulțimea A.

Fie $I_m = \left(\frac{m}{2008}, \frac{m+1}{2008}\right)$ intervalul care conține cel puțin două elemente din A.

Fie $\frac{m}{2008} = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$ și $\frac{m+1}{2008} = \frac{m}{2008} + \frac{1}{2008} = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots} +$ $+ 0{,}000448$.

Așadar, cum numerele $\frac{m}{2008}$ și $\frac{m+1}{2008}$ au primele trei zecimale identice, rezultă că și numerele aflate în acest interval I_m au aceleași trei zecimale.

Petre Simion, G.M. nr. 11/2009

36***. a) Fie $x \in A_p \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow x \geq x + \frac{1}{x} - 1 =$

$$= a + b\sqrt{p} + \frac{1}{a + b\sqrt{p}} - 1 = a + b\sqrt{p} + \frac{a - b\sqrt{p}}{a^2 + b^2 p} - 1 = 2a - 1 \quad (1)$$

și cum $0 \leq pb^2 = a^2 - 1 < a^2 \Rightarrow b\sqrt{p} < a \Rightarrow a + b\sqrt{p} < 2a$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $2a - 1 \leq x < 2a \Rightarrow [x] = \left[a + p\sqrt{b}\right] = 2a - 1$.

Avem $[x] = x + \frac{1}{x} - 1 = 2a - 1$.

b) Din $[x] = x + \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow x - \{x\} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \{x\} = 1 - \frac{1}{x}$

și $3\{x\} \leq [x] \Leftrightarrow 3\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq x + \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$.

37***. a) Dacă $a = 0$, atunci $A_n = N$, deci infinită.

Dacă $a = 2k+1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+k)^2 < n^2 + (2k+1)n < (n+k+1)^2$ care are loc pentru $\forall\, n > k^2$ deci $n^2 + an$ nu poate fi pătrat perfect, $\forall\, n > k^2$.

Dacă $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, atunci $(n+k-1)^2 < n^2 + 2kn < (n+k)^2$ care are loc pentru $n > \frac{(k-1)^2}{2}$ deci $n^2 + an$ nu poate fi pătrat perfect pentru $n > \frac{(k-1)^2}{2}$.

b) Din punctul a) rezultă că pentru $a = 2k+1$ maximum lui A_n se obține când

$(n+k)^2 = n^2 + (2k+1)n \Rightarrow n = k^2$, adică $n = \dfrac{(a-1)^2}{4}$.

Cazul a par se analizează în cazurile:

$a = 4p+2, p \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+2p)^2 < n^2 + (4p+2)n < (n+2p+1)^2$, $\forall n > 2p^2$, de unde egalitatea

$(n+2p)^2 = n^2 + (4p+2)n$ care conduce la $n = 2p^2 \Rightarrow n = \dfrac{(a-2)^2}{8}$.

Dacă $a = 4p, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (n+2p-2)^2 < n^2 + 4pn < (n+2p)^2$ pentru orice $n > (p-1)^2$. Egalitatea $(n+2p-1)^2 = n^2 + 4pn$ nu este posibilă deoarece conduce la $2n = (2p-1)^2$.

În aceste condiţii $\max A$ îl găsim din egalitatea $(n+2p-2)^2 = n^2 + 4pn \Rightarrow n = (p-1)^2$, adică $n = \dfrac{(a-4)^2}{16}$.

Marian Stroe, G.M. 6-7-8/2015

38***. Se constată uşor că M conţine numai numere impare.

Dacă $a \in M \Rightarrow a = 2k+1$ şi $k(k+1) = p^2 + q^2$ (1)

(deoarece din $a^2 = 4k(k+1) + 1 = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow k(k+1) = p^2 + q^2$, $p, q \in \mathbb{Z}$).

Dar din $a + 2 \in M \Rightarrow a + 2 = 2(k+1) + 1$ şi $(k+1)(k+2) = p_1^2 + q_1^2$ (2).

Avem $\left[\dfrac{a+1}{2}\right] = k+1 = 2k'+1 \Rightarrow k = 2k' \Leftrightarrow k'(k'+1) = p_2^2 + q_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k'(k'+1) = \dfrac{k}{2}\left(\dfrac{k}{2}+1\right) = \dfrac{k(k+2)}{4}$.

Din (1) şi (2) rezultă

$k(k+1)^2(k+2) = (p^2+q^2)(p_1^2+q_1^2) = (pp_1+qq_1)^2 + (pq_1-qp_1)^2 \Rightarrow$

$\dfrac{k(k+2)}{4} = \dfrac{m^2+n^2}{4(k+1)^2} = \left(\dfrac{m}{2(k+1)}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{2(k+1)}\right)^2 \Rightarrow \left[\dfrac{a+1}{2}\right] \in M.$

Laurenţiu Panaitopol, G.M. nr. 12/1998

39***. Observăm că $A_n \subset Z, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

a) A_2 reprezintă mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x = \left[\dfrac{x}{2}\right] \Rightarrow$

$x - 2 < 2x \leq x \Rightarrow x \in \{-1,0\} \Rightarrow A_2 = \{-1,0\}$.

A_3 reprezintă soluţiile ecuaţiei $x = \left[\dfrac{x}{2}\right] + \left[\dfrac{x}{3}\right] \Rightarrow 5x - 12 < 6x \leq 5x \Rightarrow$

$x \in \{-11, -10, \cdots, -1,0\}$, dar verifică numai

$x \in A_3 = \{-7, -5, -4, -3, -2, 0\}$.

Aşadar, $A_2 \cup A_3 = \{-7, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru $n \geq 4$ și pentru $x \in A_n$ rezultă $x \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.

Se arată ușor (vezi la cap. I) proprietățile $\forall m \in \mathbb{Z}^*$ și $\forall n \in \mathbb{N}^*$

deci $\left[\frac{x}{n}\right] \geq \frac{x-(n-1)}{n}, \frac{m}{n}-\frac{n-1}{n} \leq \left[\frac{m}{n}\right] \leq \frac{m}{n}$

și prin urmare pentru $n \geq 4$ și $x \in A_n$ rezultă:

$x \geq \left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right] \geq \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4} \Rightarrow x \leq 23$ și cum $23 \in A_4$

rezultă că $\max A = 23$ și $A \subset \{-7,-5,-4,-3,-2,-1,0,\cdots,23\}$.

Dan Nedeianu, O.N. 2010, G.M. nr. 5/2010

40*.** Arătăm că $x_n \in A \Rightarrow x_n < \sqrt[n]{2}$. Într-adevăr, dacă

$x_n \geq \sqrt[n]{2}$ și $n = [x_n]+[x_n^2]+\cdots+[x_n^n]$ avem $n \geq \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ termeni}}+2$, fals.

Atunci $x_1 x_3 \cdots x_{2k-1} \leq 2^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}}$ și prin urmare rămâne de arătat că:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1} < \log_2 k, \forall k \geq 3.$

Cum $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+1} \Rightarrow 1 < (2n+1)[\log_2(n+1)-\log_2 n]$

$\frac{1}{2n+1} < \log_2(n+1)-\log_2 n$. Atunci

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1} < \log_2 k+\log_2(k+1)-\log_2 k =$

$= \log_2(k+1)$. Pentru a încheia demonstrația trebuie arătat că:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} < \log_2 3$ care este echivalent cu $\left(\frac{9}{8}\right)^7 > \frac{4}{3}$.

Emil Vasile, O.J., 2013

41*.** Presupunem că avem egalitate în punctul a).

a) Cum $ma, na \in \mathbb{N}$, atunci egalitatea a) devine

$\{m\sqrt{a}\} = \{-n\sqrt{a}\} \Rightarrow m\sqrt{a}+n\sqrt{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{a}(m+n) \in \mathbb{Z}$, absurd.

b) Presupunem că avem egalitate în b), adică există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $[m(a+\sqrt{a})] = [n(a+\sqrt{a})] = M \in \mathbb{N}^* \Rightarrow M < m(a+\sqrt{a}) < M+1$,

$M < n(a-\sqrt{a}) < M+1$ (cu inegalitățile stricte)

$\Rightarrow \frac{M}{a+\sqrt{a}} < m < \frac{M+1}{a+\sqrt{a}}, \quad \frac{M}{a-\sqrt{a}} < n < \frac{M+1}{a+\sqrt{a}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2M}{a-1} < m+n < \frac{2(M+1)}{a-1} \Rightarrow M < \frac{a-1}{2}(m+n) < M+1,$

în contradicție cu faptul că numărul din mijloc este număr natural.

Scanned with OKEN Scanner

Observație

Problema se poate obține din teorema Beatty care afirmă că mulțimile de tipul $[n\alpha]$ și $[n\beta]$ determină o partiție a mulțimii $\mathbb{N}$ dacă α și β sunt iraționale pozitive cu $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. (Vezi capitolul Paragrafe speciale.)

Vasile Pop, O.N., 2014

42*.** Pentru mulțimea A avem:

$\left[\frac{a}{b}\right] \leq \frac{a+x}{b} < \left[\frac{a}{b}\right]+1 \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]-a \leq x \leq b\left[\frac{a}{b}\right]+b-a-1$ deci

card $A = b$. Pentru mulțimea B avem:

$\left[\frac{a}{b}\right]+1 \leq \frac{a+x}{b} < \left[\frac{a}{b}\right]+2 \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]+b-a \leq x < b\left[\frac{a}{b}\right]+2b-a \Rightarrow$

$\Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]+2b-a \leq x \leq b\left[\frac{a}{b}\right]+2b-a-1 \Rightarrow \text{card}B = b.$

Observăm că dacă $x \in B \Rightarrow x-b \in A$ și reciproc. Din

$\left[\frac{a}{b}\right] \leq \frac{a}{b} < \left[\frac{a}{b}\right]+1 \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right] \leq a < b\left[\frac{a}{b}\right]+b \Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right] \leq a \leq b\left[\frac{a}{b}\right]+b-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b\left[\frac{a}{b}\right]-a \leq 0 \leq b\left[\frac{a}{b}\right]+b-a-1 \Rightarrow 0 \in A$ și $b = 1 \in B$.

Rezultă că primul element al mulțimii B este succesorul ultimului element al mulțimii A deci $A \cap B = \emptyset$. Rezultă că A și B au același număr de elemente și $A \cap B = \emptyset$.

43*.** Fie $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = k^2 + r$ cu $0 \leq r \leq 2k$ și

$\{k^2, k^2+1, k^2+2, \ldots, k^2+r, \ldots, k^2+2k\}, [\sqrt{n}] = k.$

Împărțim mulțimea dată astfel:

$\{1,2,\ldots,k\} \cup \{k+1, k+2, \ldots, 2k\} \cup \ldots \cup \{k^2, k^2+1, k^2+2, \ldots, k^2+r\}$ și luăm mulțimea $A = \{1,2,\ldots,k\} \cup \{2k\} \cup \{3k\} \cup \left\{\underbrace{k^2+r}_{n}\right\}$ care satisface condițiile cerute.

Radu Tudor, Teste pentru O.I.M./1998

44.** Dacă $n \in \{0,2,3\} \Rightarrow [\sqrt{n}] \neq [\sqrt{n+2}]$.

Dacă $n = k^2 \Rightarrow [\sqrt{n}] = [\sqrt{n+2}]$.

Dacă $k^2 < n < (k+1)^2 - 3, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, atunci $\Rightarrow [\sqrt{n}] = [\sqrt{n+2}] = k$.

Dacă $n \in \{(k+1)^2-2, (k+1)^2-1\}, k \in \mathbb{N}^*$ atunci se deduce că

$[\sqrt{n}] = k, [\sqrt{n+2}] = k+1$ deci $[\sqrt{n}] \neq [\sqrt{n+2}]$.

Adică $1 \leq (k+1)^2 - 1 \leq 2013$

$1 \leq (k+1)^2 - 2 \leq 2013 \Rightarrow 1 \leq k \leq 43$ în fiecare caz în parte. Prin urmare, card A=2014 – $(2 \cdot 43 + 1) = 1927$.

Artur Bălăucă, Concursul „Dimitrie Pompeiu", 2013

Scanned with OKEN Scanner

45.** Soluția 1

Din $[x]\{x\}=1 \Rightarrow [x]\geq 2 \Rightarrow [x]=\dfrac{1}{\{x\}}\geq 2.$

a) $x^2=([x]+\{x\})^2=[x]^2+\{x\}^2+2[x]\{x\}=[x]^2+\{x\}^2+2.$

b) Fie $x,y\in A$ cu $x<y\Rightarrow [x]<[y]$ deci pentru $x_i\in A$, $i=\overline{1,2016}$ cu $x_1<x_2<\cdots<x_{2016}\Rightarrow [x_1]<[x_2]<\cdots<[x_{2016}]$ (cu $[x_1]\geq 2\Rightarrow$

$$\Rightarrow [x_k]\geq k+1)\Rightarrow \{x_k\}^2=\frac{1}{(x_k)^2}\leq \frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\{x_k\}^2<\sum_{k=1}^{2016}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2017}<1\Rightarrow \left\{\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\}=\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2.$$

Din punctul a) rezultă $\left\{\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{2016}[x_k]^2+2\cdot 2016+\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\}=$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2\right\}=\sum_{k=1}^{2016}\{x_k\}^2.$$

Soluția 2

Evident din $[x]\{x\}=1\Rightarrow [x]\geq 2\Rightarrow \{x\}=\dfrac{1}{\{x\}}\geq 2$ și $\{x\}=\dfrac{1}{[x]}=\dfrac{1}{k}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=k+\frac{1}{k},\forall\, k\in\mathbb{N}^*-\{1\}\Rightarrow A=\left\{k+\frac{1}{k},\forall\, k\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right\}.$$

a) Prin urmare, $x^2=\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^2=k^2+\dfrac{1}{k^2}+2=[x]^2+\{x\}^2+2.$

b) Fie $x_i=k_i+\dfrac{1}{k_i}$, $i=\overline{1,n}$, $2\leq k_1<k_2<\cdots<k_n$.

Avem $\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(k_i+\frac{1}{k_i}\right)^2\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i^2}+2n\right\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i^2}\right\}=$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}=\sum_{i=1}^{n}\{x_i\}^2.\ \left(\text{Întrucât } 0<\sum_{i=1}^{n}\{x_i\}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i^2}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i(k_i-1)}=\right.$$

$$\left.=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{k_i-1}-\frac{1}{k_i}\right)=\frac{1}{k_1-1}-\frac{1}{k_n}<1-\frac{1}{k_n}<1\Rightarrow\left\{\sum_{i=1}^{n}\{x_i\}^2\right\}=\sum_{i=1}^{n}\{x_i\}^2.\right)$$

O.L. Bihor, 2016

Scanned with OKEN Scanner

46*. Determinăm mulțimea A. Fie $\left[\sqrt{x}\right] = k \geq 1 \Rightarrow k \leq \sqrt{x} < k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 \leq x \leq k^2 + 2k, x \in \{k^2, k^2+1, \ldots, k^2+2k\}$.
$x = 4\left[\sqrt{x}\right] + 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k^2 + m = 4k + 3$, unde $m \in \{0,1,\ldots,2k\}, m = -k^2 + 4k + 3 \Rightarrow$
$0 \leq -k^2 + 4k + 3 \leq 2k \Rightarrow k \in \{3,4\}$. Pentru $k = 3 \Rightarrow x \in \{9,10,\ldots,15\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 15$ și pentru $k = 4 \Rightarrow x \in \{16,17,\ldots,24\} \Rightarrow x = 19 \Rightarrow A = \{15,19\}$.
Notăm $\left[\sqrt[3]{x}\right] = k \Leftrightarrow k^3 \leq x \leq k^3 + 3k^2 + 3k \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \{k^3, k^3+1, \ldots, k^3+3k^2+3k\} = \left\{k^3 + m, m = \overline{0,3k^2+3k}\right\}$.
Ecuația devine $x = 5\left[\sqrt[3]{x}\right]^2$ $(*)$ $k^3 + m = 5k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 5k^2 - k^3$, adică $0 \leq 5k^2 - k^3 \leq 3k^2 + 3k \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.
Pentru $k = 0 \Rightarrow x = 0$.
Pentru $k = 1 \Rightarrow x \in \{1,2,\ldots,7\} \Rightarrow x = 5$ verifică ecuația $(*)$.
Pentru $k = 2 \Rightarrow x \in \{8,10,\ldots,25,26\} \Rightarrow x = 20$.
Pentru $k = 3 \Rightarrow x \in \{27,28,\ldots,63\} \Rightarrow x = 45$.
Pentru $k = 4 \Rightarrow x \in \{64,65,124\} \Rightarrow \left[\sqrt[3]{x}\right] = 4 \Rightarrow x = 80$.
Pentru $k = 5 \Rightarrow x \in \{125,126,\ldots,215\} \Rightarrow x = 125 \Rightarrow$
$\Rightarrow B = \{0,5,20,45,80,125\}$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 3/1988

47.** Cum $\{x\} + \{-x\} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \{x\} + \{-x\} \leq 0$,
$\forall x \in \mathbb{R}$ și cum
$\sum_{k=1}^{2012} \{kx\} + \{-kx\} = 0$, deci fiecare paranteză este nulă $\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$
și cum $x \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \dfrac{3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0$ sau $x = -1 \Rightarrow A = \{0,-1\}$.

Paul Băiatu, O.L. Giurgiu

48*.** Categoria de mulțimi finite sunt mulțimile finite cu toate elementele numere întregi. Fie $x \in A, x \notin \mathbb{Z}$. Construim șirul $(x_n)_{n\geq 0}, x_0 = x, x_{n+1} =$
$= x_n + \{x_n\}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} - x_n = \{x_n\} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este crescător. Dacă presupunem că $x_n \notin \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n+1} >$
$> x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deci infinit, A infinită, fals. Deci, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n \in \mathbb{Z}$, atunci evident $x_{n+1} = x_n \in \mathbb{Z}$ și
$x_{n-1} + \{x_{n-1}\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x_{n-1}] + 2\{x_{n-1}\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\{x_{n-1}\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2[x_{n+1}] + 2\{x_{n-1}\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x_{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\left((x_{n-2}) + 2\{x_{n-2}\}\right) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^2\{x_{n-2}\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^2 x_{n-2} \in \mathbb{Z}$ și din aproape în aproape rezultă
$2^n x_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2^n x_0 = m \Rightarrow x_0 = x = \dfrac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow A \subset \left\{\frac{m}{2^n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Se pot descrie și alte submulțimi finite în afara celor de mai sus.

De exemplu: $A_2 = \left\{\frac{m}{2^n}, \frac{m}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{m}{2^2}, \frac{m}{2}\right\}$ dacă m par și n dat sau

$A_1 = \left\{\frac{m}{2^n}, \frac{m}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{m}{2^2}, \left[\frac{m}{2}\right] + 1\right\}$ dacă m este impar.

La care se pot adăuga reuniuni de astfel de submulțimi finite.

49***. Notăm $\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{7+\left[\frac{2017}{n}\right]}}}$

$\leq \sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{7+\frac{2017}{n}}}}$, unde funcția

$g(n)$: $[1,2017], g(n) = n + \frac{2017}{n}$, $g_{\max} = g(1) = g(2017) = 2018$.

Prin urmare, $\sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{7+n+\frac{2017}{n}}}} \leq \sqrt{2+\sqrt{4+\sqrt{7+2018}}} =$

$= \sqrt{2+\sqrt{4+45}} = \sqrt{2+\sqrt{49}} = \sqrt{2+7} = 3$.

Cel mai mare element este 3, care se obține pentru $n \in \{1,2017\}$.

Răzvan Drînceanu, G.M. nr. 11/2017

50***. Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

Observăm că toate mulțimile conțin elementul nul ($x = 0$). Egalitatea devine:

$$pt^2 + pkt - (p+1)k = 0 \Rightarrow t = \frac{-pk + \sqrt{p^2k^2 + 4p(p+1)k}}{2p}$$

și cum $0 < t < 1$ avem $t = \frac{-pk + \sqrt{p^2k^2 + 4p(p+1)k}}{2p}$ pentru $x > 0$ și

$t = \frac{-pk - \sqrt{p^2k^2 + 4p(p+1)k}}{2p}$ pentru $x < 0$.

În primul caz $x > 0$ se impune ca $\sqrt{p^2k^2 + 4p(p+1)k} < 2p + pk$ $(*)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ridicând la pătrat în $(*)$ rezultă $k < p \Rightarrow 0 \leq k \leq p-1$. Așadar, soluția $x = 0$ și alte $p-1$ soluții. Dacă $x < 0$ se impune ca

$-pk - 2p < \sqrt{p^2k^2 + 4p(p+1)k}$ $(**) \Rightarrow pk + 4(p+1) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k < -4 - \frac{4}{p} < -4$ de unde rezultă că

$-pk - 2p > 0$ și ridicând la pătrat în $(**)$ rezultă $4p^2 < 4pk$, fals.

Așadar, nu există soluții pentru $x < 0$. Prin urmare, A_p are p soluții, ($p - i$ soluții nenule). Pentru $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. Într-adevăr, pentru $x \neq 0$ dacă A_i și A_j, pentru $i \neq j$, ar avea un element comun (nenul), atunci

$\frac{i+1}{i} = \frac{j+1}{j} \Rightarrow i = j$, contradicție.

Așadar, în afara elementului nul, mulțimile A_i și A_j sunt disjuncte. Prin urmare, reuniunea $A_i \cup A_j \ldots \cup A_p$ are $1 + \sum_{i=0}^{p-1} i = 1 + \frac{p(p-1)}{2}$ elemente.

Cecilia Deaconescu, Dumitru Dobre, L.S., 2011

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 8 | Ecuaţii

$\oint$ 1. Ecuaţii elementare (standard)

1. Să se rezolve ecuaţiile elementare:

a) $[x] = 0$;
b) $\{x\} = 0$;
c) $[x] = x$;
d) $\{x\} = x$;
e) $[x] = \{x\}$;
f*) $[x] = |x|$;
g*) $\{x\} = |x|$;
h*) $[x] = -x$;
i**) $\{x\} = -x$.

2. Să se rezolve ecuaţiile elementare:

a) $[x] = 7, [x] = n \in \mathbb{Z}$;
b) $\{x\} = \frac{3}{5}, \{x\} = a \in [0,1)$;
c) $[x] = b, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$;
d) $\{x\} = c, c \in \mathbb{Z}^*$;
e) $|x| = a$;
f*) $|[x]| = m, m \in \mathbb{Z}$;
g) $[[x]] = a$;
h) $\{\{x\}\} = b$;
i) $[\{x\}] = a$;
j) $\{[x]\} = b$.

3**. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $[\{x\}] = \{[x]\}$;
b) $\{|x|\} = |\{x\}|$;
c) $|[x]| = [|x|]$.

4*. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $4[x] - 1 = 3x$;
b) $4\{x\} + x = 2[x]$;
c) $2[x] + 4 = 3x$;
d) $x[x] = x + 2$;
e) $[x] = |x + 1| + |x - 1|$.

5. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $5[x] = 4x + 2$;
b) $[x^2] = 9$;
c) $[x]^2 = 9$.

6. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $[x] = x$;
b) $\{x\} = x$;
c) $[x] = [-x]$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $[\{x\}] = \{[x]\}$;
e) $[x] = |x|$;
f*) $\{x\} = |x|$;
g*) $\{x\} = \{-x\}$;
h*) $|[x]| = [|x|]$.

7. Să se rezolve ecuațiile:
a) $2[x] + \{x\} = 4{,}25$;
b) $2[x] + \{x\} = -3{,}7$;
c) $2[x] + \{x\} = 3{,}9$;
d) $[x] + 2\{x\} = 1{,}3$;
e) $4[x] + 3\{x\} = 2x - \frac{5}{3}$.

8. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$;
b) $\left[\frac{x-3}{2}\right] = \frac{x+1}{3}$;
c) $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{3x-1}{4}$;
d) $\left[\frac{3x+4}{5}\right] = \frac{4x+3}{5}$;
e) $\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$.

9. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = 4$;
b) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = 101$;
c) $\left[\frac{3x-4}{6}\right] - \left[\frac{1-3x}{6}\right] = \frac{6x-1}{5}$;
d) $\left[\frac{3x-1}{4}\right] + \left[\frac{3x+1}{4}\right] = 0$;
e) $\left[\frac{4x+1}{6}\right] = \left\{\frac{2x-1}{3}\right\} + x$;
f) $\left[\frac{2x-1}{3}\right] = \left\{\frac{4x+1}{6}\right\} + x$;
g) $\{x\} - \{2x\} = x$;
h) $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left\{\frac{x}{5}\right\} = \left\{\frac{x}{2}\right\}$;

b) $[x] + 3\{x\} = x + 1$;

c) $\{x\} + \{3x\} + \left\{\frac{2x+1}{2}\right\} =$

$= \{2x\} + \left\{\frac{3x+1}{3}\right\} + \left\{\frac{3x+2}{3}\right\}$;

d) $\left\{\frac{x-1}{2}\right\} = \left\{\frac{x+1}{3}\right\}$;

e) $[x] = \frac{x + \{x\}}{2}$.

11. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left\{\frac{3x-1}{2}\right\} = \frac{1}{3}$;

b) $\left\{\frac{1-x}{3}\right\} = \frac{1}{2}$;

c) $\left\{\frac{x-1}{2}\right\} = \frac{x}{3}$;

d) $\{x - a\} = \{x\}, a \in \mathbb{Z}$;

e) $\{a - x\} = 1 - \{x\}, a \in \mathbb{Z}$;

f) $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \{x\}$;

g) $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \{x + 2\}$;

h) $[x + |x|] = |x + [x]|$.

12. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x]\{x\} = 10x$;

b) $[x] - \frac{2}{\{x\}} = 1$;

c) $x[x] = \{x\}$;

d) $x + 1 + |x + 1| + [x + 1] = 10$;

e) $2\{x\} = 1 - \frac{x}{2}$;

f) $3[x] + 8\{x\} = 5x - 2$;

g) $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = \left\{\frac{x}{5}\right\} + 5$;

h) $\left[\frac{2x+7}{3-x}\right] = 3x + 1$;

i) $\left[\frac{2x+1}{x+2}\right] = \frac{x+4}{2x-1}$;

Scanned with OKEN Scanner

j) $[x-2]+|x-2|=2x;$
$[x-3]+|x-3|=3x;$
k) $[x]=1+\{x^2-1\};$
l) $[2x-3]=\sqrt{2}[3x-4].$

13. Să se arate că următoarele ecuații sunt echivalente $\{x-\alpha\}=0$ și $\{\alpha-x\}=0$, unde $0\leq\alpha<1$; $\{x\}=\alpha.$

14. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x-2012|+[x+2012]=4024;$
b) $|x-n|+[x+n]=2n, n\in\mathbb{Z};$
c) $x^2+x=[x+1]+[x+2]+$
$+[x-3];$
d) $\{x\}=\frac{1}{2}=4\{x+n\}, n\in\mathbb{N};$
e) $\left[\frac{\left[3x-\frac{1}{2}\right]+2}{3}\right]=x-1.$

15. Să se rezolve ecuația: $[x]=\frac{\sqrt{2}}{x}.$

16. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\sqrt{\frac{x+7}{2}}\right]=\frac{x+1}{2};$
b) $\left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right]=\frac{x-1}{3}.$

17. Să se determine $x>1$ astfel încât:

$$x=\left[\frac{x}{x-1}\right]+[x]\left[\frac{x}{x-1}\right]-2\left[\frac{x}{x-1}\right].$$

18. Să se rezolve: $\left[\frac{x+1988}{2}\right]+\left[\frac{x+1988}{3}\right]=\frac{x}{4}+1990.$

19. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3x+5}{7}+\left[\frac{1-2x}{6}\right].$

20. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{3x-1}{2}\right]-\left[\frac{3x-1}{4}\right]=\frac{2x+1}{3};$
b) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}.$

Scanned with OKEN Scanner

21*. Să se rezolve:

a) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x+2}{3}\right]+\left[\frac{2x+5}{3}\right]=\frac{x+1}{3}$;

b) $\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+2}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\frac{x-1}{2}$.

22*. Să se rezolve ecuația: $\left[\left\{\frac{x-2}{3}\right\}-\frac{x-2}{3}\right]=\frac{1-3x}{5}$.

23. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\frac{x+1}{3}$;

b) $\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{x-1}{2}$;

c) $\left[\frac{x-3}{2}\right]=\frac{x-2}{3}$;

d) $\left[\frac{x-2}{3}\right]=\frac{x-3}{2}$;

e) $\left[\frac{x+1}{4}\right]=\frac{x-4}{3}$;

f) $\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$;

g) $\left[\frac{2x+1}{5}\right]=\frac{x-2}{3}$;

h) $\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{x-1}{5}$;

i) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{3x+4}{5}$;

j) $\left[\frac{2x+1}{4}\right]=\frac{3x-4}{5}$.

24*. Fie $n,p,a,c\in\mathbb{N}^*, m,b\in\mathbb{Z}^*, \left[\frac{nx+m}{p}\right]=\frac{ax+b}{c}$ $ap-nc\neq 0$.

25. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x+3}{2}\right]=\left\{\frac{x+3}{2}\right\}-\left\{\frac{x+1}{2}\right\}$.

26*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x-2}{2}\right]+\left[\frac{x-3}{2}\right]+\left[\frac{x-4}{2}\right]=|x-6|$.

27*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[2x]=x-\frac{1}{x}$;

b) $[x]\{x\}=x-1$;

c) $\{x\sqrt{2}\}=\{x\sqrt{3}\}$.

28**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{8}{x}\right]=\frac{3}{[x]}$;

b) $\{x\}=\frac{x+[x]+\{x\}}{10}$;

c) $\{x\}-\{2x\}=x$;

d) $19[x]-96\{x\}=0$.

29**. Să se rezolve ecuația: $[x]+\frac{2}{x}=\frac{1}{[x]}$.

30**. Să se rezolve ecuația: $[x]+|x-2|=x^2$.

Scanned with OKEN Scanner

31.** a) Să se arate că nu există $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\left[\frac{x}{2}\right] = x^2 + 1$.

b) Să se determine $y \in \mathbb{R}$, pentru care $\left[\frac{y}{2}\right] = y^2$.

32*. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[x - \frac{1}{2}\right]$.

$\oint$ 2. Ecuaţii elementare (standard-mediu)

33. Să se rezolve ecuaţia: $6[x] + 4\{x\} = \frac{78 - 7x}{7}$.

34. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{10x+1}{5}\right] + \left[\frac{10x+6}{5}\right] = 3\left[\frac{10x-9}{5}\right]$.

35. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{x+1}{2}\right] = |x| - 1$.

36.** Să se rezolve ecuaţia: $[x] = 1 + \{x^2 - 1\}$.

37*. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2\{x\} - [x] = \frac{1}{4}$;

b) $\{x+1\} - [x] = \frac{3}{4}$;

c) $3[x] + 2\{x\} = \frac{20x - 42}{5}$.

38. Să se rezolve ecuaţia: $(x-2)[x] = \{x\} - 1$.

39*. Să se rezolve ecuaţia: $x - [x] = [0{,}5x - 2]$.

40. Să se rezolve ecuaţia: $2[x+2] + 3\{x+3\} = 1996$.

41. Să se rezolve ecuaţia: $[x + 2014] - [x + 2016] + [x - 2015] = -3$.

42. Să se rezolve ecuaţia: $[x] = \frac{x^2 - 1}{2x}$.

43.** Să se rezolve ecuaţia: $2[x] = [2x] + \left\{\frac{2x-1}{3}\right\}$.

44. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{x-2}{2}\right] + \left[\frac{3x-2}{8}\right] = \frac{3x-4}{2}$.

45.** Să se rezolve ecuaţia: $x^3 + 0{,}999 = 3x[x]\{x\}$.

46*. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{1}{10-x}\right] = \frac{1}{10-[x]}$.

47.** Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{1+[x]}$.

48. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{1-[x]}$.

49*. Să se rezolve ecuaţia: $[2001 + x] + \{2002x\} = 2003$.

Scanned with OKEN Scanner

50. Să se rezolve ecuația: $x + 4\{x\} = 2[x]$.

51. Să se rezolve ecuația: $[2x] = 2[x]$.

52*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x + [2x]}{4}\right] = \{x\}$.

53. Să se rezolve ecuația: $[x] = \left[\frac{1}{x}\right], x \in \mathbb{R}^*$.

54. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{4x}{3}\right] + \left[\frac{5x}{2}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = \left[\frac{8x}{3}\right] + x + \left[\frac{x}{2}\right]$.

55. Să se determine $\{x\}$ dacă: $\left[x + \frac{3}{8}\right] + [x] = [2x]$.

56*. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $[x]^3 - 4[x] + 12 = 3[x]^2$;

b) $2\{x\}^2 + \{x\} = 1$.

57*. Să se rezolve ecuația: $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [2x + 1]$.

58*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] + [2x] = 2$; b) $[x] + [3x] = 2$;

c) $[x] + [nx] = 2,\ n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

59*. Să se rezolve ecuația: $[x] \cdot \{x\} = [x] - \{x\}$.

60*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $2[x] + [x + 3] - [2x + 5] = 4$; b) $[x + 2] = [2x + 1]$.

61*. Să se rezolve ecuația: $\frac{x^2}{[x - 2]} - [x] = \frac{2[x]}{x - 2}$.

62*. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{2}{[x]} = \frac{3}{\{x\} + 2}$.

63*. Să se rezolve ecuația: $\{x\} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\{x\}}}$.

64.** Să se rezolve ecuația: $\{x\{x\}\} = 0$.

65*. Să se rezolve ecuația: $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{3}\right] = 1$.

66. Să se rezolve ecuațiile: $\left[\frac{x + 1}{3}\right] = \frac{3x + 5}{7} + \left[\frac{1 - 2x}{6}\right]$.

67.** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x + 2}{3}\right] + \left[\frac{x + 3}{4}\right] = 4$, unde:

a) $x \in \mathbb{Z}$; b) $x \in \mathbb{R}$.

68. Să se rezolve ecuația: $x + \left[\frac{x}{6}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

69**. Să se rezolve ecuația: $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.

70. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{2x+2}{3}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x-4}{3}\right]=2\sqrt{x^2-x}, x\in\mathbb{Z}$;

b) $\left[\frac{2x+2}{3}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x-4}{3}\right]=\left[2\sqrt{x-x^2}\right]$.

71**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=x$;

b) $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=[x]$;

c) $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=\{x\}$;

d) $\left[\frac{1}{1-\{x\}}\right]=\frac{x}{3\{x\}}$.

72**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{[x]}=\frac{1}{\{x\}}$;

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{[x]}$;

c) $\frac{1}{[x]}+\frac{1}{\{x\}}=\frac{1}{x}$.

73**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x]=\left[\frac{1}{x}\right]$;

b) $\{x\}=\left\{\frac{1}{x}\right\}$.

74. Să se rezolve ecuația: $[x]+\frac{1}{x}=\frac{1}{\{x\}}$.

§ 3. Ecuații în care apar expresii raționale (A)

75. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x+1}{x+2}\right]=\frac{x+4}{2x-1}$.

76. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x-2}{x+1}\right]=\left[\frac{2-x}{3}\right]$.

77. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x+1}{x+2}\right]=\frac{3x+1}{x+3}$.

Scanned with OKEN Scanner

78. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right] = 1-2x;$

b) $\left[\frac{x+1}{x+2}\right] = \frac{x}{x+1};$

c) $\left[\frac{2x+7}{3-x}\right] = 3x+1.$

79.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{2}{x+1}\right] = 2;$

b) $\left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{2}{x+1}\right] = 1;$

c) $\left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{2}{x+1}\right] = 3.$

80. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{3x+2}{x^2+x+3}\right] = \left[\frac{x+1}{x^2+x+1}\right].$

81. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$\left[\frac{2x^3+2x^2+2x+m}{x^2+1}\right] = x+3$, unde $m \in \mathbb{Z}$.

82. Să se rezolve ecuația: $\left\{\frac{x^2+5x+6}{x^2+2}\right\} = \frac{2}{3}.$

83. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{3x^2}{x^2+x+1}\right] = x.$

84. Să se determine soluțiile întregi ale ecuației: $\left[\frac{x^2+1}{x}\right] + \left[\frac{x}{x^2+1}\right] = 3.$

85*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right] = x.$

86. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}\right] = 5x-4.$

87. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{4x^2+24x+38}{x^2+6x+10}\right] = \left[\frac{2x^2+7}{x^2+3}\right].$

88*.** Să se rezolve ecuația: $\frac{2x}{2-x} = \left[\frac{2x}{x^2-x+1}\right].$

89. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x^3+2x^2+2x+1}{x^2+1}\right] = x+3.$

90.** Fie ecuația: $\left\{\frac{2x+13}{x+3}\right\} = \left\{\frac{3x+2}{x+3}\right\}.$

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se rezolve ecuația și să se arate că nu are valori iraționale.
b) Să se determine soluțiile din intervalul $(-1,1]$.

91. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația: $\left[\frac{x^3+1}{2x+3}\right] = \frac{x^3+2x^2+2x+1}{2x+3}$.

92. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right] = \left[\frac{x^2-x}{x+1}\right]$.

93. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{3x+2}{x^2+2}\right] \cdot \left\{\frac{2x^2+3x+6}{x^2+2}\right\} = \frac{-4(x^2+1)+6x}{x^2+2}$;

b) $\left[\frac{4x^2-4x-3}{3}\right] = (2x+1)^2$.

94. Să se determine valorile întregi ale lui m astfel încât să aibă loc egalitatea,

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$: $\left[\frac{(x^2-x+1)(x^2-x+3)}{(x^2-x+2)^2}\right] = \frac{x^2+2x+m^2}{2x^2+x+2}$.

95. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{2x}{2-x}\right] = \left[\frac{2x}{x^2-x+1}\right]$.

§ 4. Ecuații în care apar expresii raționale (B)

96. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \left[\frac{x^2+1}{x}\right]$;

b) $\left[\frac{x^2+1}{x}\right] + \left[\frac{x}{x^2+1}\right] = 3$.

97. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right] = \left[\frac{x^2-x}{x+1}\right]$.

98*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{4x^2+24x+38}{x^2+6x+10}\right] = \left[\frac{2x^2+7}{x^2+3}\right]$.

99.** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x}{x^2+1}\right] = \left[\frac{x^2}{3x-2}\right]$.

100. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x}{2-x}\right] = \left[\frac{2x}{x^2-x+1}\right]$.

101. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x}{x+2}\right] = \left[\frac{2x}{x^2+x+1}\right]$.

102*.** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{48x}{x^2+9}\right] = \left[x+\frac{16}{x}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

103**. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right]=\left[\frac{2x^2+x-1}{x^2-x-2}\right]$.

104*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left\{\frac{3x+5}{x+2}\right\}+\left[\frac{3x+2}{x+1}\right]=2,(7)$;

b) $\left\{\frac{3x+2}{x+1}\right\}+\left[\frac{3x+5}{x+2}\right]=2$;

c) $\left\{\frac{x+3}{x+4}\right\}+\left[\frac{3x+8}{x+3}\right]=2,9$.

105**. Să se rezolve ecuația: $\left\{\frac{x-4}{x+5}\right\}+\left[\frac{2x+1}{x+5}\right]=a, a\in\mathbb{R}-\{2\}$.

106*. Să se rezolve ecuația: $\frac{x+2}{3[x]+2}=\left[\frac{5x+2}{3x+2}\right]$.

107***. Să se rezolve ecuația: $\left\{\frac{x^2+2}{4}\right\}=\left\{\frac{x^2+x+1}{6}\right\}$

și să se determine valorile egalității de mai sus.

108**. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x-1}{3x+2}\right]=\frac{80}{9}+\frac{4}{3}x-4x^2$.

109**. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]\cdot\left\{\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right\}=\frac{2x-x^2}{x^2+1}$.

110***. Să se arate că ecuația: $\left[\frac{32x}{x^2+1}\right]=\frac{(3x+1)^2}{x^2}+\frac{(x+3)^2}{2x+1}$

nu admite soluții pozitive.

111**. Să se rezolve ecuația: $2^{[3x-1]}=\left[\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right]$.

112. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x^3+5}{x^2+3}\right]=\frac{3p+1}{p}, p\in\mathbb{Z}^*$.

§ 5. Ecuații (nivelul mediu-avansat)

113***. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x}{6}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{2}\right]=x$;

b) $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{8}\right]=\frac{7x}{8}$;

c) $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]=\frac{13x}{12}$;

d) $\left[\frac{x+2}{5}\right]-\left[\frac{2x+3}{10}\right]-\left[\frac{3x+4}{15}\right]=\frac{x-8}{2}$;

e) $[3x]+[4x]=[x]+6x$;

Scanned with OKEN Scanner

f*) $\left[\frac{x}{2}\right] + \{4x\} = 4\sqrt{5} - 7;$

g*) $[5x^3] + \{2x^2\} = 4 - \sqrt{5};$

h*) $\left[\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right] = \left[\sqrt{\frac{x+2}{3}}\right].$

114***. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + \left[\frac{x}{6}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right];$

b) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x;$

c) $\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{3}\right] + \left[\frac{x+3}{4}\right] = 3x;$

d) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] = x;$

e) $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+3}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{3}\right] + \left[\frac{x+4}{3}\right] + \left[\frac{x+7}{3}\right].$

115***. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] + [2x] + [3x] - 4x = 5;$

b) $[x-1] + \left[x - \frac{3}{4}\right] + \left[x - \frac{1}{2}\right] + \left[x - \frac{1}{4}\right] = 1;$

c) $[[x+3] + [3x] + x] - [2x+5] = 4;$

d) $\left[x + \frac{3}{8}\right] = [2x] - [x]$. Să se găsească valorile lui $\{x\}$ și care sunt soluțiile ecuației.

116***. Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{Z}$ apoi în $\mathbb{R}$:

a) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 2013;$

b) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 2014;$

c) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] = 1596;$

d) $\left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x+1}{5}\right] + \left[\frac{x+2}{5}\right] + \left[\frac{x+3}{5}\right] + \left[\frac{x+4}{5}\right] + \left[\frac{x+5}{5}\right] = 2017;$

e) $[x] + [3x] + [6x] + [9x] + [18x] + [36x] = 14305.$

117*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] = x - \frac{1}{x};$

b) $[3x] + [-2x] = 3;$

c) $\left[\frac{2x-2}{3}\right] - \left[\frac{x-1}{6}\right] = 2002.$

Scanned with OKEN Scanner

118*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] = \frac{x^2-1}{2x}$; b) $x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right]$.

119**. Să se rezolve ecuația: $[x[x]] + [x] = 6$.

120*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] - [\sqrt{x}] = 4$;

b) $[x] + [x^2] = [x^3]$;

c) $[x] + [x^2] = 2$, în mulțimea numerelor reale pozitive;

d) $x^2 = [x^2] + \{x\}^2$, unde $x \in [1,2]$.

121*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + \left[\sqrt{5-x^2}\right]^2 = 5$;

b) $4x - 14\left[\sqrt{2x+19}\right] + 59 = 0$.

122*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[\sqrt{x}] + \sqrt{[x]} = 2\sqrt{x}$;

b) $\left[\sqrt{1+5x}\right] = 2\sqrt{x}$.

123*. Să se rezolve ecuațiile în $\mathbb{R}_+$:

a) $x - 10\left[\sqrt[3]{x}\right] + 3 = 0$;

b) $\left[\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right] = x$.

124*. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{x[x]} + \frac{1}{[x]\{x\}} + \frac{1}{x\{x\}} = \frac{m}{x^2}$, unde $m \in \{5,6\}$.

125*. Să se rezolve ecuația: $|x^2 - 5x + 5| + \frac{1}{|x^2-5x+5|} + \left\{\frac{x+3}{2x}\right\} = 2$.

126**. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+6} = [x^2+1]$.

127*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x[x]] = [[x]\{x\}]$;

b) $\{x[x]\} = [x\{x\}]$.

128**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x + [x]] = [x + \{x\}]$;

b) $|x + [x]| = |x + \{x\}|$;

c) $\{x + [x]\} = \{x + \{x\}\}$;

d) $|[x-1]| + [|x-1|] = 1$.

129*. Să se rezolve ecuația: $\big||x| + \{x\}\big| = [\{x\} + |x|]$.

130***. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[|x|] = |[x]|$;

b) $\sqrt{[x]} = [\sqrt{x}]$.

Scanned with OKEN Scanner

131***. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x^3+8x^2-9x+27}{162}\right]=\frac{x}{3}$.

132**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x\left(x-\frac{1}{2}\right)=[x]\left([x]+\frac{1}{2}\right)$;

b) $2[x](1+\{x\})=2x+1$.

133*. Să se rezolve ecuația: $[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+1=0$.

134*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[2x-5]=\sqrt{2}[3x-7]$;

b) $\left[\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}\right]=x$.

135*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x^2-x+1]^2-(2x+1)[x^2-x+1]+x^2+x=0$;

b) $[x^2-3x+3]^2-(2x-1)[x^2-3x+3]+x^2-x=0$.

136*. Să se rezolve ecuația: $3x^2=[2\sqrt{3}x]\{2\sqrt{3}x+1\}+1$.

137*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3-[x]^3=x^2-[x]^2$;

b) $x^3-3x^2=[x]^3-3[x]^2$.

138*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\{x\}^2+2x\cdot\min(x,[x])=(x+3)(x-5)+2x+24$;

b) $[x]\cdot\{x\}=[x]-\{x\}$.

§ 6. Ecuații (nivelul avansat)

139*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x]\{x\}=1$;

b) $[x\{x\}]=1$;

c) $x[x]=\{x\}$;

d) Fie ecuația $\{x\}[x]=x$.

1) Arătați că ecuația nu are soluție strict pozitivă.

2) Arătați că ecuația are o infinitate de soluții negative.

e) $[x[x]]=1$;

f) $[x]=x\{x\}$ și să se arate că toate soluțiile strict pozitive sunt iraționale.

140**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{\{x\}}{[x]}=x$; b) $\frac{x}{\{x\}}=[x]$; c) $\frac{[x]}{\{x\}}=x$.

141**. Să se rezolve ecuația: $\{x\}=\{\sqrt{x}\}$.

Scanned with OKEN Scanner

142**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\{x[x]\} = \{x\{x\}\}$; b) $[x[x]] = [x\{x\}]$; c) $[x]\{x\} = x|x|$.

143**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x] - \frac{1}{[x]} = \{x\} - \frac{1}{\{x\}}$;
b) $[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = \{x\} + \left[\frac{1}{x}\right]$;
c) $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$.

144**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[2x-1] = [2-3x]$;
b) $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \left[\frac{1-2x}{6}\right]$;
c) $\left[\frac{x-3}{4}\right] = \left[\frac{x-4}{3}\right]$;
d) $\left[\frac{3-x}{3}\right] = \left[\frac{1-x}{2}\right]$;
e) $\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{x-2}{3}\right]$.

145*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[2x^2 - x + 1] = [x^2 + x - 1]$;
b) $\left[\frac{x^2}{2} + x\right] = \left[x - \frac{1}{2x^2}\right]$;
c) $\left[\frac{x^2+2x}{3}\right] = [x+3]$;
d) $[x^4 - 4x^2] = [x^4 + 4x^2]$.

146*. a)Există numere care nu sunt întregi și care verifică ecuația:
$x + \frac{2015}{x} = [x] + \frac{2015}{[x]}$?
b) Să se rezolve ecuația $x + \frac{2025}{x} = [x] + \frac{2025}{[x]}$.

147. Să se rezolve ecuațiile:
a) Fie ecuația $x^3 - [x] = 3$ cu $x > 0$. Să se determine
$S = \sum_{\alpha \in A} \alpha^3$, unde A este mulțimea soluțiilor ecuației.
b) $x^5 = [x] + 5$.
c) Fie ecuația $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Să se arate că ecuația are toate rădăcinile reale și să se determine $[x_i], i = \overline{1,3}$.

Scanned with OKEN Scanner

148**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{5}\right]=3$;

b) $\left[\frac{2x-1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{4}\right]=4$;

c) $\left[\frac{11}{x}\right]+\left[\frac{12}{x}\right]=13$.

149***. Să se rezolve ecuația: $\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]=1$.

150**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{1}{x}\right]+\left[-\frac{1}{x}\right]=-1$;

b) $\left\{\frac{1}{x}\right\}+\left\{-\frac{1}{x}\right\}=1$.

151**. Să se rezolve ecuația: $4\left[2x-\frac{1}{3}\right]-[3x-1]=-5$.

152**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x-2\sqrt{x-2}+\left[x-\frac{2010}{671}\right]^2=1$;

b) $\left[\left\{\frac{x-2}{3}\right\}-\frac{x-2}{3}\right]=\frac{1-5x}{5}$.

153**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{x^2}{|x-2|}-|x|=\frac{2|x|}{x-2}$;

b) $\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-[x]}$;

c) $\frac{x}{x+4}=\frac{5[x]-7}{7[x]-5}$;

d) $x+\frac{2}{2x-1}=[x]+\frac{2}{2[x]-1}$.

154**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x}{2}\right]+\{4x\}=4\sqrt{5}-7$;

b) $[5x^3]+\{2x^2\}=4-\sqrt{5}$.

155***. Să se rezolve ecuația: $[x]+\left[\frac{2x+1}{2}\right]=[x^2+1]$.

156*. Să se rezolve ecuația: $[[x+3]+[3x]+x]-[2x+5]=4$.

157*. Să se rezolve ecuația: $\left\{\frac{x}{2}\right\}+\{x\}+\{2x\}=x$.

Scanned with OKEN Scanner

158. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2$;

b) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = -\frac{5}{4}$.

159.** Să se rezolve ecuația: $\{x^2+1\}[x^2+1] = 2(1-x^2)(1-[x^2+1])$.

160.** Să se rezolve ecuația: $2[x] = [2x] + \left\{\frac{2x-1}{3}\right\}$.

161*. Să se rezolve ecuația: $[x^2] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2\sqrt{x}]$.

162*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{4|x|}{3}\right] = \left|\frac{4[x]}{3}\right|$.

163. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x+2] + \{x+3\} + [x+2]\{x+3\} = 4$;

b) $\{x\}^2(x+[x])^2 + [x]^2(x+\{x\})^2 = 4 + 2[x]^2\{x\}^2$;

c) $2\left[\frac{[x]}{2} + \{x\}\right] + \left\{\frac{[x]}{2} + \{x\}\right\} = x$.

164.** Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] - \frac{2}{\{x\}} = 1$;

b) $\frac{2}{\{x\}} = \frac{4}{[x]} + \frac{5}{x}$;

c) $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x}$;

d) $x = \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}}$;

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} = \frac{1}{\{x\}}$;

f) $\frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} = \frac{1}{1+\{x\}}$;

g) $[x] + \frac{1}{x} = \frac{1}{\{x\}}$;

h) $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\}$;

i) $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}$;

j) $\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]}$;

Scanned with OKEN Scanner

k) $\{x\} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{[x]}}$.

165*. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{2}{3}\sqrt{4x - x^2}\right] = x\sqrt{2}$;

b) $\left[\frac{x+2}{3} - \left[\frac{x}{3}\right]\right] = \sqrt{5x^2 + 6x}$.

166*. Să se rezolve ecuația: $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] + \sqrt[4]{[x]} = 2\sqrt[4]{x}$.

167. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{[\sqrt{x}] - 3\{\sqrt[3]{x}\} + 1} + \sqrt[3]{[\sqrt{x}] - 3\{\sqrt[3]{x}\} + 8} + \sqrt[4]{[\sqrt{x}] - 3\{\sqrt[3]{x}\}} = 3.$$

168**. Să se rezolve ecuația: $\dfrac{1}{2\sqrt{[x]^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{[x][x+1]^3}} = \dfrac{2}{[x][x+2]}$.

169**. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ ecuația:

$$\sqrt{x + [x]} + \sqrt{x + \{x\}} = \sqrt{x + [x]\{x\}} + \sqrt{x + 1}.$$

170**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\{x\} = \left\{\frac{x^2}{2}\right\} = \left\{\frac{x^3}{3}\right\}$;

b) $\{x\} = \{x^2\} = \{x^4\}$.

c) Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\{x\} = \{x^2\} = \{x^5\}$. Demonstrați că $x \in \mathbb{Z}$.

171**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\dfrac{[x]}{\{x\}} = \dfrac{2007x}{2008}$; determinați numărul soluțiilor ecuației;

b) $[x]\{x\} = 2001x$;

c) $\dfrac{\left[\frac{x}{3}\right]}{\left[\frac{x}{4}\right]} = \dfrac{21}{16}$ pentru $x > 0$.

172**. Să se rezolve ecuația: $[\sqrt{x} + \sqrt{x+1}] = [\sqrt{4x+1}]$.

173**. Să se determine cel mai mic număr și cel mai mare număr real care verifică ecuația: $[x] = -20\{x\}$.

174*. Să se determine cea mai mică soluție pozitivă a ecuației: $\{x\}^2 = \dfrac{2}{[x^2]}$.

175. Să se determine numărul soluțiilor ecuațiilor:

a) $\{32x\} = x$; b) $[x] = \{x\}\sqrt{2020}$; c) $\{x\} = \dfrac{x + [x]}{1999}$.

Scanned with OKEN Scanner

176**. Să se determine cea mai mică valoare a lui x care satisface ecuația: $x - [\sqrt{x}]^2 = 2020$.

177**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 - 3[x] + 2 = 0$;

b) $[2x] = x^3 - 3$;

c) $x^3 - [x] = 3$.

178**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3x^3 - [x]^2 - 2[x] - 4 = 0$.

b) $[x](x^2 + 1) = x^3$:

1) Să se arate că ecuația are o singură soluție în intervalul $(n, n+1)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Să se arate că ecuația are soluții pozitive iraționale.

c) $x^3 + 0{,}999 = 3x[x]\{x\}$;

d) $\{(x+1)^3\} = x^3$.

179**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x] = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 2$;

b) $\frac{3}{2}[x] + \{x\} = \frac{x^4}{2} - x^2 + x$;

c) $[(x-1)^3] = [x-1]^3 = [(x-1)(x-2)(x-3)]$;

d) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 2 = 3\left([x] + \frac{1}{[x]}\right)$; determinați toate numerele reale $x \geq -1$ care verifică egalitatea.

180**. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine numărul soluțiilor ecuației:

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2, \text{ dacă } 1 \leq x \leq n.$$

b) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației:

$$x^3 - [x^3] = (x - [x])^3, \text{ dacă } 1 \leq x < n, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2.$$

181***. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x^6 - 1] = -\frac{9(x-1)^2}{4}$;

b) $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$;

c) $\{x\}^{2008} - [x]^{2008} - x^{2008} = 0$;

d) $x^n + [x]^n = \{x\}^n, n \in \mathbb{N}^*$.

182***. Se consideră ecuația $x^2 - \left([x] + \left[\frac{1}{x}\right] + 1\right)x + 1 = 0$.

a) Să se arate că $3 + 2\sqrt{2}$ este soluția.

b) Să se arate că dacă α este soluția ecuației, atunci $\{\alpha\} + \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} = 1$.

c) Demonstrați că ecuația nu are soluții raționale pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

183*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=2$;
b) $\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=1$;
c) $\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=3$;
d) $\{x\}+\{2x\}+\{3x\}=p$; discuție.

184*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\{x\}+\{2x\}+\left\{\frac{x}{2}\right\}=x$.
b) Se consideră ecuația $\{x\}+\{2x\}=\{3x\}$.
1) Să se rezolve ecuația.
2) Să se demonstreze că există o infinitate de soluții $x_n \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ale ecuației, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n+\frac{1}{3}$ nu este soluție a ecuației.
3) Să se demonstreze că există șiruri de soluții $(x_n)_{n\geq 1}$ ale ecuației, astfel încât șirul $\left(x_n+\frac{1}{3}\right)_{n\geq 1}$ este tot un șir de soluții ale ecuației.

185*. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{6x}{x^2+9}\right]=\sin\frac{\pi x}{2}$.

186*. a) Să se arate că există o infinitate de numere raționale $x>0$, astfel încât $\{x^2\}+\{x\}=0{,}99$.
b) Să se arate că nu există numere raționale $x>0$, astfel încât $\{x^2\}+\{x\}=1$.

187*. Fie ecuațiile:
a) $\left\{\frac{1}{\{x\}}\right\}=\frac{1}{x}$;
b) $\{x\}=\frac{1}{x}$.
Se cere: α) Să se arate că ecuațiile nu au soluții raționale.
β) Să se determine o soluție a fiecărei ecuații.
γ) Să se determine soluțiile x cu $[x]=1$.

§ 7. Ecuații în mulțimea numerelor întregi

188. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuațiile:
a) $5[\sqrt{n}]=n+2$;
b) $[\sqrt{n}]=\frac{n-3}{5}$;
c) $n=3[\sqrt{n}]+1$;
d) $x=2[\sqrt[3]{x}]+1$.

Scanned with OKEN Scanner

189. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale:
$$\left[\sqrt{1\cdot 2}\right]+\left[\sqrt{2\cdot 3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n(n+1)}\right]=231.$$

b) Rezolvați ecuația: $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k^2-k+1}\right]=191.$

c) Determinați $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ care verifică relația
$$\left[\sqrt{9n^2+1}\right]+\left[\sqrt{9n^2+2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{9n^2+24n}\right]=349.$$

190. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația: $\left[\frac{x^2-4}{3}\right]=(x+2)^2.$

191*. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația: $[\sqrt{n}]+\left[\frac{n-2}{3}\right]+1=n.$

192. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât: $[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}]=n.$

193. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația: $\left[\frac{x+2}{3}\right]+\left[\frac{x+3}{5}\right]+\left[\frac{x+5}{2}\right]=4.$

194*. Există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $[\sqrt{2}n]+[\sqrt{3}n]=100$?

195*. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $2^{[\sqrt{n}]}=n;$

b) $2^{[\sqrt[3]{n}]}=n;$

c) $2^{[\sqrt[3]{n}]}=n^2.$

196*. Să se determine soluțiile întregi ale ecuației:
$$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]+\left[\frac{x}{4!}\right]+\left[\frac{x}{5!}\right]+\left[\frac{x}{6!}\right]+\left[\frac{x}{7!}\right]+\left[\frac{x}{8!}\right]+\left[\frac{x}{9!}\right]+\left[\frac{x}{10!}\right]=m,$$
unde $m\in\{1001,1002\}$.

197*. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât:
$$\left[\frac{3}{1}\right]+\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{7}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2n+1}{n}\right]=101.$$

198*. Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor naturale:
$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}\right]=[\sqrt{n+10}].$$

199. Determinați numerele întregi pentru care:
$$\left[\sqrt{n^2+3n+9}\right]=\sqrt{n^2+3n+9}.$$

200.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, știind că: $\left[\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right]=2.$

201.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$: $\left[1000\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)\right]=985.$

202*. Să se rezolve ecuația în $\mathbb{Z}$: $\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{6}\right]=\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{4}\right].$

203*. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care: $\{\sqrt{n}\}=\{\sqrt{n+2011}\}.$

Scanned with OKEN Scanner

204*. Să se rezolve ecuația: $x-1=\left\{n\sqrt{2013}+\frac{n}{2}\right\}-\left\{n\sqrt{2013}\right\}$.

205**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n^2}\right]=n, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$;

b) $\left[\sqrt[n-1]{n}+\sqrt[n-1]{n^2}\right]=n, n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}$.

206**. Rezolvați ecuația: $n-\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{12}\right]+\left[\frac{n}{18}\right]=11\cdot\left[\frac{n}{36}\right], n\in\mathbb{N}^*$.

207**. Să se rezolve ecuația în care $n\in\mathbb{N}^*$: $\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]=\frac{2n}{n+1}$.

208**. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația: $\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{3}\right]=\left[\frac{n}{4}\right]$.

209**. Să se arate că ecuația: $\left\{\frac{1}{x}\right\}+\left\{\frac{1}{y}\right\}+\left\{\frac{1}{z}\right\}=\left\{\frac{1}{t}\right\}$

are o infinitate de soluții în numere naturale, unde $t<x<y<z$.

210**. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{N}$ ecuația:

$$\frac{n}{m}=\left[\sqrt[3]{n^2}\right]+\left[\sqrt{n}\right]+1 \text{ are o soluție } n_m.$$

§ 8. Ecuații în care sunt implicate trinoamele de gradul II (A)

211. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x]^2-[x]-6=0$;

b) $3\{x\}^2+4\{x\}-4=0$;

c) $2\{x\}^2+5\{x\}+2=0$;

d) $6[x]^2-[x]-1=0$;

e) $5[x]^2-11[x]+2=0$.

212. Să se rezolve ecuațiile:

a) $3|x|^2+4|x|-4=0$;

b) $3[x]^2+4[x]-4=0$;

c) $3\{x\}^2+4\{x\}-4=0$.

213. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[x]^2-2[x]-3=0$;

b) $3[x]^2-5[x]-2=0$;

c) $6[x]^2+[x]-2=0$.

214**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $16\{x\}^2-8x+1=0$;

b) $2\{x\}^2-10x+1=0$;

c) $25\{x\}^2-10x+1=0$.

Scanned with OKEN Scanner

215*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^2 - x + [x] - 2 = 0$;
b) $[x]^2 + 2x + \{x\} = \pi$;
c) $3x^2 + 2(x - [x]) = 5$;
d) $3[x] = 2x^2 + x - 4$.

216***. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^2 - 5[x] + 6 = 0$;
b) $4x^2 - 4[x] - 3 = 0$;
c) $2x^2 + [x] - 15 = 0$;
d) $4x^2 + 8[x] + 7 = 0$;
e) $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

217**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^2 - [x] - 2 = 0$;
b) $x^2 - 8[x] + 7 = 0$;
c) $x^2 - 10[x] + 9 = 0$;
d) $9x^2 + 3[x] - 19 = 0$;
e) $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$;
f) $x^2 - 12[x] + 11 = 0$.

218. Fie ecuațiile $[x^2 - 3x] = -2$ și $[x^2 - 4x + 5] = 2$.
Să se determine soluțiile comune.

219*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x^2] - x - 2 = 0$;
b) $[x^2] + x - 6 = 0$;
c) $[x^2] - 3x + 2 = 0$;
d) $[x^2] - 5x + 4 = 0$.

220*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x^2] - 3|x| + 2 = 0$;
b) $[x^2] - 5|x| + 4 = 0$.

221*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $3x^2 - 5x[x] - 2 = 0$;
b) $13\{x\}^2 - 1013x + 2013\{x\} = 0$;
c) $[x^2 + x + 1] = |x + 5|$;
d) $x^2 + 2[x]\{x\} + 3\{x\}^2 = 4$.

222*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\{x\}^2 + 22\{x\} = 10x - 9$;
b) $3x^2 = [2\sqrt{3}x] \cdot \{2\sqrt{3}x\} + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

223**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x^2]-4[x]+3=0$;
b) $[x^2]-5[x]-2=0$.
224**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $\left[x^2+2x+\frac{3}{4}\right]=2x+1$;
b) $\left[x+\frac{3}{2}\right]-\{x\}=x^2-x-2$;
c) $x^2-0{,}5[x^2-2]=2+3[0{,}5x^2-3]$.
225**. Să se rezolve ecuația: $[x^2-2x]+2[x]=x^2$.
226***. Să se determine pentru fiecare valoare $n, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, numărul soluțiilor ecuației $x^2=[x^2]+\{x\}^2$ în intervalul $[1,n], n>1$.
227**. Să se rezolve ecuația: $2x^2-3[x]=|x|+\{x\}+3$.
228**. Să se rezolve ecuația: $[x]+|x-2|=x^2$.
229**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^2-x=\{x\}+\{x\}^2$;
b) $x^2(1-[x])=1+\{x\}$.
230**. Să se rezolve ecuația: $x^2-13[x]+11=0$.

ϕ 9. Ecuații în care sunt implicate trinoamele de gradul II (B)

231*. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x^2]=[x]^2$;
b) $\{x^2\}=\{x\}^2$.
232**. Să se rezolve ecuația: $x^2-3x=[3-2x]$.
233. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[2x^2-4x+3]=[-2x^2+4x+3]$;
b) $[x^2-x-2]=[x]$;
c) $[x^2-4x+4]=[-2x^2+8x-6]$;
d) $[-2x^2-x+1]=[x^2-x+1]$;
e) $\left[x^2-x+\frac{1}{2}\right]=\left[-x^2+x+\frac{1}{2}\right]$;
f) $[-x^2+3x]=\left[x^2+\frac{1}{2}\right]$.
234***. Să se determine valorile întregi ale lui m pentru care ecuația: $[x^2]-2020x+m=0$ are un număr impar de soluții.

Scanned with OKEN Scanner

235***. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x^2] + [x] = 2$;
b) $3[x] = [x^2] + 2$.

236**. Să se rezolve ecuația: $x^2 + 2[x]\{x\} = 3(3 - \{x\}^2)$.

237**. Să se rezolve ecuațiile:
a) să se arate că $[x^2] = [x]$ dacă și numai dacă $0 \leq x < \sqrt{2}$;
b) $x^2 = [2x]$;
c) $\sqrt{[x]} = [\sqrt{x}]$;
d) $[x^2] = [2x]$.

238***. Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația:

$$\{x^2\} + \{x\} = 0{,}99.$$

239**. Să se rezolve ecuațiile:
a) $x^2 - 2x - 1 = [5 - 3x]$;
b) $x^2 - 2 = [2 - 3x]$.

240**. Să se rezolve ecuația: $\left[\sqrt{x^2 + 2x + 11}\right] = \sqrt{x^2 + 2x + 7} + \frac{1}{2}$.

241***. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x^2] + 1 = 2[x]$;
b) $3[x] = [x^2] + 2$;
c) $[x^2] = 3[x] + 1$.

242**. Să se rezolve ecuația: $[-x^2 + 5x - 1] - [x^2 - 5x + 8] = 1$.

243*. Să se rezolve ecuația și să se scrie suma pătratelor soluțiilor:

$$2x^2 + [x] = x^4.$$

244***. Să se rezolve ecuația: $\left[x[x\{x\}]\right] = 0$.

245**. Fie: 1) $[a]x^2 + [b]x + [c] = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$;
2) $[-a]x^2 + [-b]x + [-c] = 0, a > 1, b < 0, c > 0$.
Să se arate că dacă 1) nu admite rădăcini reale, atunci nici 2) nu admite rădăcini reale, iar dacă 2) are rădăcini reale, atunci și 1) are rădăcini reale.

246**. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuația:

$$a\left[x + \frac{1}{2}\right] + b[x]^2 = a[2x] + b^2c - ac. \text{ Discuție.}$$

247*. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu $c \geq 0, b < 0, a \geq 1$ (1) și ecuația $[a]x^2 + [b]x + [c] = 0$ (2). Să se arate că:
a) Dacă ecuația (1) are rădăcini reale, atunci ecuația (2) are rădăcini reale.
b) Dacă ecuația (2) nu are rădăcini reale, atunci nici ecuația (1) nu are rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

248***. Fie ecuația $x^2 - 3x - 2 = 0$, cu rădăcinile $x_1 > 0$ și $x_2 < 0$.
a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numerele $\sigma_n = x_1^n + x_2^n$ sunt impare.
b) Arătați că $[x_1^n] - n$ este număr par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

249**. Să se rezolve ecuația: $[a]x^2 - a[x] + \{a\} = 0$, unde $a > 0$.

250. Există oare $x \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\{x^2\} + \{x\} = 1$?

251***. Fie numerele $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și mulțimile
$A = \{x \in \mathbb{R} |\ |x|^2 + a|x| + b = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} |\ [x]^2 + \alpha[x] + \beta = 0\}$.
Știind că mulțimea $A \cap B$ are exact trei elemente, să se demonstreze că a nu poate fi număr întreg.

252***. Să se rezolve ecuațiile:
a) $[x] + [2x] = [x^2]$;
b) $[x][2x] = [x^2]$.

253***. Să se rezolve ecuația: $\left[\{x\} \cdot \left[\frac{2 - \{x\}}{1 - \{x\}}\right]\right] = \left[\frac{\{x\}}{1 - \{x\}}\right]$.

254***. Să se rezolve ecuația: $\Big\{x + \Big\{x + \Big\{x \ldots + \{x + \{x\}\}\Big\}\Big\}\Big\} = x$.

Scanned with OKEN Scanner

soluții

8

Ecuații

ϕ 1. Ecuații elementare (standard)

1. a) $x \in [0,1)$.

b) $x \in \mathbb{Z}$.

c) $x \in \mathbb{Z}$.

d) $x \in [0,1)$.

e) $[x] = \{x\} \in [0,1) \Rightarrow x = 0$.

f*) Rezultă $[x] \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow [x] = x \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.

g*) Avem $|x| = \{x\} > 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$. Pentru $x \in [0,1)$ ecuația devine $x = x$. Pentru $x \in (-1,0)$, avem $\{x\} = \{1+x\} = 1 + x = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\left(1 + x \in (0,1)\right)$. Așadar, $x \in [0,1) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

h*) Evident $x = 0$ este soluție. Dacă $x > 0$ membrul drept este ≥ 0 și cel stâng strict negativ. Dacă $x < 0 \Rightarrow -x > 0$ și $[x] < 0$. Singura soluție este $x = 0$.

i**) $\{x\} = -x \in [0,1) \Rightarrow x \in [0,1) \Rightarrow -x = \{x\} = \{1+x\} =$
$= 1 + x = -x, x = -\frac{1}{2}$, care verifică ecuația.

2. a) $x \in [n, n+1); x \in [7,8)$.

b) $x = n + \frac{3}{5}, n \in \mathbb{Z}, x = n + a, n \in \mathbb{Z}$.

c) $x \in \emptyset$.

d) $\emptyset$.

e) $|x| = g$, dacă $g = 0 \Rightarrow x = 0$, dacă $g < 0$ ecuația nu are soluție, dacă $g > 0 \Rightarrow x = \pm g$.

f*) Pentru $m = 0 \Rightarrow x \in [0,1)$.

Pentru $m < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Pentru $m > 0 \Rightarrow [x] = \pm m \Rightarrow x \in [m, m+1) \cup [-m, -m+1)$.

g) $[[x]] = a$. Are soluții numai dacă $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = a$.

h) Ecuația are soluție numai dacă $b \in [0,1) \Rightarrow x = b$.

i) Ecuația are soluție doar dacă $a = 0 \Rightarrow x = 0$.

j) Ecuația are soluție doar dacă $b = 0 \Rightarrow x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3*. a) De remarcat $\forall x \in \mathbb{R}$, ambii membri sunt nuli, deci $x \in \mathbb{R}$.

b) Din $\{|x|\} = |x|, \{x\} = \{x\}$ deci $S_1 = [0, \infty)$.

Fie $x < 0 \Rightarrow \{-x\} + \{x\} = 2\{x\} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ sau $\{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_k = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

c) Evident pentru $x \geq 0$ verifică ecuația. Fie $x < 0$, atunci avem $[x] < 0$ și inecuația devine $[-x] = -[x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ deci $x \in [0, \infty) \cup (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$.

4*. a) $x = [x] + \{x\} = k + t \Rightarrow x \in \left\{1, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right\}$.

b) $x \in \left\{0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{18}{5}, \frac{24}{5}\right\}$.

c) Avem $2[x] = 3x - 4 = 1 \Rightarrow [x] = \frac{3x-4}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2k+4}{3}$

$\Rightarrow \left[\frac{2k+4}{3}\right] = k \Rightarrow k \in \{2,3,4\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{12}{3}\right\}$.

R.M.T. nr. 1/2014, Mircea Maria Stoica

d) Soluția 1

Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, și ecuația devine:

$(k + t)k = k + t + 2 \Rightarrow t(k - 1) = -k^2 + k + 2$, cu $k \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{-k^2+k+2}{k-1} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{-1,2\}$ și $t = 0 \Rightarrow x \in \{-1,2\}$.

Soluția 2

Evident $x \neq 0$. $[x] = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$ (1) $\Rightarrow \frac{2}{x} = k \Rightarrow x = \frac{2}{k}$.

Dacă $k \geq 3$ ecuația (1) devine $0 = \frac{2}{k} + 3$, fals.

Dacă $k \leq -3 \Rightarrow x[x] \geq 0$ și $x + 2 < 0$, fals.

Prin urmare, $k \in \{\pm 2, -1, 1\}$ și se constată că $x \in \{-1,2\}$.

e) Pentru $x \leq -1 \Rightarrow [x] = -2x$ și cum $[x] \leq -1$ și $2x \geq 2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Pentru $x \in (-1,1) \Rightarrow [x] = 2$, fals.

Pentru $x \in (1, \infty) \Rightarrow [x] = 2x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,

$[x] = 2x \Rightarrow \left[\frac{n}{2}\right] = n \Rightarrow n \leq \frac{n}{2} < n + 1 \Rightarrow n \leq 0$ și din ecuația dată membrul drept este pozitiv și cel stâng este negativ; prin urmare, ecuația nu are soluție.

R.M.G. nr. 28

5. a) $x \in \left\{2, \frac{9}{2}, \frac{13}{4}, \frac{23}{4}\right\} \cup (-\sqrt{10}, -3]$;

b) $x \in (-\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10})$;

c) $x \in [-3, -2) \cup [3,4)$.

G.M. nr. 8/2005

Scanned with OKEN Scanner

6. a) Evident $x \in \mathbb{Z}$.

b) $x \in [0,1)$.

c) Avem $2[x] = [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} = S$

întrucât $[x] \neq -\frac{1}{2}$.

d) $x \in \mathbb{R}$.

e) $[x] = |x| \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ și cum $|x| = [x] \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.

f*) Din $\{x\} = |x| \in [0,1) \Rightarrow x \in (-1,1)$. Dacă $x \in (-1,0)$, atunci $\{x\} = \{1 + x\} = |x| \Rightarrow 1 + x = -x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Prin urmare, $x \in [0,1) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

g*) Utilizăm relația $\{x\} + \{-x\} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$.

Evident, dacă $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = \{-x\} = 0$.

Dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, atunci $\{-x\} = 1 - \{x\} = \{x\} \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = k + \frac{1}{2}$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $x \in \mathbb{Z} \cup \left\{k + \frac{1}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

h*) Din $[|x|] = |[x]|$, dacă $x \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 0$ deci ecuația devine $[x] = [x] \Rightarrow S_1 = [0, \infty)$.

Fie $x < 0 \Rightarrow [x] < 0$ și ecuația devine $[-x] = -[x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z}_- = S_2$. Prin urmare, $x \in \mathbb{Z}_- \cup [0, \infty)$.

7. a) Evident $\{x\} = 0{,}25$ și $2[x] = 4 \Rightarrow [2] \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

b) $2[x] + \{x\} = -4 + 0{,}3 \Rightarrow \{x\} = 0{,}3$ și $[x] = -2, x = -1{,}7$.

c) $\{x\} = 0{,}9 \quad 2[x] = 3 \Rightarrow x = \emptyset$.

d) $[x] = 1, \ 2\{x\} = 0{,}3 \Rightarrow \{x\} = \frac{3}{20} \Rightarrow x = 1 + \frac{3}{20} = \frac{23}{20}$

sau $[x] = 0, 2\{x\} = 1{,}3 \Rightarrow \{x\} = 0{,}65 \Rightarrow x = 0{,}65, \ x \in \left\{\frac{23}{20}, \frac{13}{20}\right\}$.

e) $4k + 3t = 2k + 2t - \frac{5}{3} \Rightarrow 2k + t = -2 + \frac{1}{3} \Rightarrow k = -1, t = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{2}{3}$.

8. a) Evident $\frac{x-1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2k + 1$ și ecuația se scrie

$\left[\frac{2k+2}{3}\right] = k \Rightarrow \frac{2k+2}{3} - 1 \leq k \leq \frac{2k+2}{3} \Rightarrow k = \{0,1,2\} \Rightarrow x = 0, x = 3,$

$x = 5$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Notăm $\frac{x+1}{2}=k\Rightarrow x=3k-1\Rightarrow\left[\frac{3k-4}{2}\right]=k\Rightarrow$

$\Rightarrow k\leq\frac{3k-4}{2}<k+1\Rightarrow k\in\{4,5\}\Rightarrow x\in\{11,14\}.$

c) Soluția 1

Evident $\left[\frac{x+1}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{3x-1}{4}=k\Rightarrow x=\frac{4k+1}{3}$ (1)

$[E]\leq E<[E]+1$ (2) $k\leq\frac{x+1}{2}<k+1\Rightarrow 2k\leq x+1<2k+2\Rightarrow$

$\Rightarrow 2k\leq\frac{4k+4}{3}<2k+2\Rightarrow 3k\leq 2k+2<3k+3\Rightarrow k\in\{0,1,2\}.$

Înlocuind în (1) obținem: $x=\frac{1}{3},x=\frac{5}{3},x=3.$

Soluția 2

Utilizăm (2)

$\left[\frac{x+1}{2}\right]\leq\frac{x+1}{2}<\left[\frac{x+1}{2}\right]+1\Leftrightarrow\frac{3x-1}{4}\leq\frac{x+1}{2}<\frac{3x-1}{4}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(-1,3]\Rightarrow -1<x\leq 3\Rightarrow -1<\frac{4k+1}{3}\leq 3\Rightarrow k\in\{0,1,2\}$ ș.a.m.d.

d) Soluția 1

Fie $\left[\frac{3x+4}{5}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{4x+3}{5}=k\Rightarrow x=\frac{5k-3}{4}$ (1). Utilizând inegalitatea $[E]\leq E<[E]+1\Rightarrow\left[\frac{3x+4}{5}\right]\leq\frac{3x+4}{5}<\left[\frac{3x+4}{5}\right]+1$

$k\leq\frac{3x+4}{5}<k+1\Rightarrow 5x\leq 3x+4<5k+5\Rightarrow\frac{5k-4}{3}\leq x<\frac{5k+1}{3}.$

Folosind (1) avem $\frac{5k-4}{3}\leq\frac{5k-3}{4}<\frac{5k+1}{3}\Rightarrow\begin{cases}-5k+7\geq 0\\5k+13>0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\left(-\frac{13}{5},\frac{7}{5}\right]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{-2,-1,0,1\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{13}{4},-2,-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}.$

Soluția 2

$\left[\frac{3x+4}{5}\right]\leq\frac{3x+4}{5}<\left[\frac{3x+4}{5}\right]+1\Rightarrow\frac{4x+3}{5}\leq\frac{3x+4}{5}<\frac{4x+3}{5}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x\leq 1\\x+4>0\end{cases}\Rightarrow x\in(-4,1]$, dar $\left[\frac{3x+4}{5}\right]=k=\frac{4x+3}{5}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{5k-3}{4}$

$\Rightarrow -4<\frac{5k-3}{4}\leq 1\Rightarrow -16<5k-3\leq 4\Rightarrow -13<5k\leq 7\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{13}{5}<k\leq\frac{7}{5}$ și $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{-2,-1,0,1\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{13}{4},-2,-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}.$

Gheorghe Schneider

Scanned with OKEN Scanner

e) $\left[\frac{6x+5}{8}\right]=k=\frac{15x-7}{5}\Rightarrow x=\frac{5k+7}{15}\Rightarrow \frac{6x+5}{8}-1<k\leq$

$\leq\frac{6x+5}{8}\Rightarrow\frac{\frac{30k+42}{15}+5}{8}-1<k\leq\frac{\frac{30k+42}{15}+5}{8}\Rightarrow\frac{30k+117}{120}-1<$

$<k\leq\frac{30k+117}{120}\Leftrightarrow 30k-3<120k\leq 30k+117\Rightarrow k\{0,1\}\Rightarrow x_1=\frac{7}{15},$

$x_2=\frac{4}{5}.$

9. a) Din identitatea lui Hermite, rezultă:

$[2x]=4\Rightarrow 4\leq 2x<8\Rightarrow x\in\left[2,\frac{5}{2}\right).$

b) Ecuația se mai scrie:

$\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=101\Leftrightarrow\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x-2}{6}+\frac{1}{2}\right]=101$

și în membrul stâng se aplică identitatea lui Hermite pentru $a=\frac{4x-2}{6}$

și ecuația devine: $\left[2\cdot\frac{4x-2}{6}\right]=101\Leftrightarrow\left[\frac{4x-2}{3}\right]=101\Rightarrow x\in\left[76\frac{1}{4},77\right).$

c) Dacă notăm $\frac{3x-1}{6}=t\Rightarrow\left[t-\frac{1}{2}\right]-[-t]=\frac{12t+1}{5}$ (*).

Cazul I: $t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=-3\Rightarrow x=-\frac{17}{3}.$

Cazul II: $t\notin\mathbb{Z}\Rightarrow[t]+[-t]=-1\Rightarrow[-t]=-1-[t]$ și (*) devine

$\left[t-\frac{1}{2}\right]+[t]=\frac{12t+1}{5}-1$ (utilizând identitatea lui Hermite) rezultă că

membrul stâng devine $\left[t-\frac{1}{2}\right]+[t]=[2t-1]\Rightarrow$

$[2t-1]=\frac{12t-4}{5}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=\left[\frac{5k-2}{6}\right]\Rightarrow$

$k\in\{-7,-6,-5,-4,-3,-2\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left\{-\frac{29}{6},-4,-\frac{19}{6},-\frac{14}{6},\frac{3}{2},-\frac{2}{3},-\frac{17}{3}\right\}.$

Concurs „Victor Vâlcovici", 2015

d) Se aplică identitatea lui Hermite și

$0=\left[\frac{3x-1}{4}\right]+\left[\frac{3x-1}{4}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{3x-1}{2}\right]\Rightarrow\left[\frac{3x-1}{2}\right]=0\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},1\right).$

e) Ecuația devine $\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{2x-1}{3}-\left[\frac{2x-1}{3}\right]+x\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\left[\frac{4x+1}{6}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{5x-1}{3}\Leftrightarrow\left[\frac{4x+1}{6}\right]+\left[\frac{4x-2}{6}\right]=\frac{5x-1}{3}$

și aplicând identitatea lui Hermite rezultă

$\left[\frac{4x+1}{6}\right]+\left[\frac{4x-2}{6}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{4x-2}{6}\right]=\left[\frac{4x-2}{3}\right]=\frac{5x-1}{3}=k\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3k+1}{5}\Rightarrow k\in\{-6,-6,-4,-3,-2\}\Rightarrow$

$x\in\left\{-\frac{17}{5},-\frac{14}{5},-\frac{11}{5},-\frac{8}{5},-1\right\}.$

O.L. Vaslui, 2016

f) Avem $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{4x+1}{6}-\left[\frac{4x+1}{6}\right]+x\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{10x+1}{6}\Rightarrow\left[\frac{4x-2}{6}\right]+\left[\frac{4x-2}{6}+\frac{1}{2}\right]=\frac{10x+1}{6}.$

Aplicând identitatea lui Hermite, rezultă

$\left[\frac{4x-2}{3}\right]=\frac{10x+1}{6}=k\Rightarrow x=\frac{6k-1}{10}\Rightarrow\left[\frac{4k-4}{5}\right]=k$

$k\in\{-8,-7,-6,-5,-4\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{49}{10},-\frac{43}{10},-\frac{37}{10},-\frac{31}{10},-\frac{25}{10}\right\}.$

G.M.(S) nr. 12/2011

g) Utilizând identitatea lui Hermite, avem:

$x-[x]-2x+[2x]=x\Rightarrow[2x]-[x]=2x\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=2x=k\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{k}{2}\Rightarrow\left[\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow k\in\{0,1\}\Rightarrow x\in\left\{0,\frac{1}{2}\right\}.$

h) Evident $x\in\mathbb{Z}$ deci ecuația devine

$[x]=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right]$ și se aplică identitatea lui Hermite pentru $a=\frac{x}{2}$.

Prin urmare, orice număr întreg este soluție a ecuației, adică $x\in\mathbb{Z}$.

10. a) Avem $\frac{x}{5}-\left[\frac{x}{5}\right]-\left(\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]\right)=0\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{5}\right]=\frac{3x}{10}=k\Rightarrow x_k=\frac{10k}{3}$,

unde $k\in\mathbb{Z}$ și care verifică ecuația.

b) $x-\{x\}+3\{x\}=xn\Rightarrow 2\{x\}=1\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{2}\Rightarrow x_k=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}.$

c) Utilizând identitatea lui Hermite rezultă

$x-[x]=\left([x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]-[2x]\right)-\left([x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]+[3x]+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x-[x]=\frac{1}{2}\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{2}\Rightarrow x_k=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Scanned with OKEN Scanner

d) Avem $\frac{x-1}{2}-\left[\frac{x-1}{2}\right]=\frac{x+1}{3}-\left[\frac{x+1}{3}\right]\Rightarrow\left[\frac{x-1}{2}\right]-\left[\frac{x+1}{3}\right]=$

$=\frac{x-5}{6}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_k=6k+5, k\in\mathbb{Z}$; care verifică ecuația.

Gabriel Strețcu, G.M.(S) nr. 4/2016

e) Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$. Ecuația devine

$2k=k+t\Rightarrow k=2t\in\mathbb{Z}\Rightarrow t=\frac{k}{2}\in[0,1)\Rightarrow k\in\{0,1\}$.

Pentru $k=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow x_k=\frac{3}{2}\Rightarrow x\in\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$.

Titu Andreescu, R.M.T., 1982

11. a) $x\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{5}{9}\right\}$;

b) $x=-3k-\frac{1}{2}$;

c) $x\in\emptyset$;

d) $x\in\mathbb{R}$;

e) $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

(vezi proprietatea la Capitolul I);

$\{x\}+\{-x\}=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$;

f) $x=0$;

g) $x=0$;

h) $x\in\mathbb{N}$.

12. a) $x\in\left\{0,-\frac{1}{11}\right\}$;

b) $x=n+\frac{2}{n-1}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 4$;

c) $x\in\left\{0,-\frac{1}{2}\right\}$;

d) $x=\frac{5}{2}$;

e) $x\in\left\{\pm\frac{6}{5},\pm\frac{2}{5},2\right\}$;

f) $x\in\left\{1,\frac{8}{3}\right\}$;

g) $x=6$;

h) $x\in\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\frac{4}{3}\right\}$;

Scanned with OKEN Scanner

i) $x \in \{-1,5\}$;

j) $x \in \left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$

$x \in \left\{0, -\frac{1}{4}\right\}$;

k) $x \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$;

l) $x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

13. Ambele ecuații au aceeași familie de soluții $x_n = n + \alpha, n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0,1)$.

14. a) Din relația dată rezultă $x \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$|k - 2012| + k + 2012 = 4024$

$|k - 2012| = 2012 - k \Rightarrow k - 2012 \leq 0 \Rightarrow k \leq 2012, k \in \mathbb{Z}$.

b) Din ecuație rezultă $x \in \mathbb{Z}$. Fie $x = k \in \mathbb{Z}$.

$[k + n] + |k - n| = 2n, k \geq n \Rightarrow k + n + k - n = 2n \Rightarrow k = 4$

$k \leq n, \quad k + n - k + n = 2n \Rightarrow k \leq n, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Dan Negulescu

c) Rezultă $[x] = \frac{x^2 + x}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1 < \frac{x^2 + x}{3} \leq 3 \Rightarrow x \in [0,2] \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] = \{0,1,2\}$ deci $\frac{x^2 + x}{3} \in \{0,1,2\} \Rightarrow x \in \left\{0,2, \frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right\}$.

d) Evident $\{x + n\} = \{x\} \Rightarrow 3\{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$x = m + \frac{1}{6}$, unde $m \in \mathbb{Z}$.

e) Evident $x \in \mathbb{Z}$. Dacă $x = 2m$, atunci ecuația devine

$$\left[\frac{\left[3m - \frac{1}{2} + 2\right]}{3}\right] = 2m - 1 \Rightarrow \left[\frac{3m - \frac{1}{2} + 2}{3}\right] = 2m - 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = 2m - 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x = 2$.

Dacă $x = 2m + 1$ rezultă la fel $m = 1, x = 3$

(s-a utilizat proprietatea $[x + a] = [x] + a, (\forall)\, x \in \mathbb{R}$ și $(\forall)\, a \in \mathbb{Z}$).

15. Notăm $\frac{\sqrt{2}}{x} = k \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{k} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{k}\right] = k \Rightarrow k \leq \frac{\sqrt{2}}{k} < k + 1 \Rightarrow$

$k^2 \leq \sqrt{2} < k^2 + k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

16. a) Evident $x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$. Notăm $\frac{x+1}{2}=k\in\mathbb{N}, x=2k-1$,
cu $k\in\mathbb{N}\Rightarrow\left[\sqrt{k+3}\right]=k\Rightarrow\sqrt{k+3}-1<k\leq\sqrt{k+3}\Rightarrow k=2\Rightarrow x=3$.

b) Rezultă $x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1$ și $\frac{x-1}{3}=k\in\mathbb{N}\Rightarrow x=k+1$
și ecuația devine $\left[\sqrt{k+1}\right]=k\Rightarrow k=1\Rightarrow x=4$.

17. Evident $x\in\mathbb{Z}$ și fie $x=k\Rightarrow$
$k=\left[\frac{k}{k-1}\right](k-1)\Rightarrow k-1|k\Rightarrow k=2\Rightarrow x=2$.

Gabriel Necula, G.M.(S) nr. 12/2012

18. Ecuația se mai scrie:
$\left[\frac{x}{2}+994\right]+\left[\frac{x}{3}+663\right]=\frac{x}{4}+1990\Rightarrow\left[\frac{x}{2}\right]+994+\left[\frac{x}{3}\right]+663=\frac{x}{4}+1990$,
$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]=\frac{x}{4}+333\Rightarrow\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=4k, k\in\mathbb{Z}$.
Înlocuind, ultima ecuație devine:
$2k+k+\left[\frac{k}{3}\right]=k+333\Rightarrow\left[\frac{k}{3}\right]=333-k\Rightarrow\frac{k}{3}-1<333-2k\leq\frac{k}{3}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k<\frac{1002}{7}\Rightarrow k\leq 143$ și $k\geq\frac{999}{7}\Rightarrow k\geq 142\Rightarrow k\in\{142,143\}\Rightarrow$
$x\in\{568,572\}$.

19. Rezultă $\frac{3x+5}{7}=k\Rightarrow x=\frac{7k-5}{3}$ și ecuația devine:
$\left[\frac{7k-2}{9}\right]=k+\left[\frac{13-14n}{18}\right], k\in\mathbb{Z}\ (1)$
$\Rightarrow\frac{7k-2}{9}-1<\left[\frac{7k-2}{9}\right]=k+\left[\frac{13-14k}{18}\right]\leq k+\frac{13-14k}{18}\Rightarrow$
$\Rightarrow 10k\leq 35\Rightarrow k\leq 3$ și $\frac{7k-2}{9}>k+\frac{13-14k}{18}-1\Rightarrow 10k>1\Rightarrow$
$\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}\Rightarrow k\in\{1,2\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{2}{3},3\right\}$.

O.L. Olt, 2008

20. a) Din $\frac{2x+1}{3}=k\Rightarrow x=\frac{3k-1}{2}$. Ecuația devine
$\left[2k-1+\frac{k-1}{4}\right]-\left[k-1+\frac{k+3}{8}\right]=k\Rightarrow\left[\frac{k-1}{4}\right]=\left[\frac{k+3}{8}\right]\Rightarrow$
$\Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\Rightarrow x\in\left\{1,4,7,10,\frac{5}{2},\frac{11}{2},\frac{17}{2},\frac{23}{2}\right\}$.

b) $x\in\left\{-\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{7}{5},\frac{10}{5}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

21*. a) Avem

$$\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{2x-1}{3}+1\right]+\left[\frac{2x-1}{3}+2\right]=\frac{x+1}{3}\Rightarrow 3\left[\frac{2x-1}{3}\right]=$$

$$=\frac{x+1}{3}-3=\frac{x-8}{3}=k\Rightarrow\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{x-8}{9}=k\Rightarrow x=9k+8$$

$$\Rightarrow\left[\frac{18k+15}{3}\right]=k\Rightarrow[6k+5]=k\Rightarrow k=-1\Rightarrow x=-9+8=-1.$$

b) Rezultă că $\frac{x-1}{2}\in\mathbb{Z}$ deci $\frac{x-1}{2}=k\Rightarrow x=2k+1$. Avem

$$\left[\frac{2k+2}{3}\right]+\left[\frac{2k+3}{3}\right]=2k+1\ (*)$$

$$\frac{2k+2}{3}+\frac{2k+3}{3}-2<2k+1\leq\frac{2k+2}{3}+\frac{2k+3}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4k-1}{3}<2k+1\leq\frac{4k+5}{3}\Rightarrow -2<k\leq 1\Rightarrow k\in\{-1,1,0\}$$

de unde rezultă că numai $k\in\{-1,0\}$ verifică $(*)$ deci $x\in\{-1,1\}$.

22*. Ecuația devine

$$\left[-\left[\frac{x-2}{3}\right]\right]=\frac{1-3x}{5}\Rightarrow\left[\frac{x-2}{3}\right]=\frac{3x-1}{5}=k\in\mathbb{Z}, x=\frac{5k+1}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

și ecuația devine

$$\left[\frac{3k-5}{9}\right]=k\Rightarrow k\leq\frac{6k-5}{9}\leq k+1\Rightarrow k\in\{-2,-3\}\Rightarrow x\in\left\{-3,-\frac{14}{3}\right\}.$$

O.L. Constanța, 2015

23.

a) $x\in\{5,8\}$;

b) $x\in\{1,3,5\}$;

c) $x\in\{5,8\}$;

d) $x\in\{1,3,5\}$;

e) $x\in\{10,13,16,19\}$;

f) $x\in\left\{\frac{4}{5},\frac{7}{15}\right\}$;

g) $x\in\{-13,-10,-7,-4,-1\}$;

h) $x=1$;

i) $x\in\left\{\frac{51}{3},\frac{56}{3},\frac{61}{3},\frac{66}{3},\frac{71}{3},\frac{76}{3},\frac{81}{3},\frac{86}{3},\frac{91}{3}\right\}$;

j) $x\in\left\{\frac{4}{3},\frac{9}{3},\frac{14}{3},\frac{19}{3},\frac{24}{3},\frac{29}{3}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

24*. Notăm $\frac{ax+b}{c}=k\Rightarrow x_k=\frac{kc-b}{a}$. Considerăm cazul $ap-nc>0$.

$$\left[\frac{n\frac{nc-b}{a}+m}{p}\right]=k\Leftrightarrow\left[\frac{nkc-nb+am}{ap}\right]=k, k\le\frac{nkc+am-nb}{ap}<k+1$$

$$kap\le nkc+am-nb<akp+ap, k\le\frac{am-nb}{ap-nc};$$

$$k(ap-nc)>am-nb-ap\Rightarrow k<\frac{am-nb-ap}{ap-nc}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\in\left[\frac{am-nb}{ap-nc},\frac{am-nb-ap}{ap-nc}\right)=I.$$

Ecuația are atâtea soluții câte numere întregi se află în intervalul I și pentru soluțiile x_k avem

$x_{k+1}-x_k=\frac{c}{a}$ constant (vezi exercițiile propuse).

25. Ecuația se mai scrie

$$\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left\{\frac{x+1}{2}\right\}=\left[\frac{x+3}{2}\right]+\left\{\frac{x+3}{2}\right\}\Rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{x+3}{2},\text{ absurd.}$$

Așadar, ecuația nu are soluții.

26*. Evident $x\in\mathbb{Z}$.

Dacă $x=2n$, atunci

$|2n-6|=n-1+n-1+n-2+n-2\Rightarrow n=2\Rightarrow x=4.$

Dacă $x=2n+1\Rightarrow|2n-5|=n+n-1+n-1+n-2$, care nu are soluție.

O.L. Timiș, 2012

27*. a) Notăm $x-\frac{1}{x}=k\Rightarrow x^2-2kx-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$.

Pentru $x=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\Rightarrow\left[k+\sqrt{k^2+4}\right]=k\Rightarrow k\in\emptyset.$

Pentru $x=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\Rightarrow\left[k-\sqrt{k^2+4}\right]=k\Rightarrow k+\left[-\sqrt{k^2+4}\right]=k\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\emptyset.$

Ecuația nu are soluție.

b) Notăm $[x]=k,\{x\}=t\Rightarrow kt-k-t+1=0$

$(k-1)(t-1)=0\Rightarrow[x]=1\Rightarrow x\in[1,2).$

Aurel Dobrescu, G.M. nr. 2/2004

c) Avem $x\sqrt{2}-\left[x\sqrt{2}\right]=x\sqrt{3}-\left[x\sqrt{3}\right]=1$

Scanned with OKEN Scanner

$x = \dfrac{[x\sqrt{3}] - [x\sqrt{2}]}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = k(\sqrt{3} + \sqrt{2}), k \in \mathbb{Z}$ care verifică o ecuație, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

$x_k = k(\sqrt{3} + \sqrt{2}), k \in \mathbb{Z}$.

28.** a) Evident $[x] \neq 0 \Leftrightarrow x \notin [0,1)$ și $[x]|3 \Rightarrow [x] \in \{\pm 1, \pm 3\}$.

Dacă $k = [x] = 1 \Rightarrow x = 1 + t, t \in [0,1) \Rightarrow \left[\dfrac{8}{t+1}\right] = 3$, nu are soluție.

Dacă $k = [x] = -1 \Rightarrow x = -1 + t \Rightarrow \left[\dfrac{8}{t+1}\right] = -3$, nu are soluție.

În mod analog, dacă $[x] = \pm 3$. Așadar, ecuația nu are soluții.

b) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:

$10t = 2k + 2t \Rightarrow k = 4t \Rightarrow t = \dfrac{4}{k} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow x_1 = 0,$

$x_2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}, x_3 = 2 + \dfrac{2}{4} = \dfrac{10}{4}, x_4 = 3 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{4} \Rightarrow x \in \left\{0, \dfrac{5}{4}, \dfrac{10}{4}, \dfrac{15}{4}\right\}$.

O.L. Dolj, 2008

c) Din diferența a două părți fracționare rezultă că $x \in (-1,1)$. Din ecuație rezultă: $-\{2x\} = x - \{x\} = [x] \Rightarrow \{2x\} = -[x] \in [0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] \in (-1,0] \Rightarrow [x] = 0, \{2x\} = 0,$

din care rezultă $x \in [0,1)$ și $x = \dfrac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Costel Chiteș, O.L. București, 2004

d) Notăm $[x] = k, \{x\} = t \in [0,1)$, rezultă $k \in \mathbb{N}$. Ecuația devine

$19k = 96t, t = \dfrac{19k}{96} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ deci

$t \in \left\{0, \dfrac{19}{96}, \dfrac{39}{96}, \dfrac{57}{96}, \dfrac{76}{96}, \dfrac{95}{96}\right\} \Rightarrow x \in \left\{0,1 \cdot \dfrac{19}{96}, 2 \cdot \dfrac{39}{96}, 3 \cdot \dfrac{57}{96}, 4 \cdot \dfrac{76}{96}, 5 \cdot \dfrac{95}{96}\right\}$.

D. Kuznețov, O.N. Rusia, 1996

29.** Evident $x \notin [0,1)$. Pentru $x \geq 1 \Rightarrow [x] + \dfrac{2}{x} > [x] \geq 1 \geq \dfrac{1}{[x]}$

deci nu sunt soluții pe $[1, \infty)$.

Pentru $x < 0 \Rightarrow [x] \leq -1$ și $[x] + \dfrac{2}{x} < [x] \leq -1 \leq \dfrac{1}{[x]} \Rightarrow$ nici pe $(-\infty, 0)$ nu sunt soluții. Așadar, ecuația nu are soluții.

Gh. Ghiță, „Speranțe Râmnicene", 2009

30.** $x^2 = [x] + |x-2| \leq x + |x-2|$. Dacă $x \geq 2 \Rightarrow x^2 \leq 2x - 2$, fals. Așadar $x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 2, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Dar din $[x] = x^2 + x - 2$ $(*) \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 < x^2 + x - 2 \leq x, x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup [1, \sqrt{2})$. Notăm $x = k + t$, $k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ atunci $(*)$ devine $t^2 + t(2k+1) + k^2 - 2 = 0 \Rightarrow k \geq -2$ și

Scanned with OKEN Scanner

din $t_{1,2}=\dfrac{-(2k+1)+\sqrt{4k+9}}{2}\in[0,1)\Rightarrow k^2\le 2\Rightarrow k\in\{0,\pm1\}$

rezultă numai

$k=1$ deci $t=\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}\Rightarrow x=k+t=1+\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Gh. Szöllösy, G.M. nr. 10/2011

31.** a) Evident, deoarece $x^2+1\ge 1\Rightarrow\left[\dfrac{x}{2}\right]\ge 1\Rightarrow x\ge 2$.

Prin urmare, nu există soluții $x\le 0$ și nici $x\in(0,2)$.

Fie $x\in[2k,2k+2), k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\dfrac{x}{2}\right]=k$ și $x^2+1\ge 4k^2>4, \forall\, k\in\mathbb{N}^*$,

așadar ecuația nu are soluții.

b) Analog se găsește soluția $y=0$.

32*. Avem:

$$\left[\frac{x}{2}\right]=\left[x-\frac{1}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}k\le\dfrac{x}{2}<k+1\\ k\le x-\dfrac{1}{2}<k+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\le x<2k+2\\ k+\dfrac{1}{2}\le x<k+\dfrac{3}{2}\end{cases}\qquad(1)$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}2k<k+\dfrac{3}{2}\\ k+\dfrac{1}{2}<2k+2\end{matrix}\Rightarrow -\frac{3}{2}<k<\frac{3}{2}\Rightarrow k\in\{\pm1,0\}.$$

Pentru $k=-1$, din (1) rezultă $\begin{matrix}-2\le x<0\\ -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2}\end{matrix}\Rightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)=S_1$.

Pentru $k=0$, din (1) rezultă $\begin{matrix}0\le x<2\\ \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}\end{matrix}\Rightarrow x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)=S_2$.

Pentru $k=1$, din (1) rezultă $\begin{matrix}2\le x<4\\ \dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{5}{2}\end{matrix}\Rightarrow x\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)=S_3$.

Rezultă $x\in S_1\cup S_2\cup S_3=\left[-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

§ 2. Ecuații elementare (standard-mediu)

33. Cu notația $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$, ecuația se mai scrie

$7k+5t=\dfrac{78}{7}\Rightarrow t=\dfrac{78-49k}{35}\in[0,1)\Rightarrow k=1\Rightarrow t=\dfrac{29}{35}\Rightarrow x=\dfrac{64}{35}$.

34. $\left[\dfrac{10x+1}{5}\right]+\left[\dfrac{10x+1+5}{5}\right]=3\left[\dfrac{10x+1-10}{5}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\dfrac{10x+1}{5}\right]+\left[\dfrac{10x+1}{5}\right]+1=3\left[\dfrac{10x+1}{5}\right]-6\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \left[\frac{10x+1}{5}\right] = 7 \Rightarrow 7 \leq \frac{10x+1}{5} < 8 \Rightarrow 34 \leq 10x < 39 \Rightarrow x \in \left[\frac{34}{10}, \frac{39}{10}\right)$.

35. Evident $|x| - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x| = n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \pm n$.

Dacă $x = n$, atunci ecuația devine $\left[\frac{n+1}{2}\right] = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2} - 1 < n - 1 \leq \frac{n+1}{2} \Rightarrow n \in \{2,3\} \Rightarrow x \in \{2,3\}$.

Dacă $x = -n$, atunci ecuația devine $\left[\frac{-n+1}{2}\right] = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-n+1}{2} - 1 < n - 1 \leq \frac{-n+1}{2} \Rightarrow n = 1 \Rightarrow x = -1$.

Așadar, $x = -1, x = 2, x = 3$.

G.M. nr. 7-8/1992

36.** Avem $\{x^2 - 1\} = \{x^2\} \Rightarrow [x] - 1 = \{x^2\} \Rightarrow 0 \leq [x] - 1 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \{x^2\} = 0 \Rightarrow x \in \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.

37*. Avem $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

a) Ecuația devine

$2t - k = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{4k+1}{8} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{0,1\}$.

Pentru $k = 0, t = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$ și pentru $k = 1, t = \frac{5}{8} \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$,

$x \in \left\{\frac{1}{8}, \frac{13}{8}\right\}$.

b) Ecuația devine

$\{x\} - [x] = \frac{3}{4} \Rightarrow 4t - 4k = 3 \Rightarrow t = \frac{4k+3}{4} \in [0,1) \Rightarrow$

$k = 0, t = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$.

c) Ecuația devine

$3k + 2t = \frac{20(k+t) - 42}{5} \Rightarrow t = \frac{42 - 5k}{10} \Rightarrow k = 8 \Rightarrow t = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{41}{5}$.

38. Ecuația devine

$(x-2)[x] = x - [x] - 1 \Rightarrow (x-1)([x] - 1) = 0 \Rightarrow x \in [1,2)$.

Concursul „Dan Barbilian", 2011

39*. Rezultă $x \in \mathbb{Z}$. Dacă $x = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 4$.

Dacă $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 5$. Deci, $x \in \{4,5\}$.

O.L. Republica Moldova, 1996

40. Avem $2[x] + 4 + 3\{x\} = 1996 \Rightarrow 2([x] + \{x\}) + \{x\} = 1992 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + \{x\} = 1992$.

Scanned with OKEN Scanner

Cu notația $x = k + t \Rightarrow 2k + 3t = 1992 \Rightarrow 3t \in \mathbb{N} \Rightarrow t \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Pentru $t = 0 \Rightarrow k = 996 \Rightarrow x = 996$.

Pentru $t = \frac{1}{3} \Rightarrow 2k + 1 = 1992$, fals.

Pentru $t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2k + 2 = 1992 \Rightarrow 2k = 1990 \Rightarrow k = 995 \Rightarrow x = 995 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{996, 995 \cdot \frac{2}{3}\right\}$.

41. Avem $[x + 2014] + [x - 2015] = [x + 2016] - 3 = [x + 2013] = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \leq x + 2013 < k + 1$ și $k + 1 \leq x + 2014 < k + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x + 2014] = k + 1 \Rightarrow [x + 2015] = -1 \Rightarrow x = 2014$.

N. Ivaschescu, G.M.(S) nr. 5/2016

42. Fie $[x] = k, \{x\} = t \in [0,1)$ și ecuația devine

$k = \frac{(k + t)^2 - 1}{2(k + t)} \Rightarrow k^2 = t^2 - 1$ cu $k^2 \geq 0$ și $t^2 - 1 < 0$.

Prin urmare, ecuația nu are soluții.

43.** Rezultă $\left\{\frac{2x - 1}{3}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\frac{2x - 1}{3}\right\} = 0 \Rightarrow$

$\frac{2x - 1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{3k + 1}{2}$

și cum $2x \in \mathbb{Z}, 2[x] = 2x \Rightarrow [x] = x \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, adică $x = \frac{3k + 1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

k impar, $k = 2p + 1 \Rightarrow x_p = 3p + 2, p \in \mathbb{Z}$.

44. Avem $\frac{3x - 4}{2} = k \Rightarrow x = \frac{2k + 4}{3}$ și ecuația devine

$\left[\frac{k - 1}{3}\right] + \left[\frac{k + 1}{4}\right] = k \Rightarrow \frac{k - 1}{3} - 1 < \left[\frac{k - 1}{3}\right] \leq \frac{k - 1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k + 1}{4} - 1 < \left[\frac{k + 1}{4}\right] \leq \frac{k + 1}{4} \Rightarrow 7k - 25 < 12k \leq 7k - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{-4, -3, -2, -1\} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right\}$.

45.** Avem $x = [x] + \{x\} = k + t \Rightarrow (k + t)^3 + 0{,}999 = 3k + (k + t) \Rightarrow$

$\Rightarrow k^3 + t^3 = -0{,}999 \Rightarrow [k^3 + t^3] = -1 \Rightarrow k^3 = -1, k = -1 \Rightarrow$

$t^3 = 0{,}001 \Rightarrow t = 0{,}1 \Rightarrow x = -0{,}9$.

Marian Cucuoaneș, R.M.T. nr. 3/2014

46.** Rezultă $\frac{1}{10 - [x]} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 10 - [x] = \pm 1$.

Dacă $10 - [x] = 1 \Rightarrow [x] = 9 \Rightarrow \left[\frac{1}{10 - x}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{10 - x} < 2 \Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < 10 - x \leq 1 \Rightarrow x \in \left[9, \frac{19}{2}\right)$.

Dacă $10 - [x] = -1 \Rightarrow [x] = 11 \Rightarrow \left[\frac{1}{10-x}\right] = -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{10-x} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x-10} \leq 1 \Rightarrow x \in [11,12)$. Prin urmare, $x \in \left[9, \frac{19}{2}\right) \cup [11,12)$.

O.L. Iași, 2014

47. Din $\frac{1}{1+[x]} \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] \in \{0, -2\}$.

Dacă $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$ și $\left[\frac{1}{1+x}\right] = 1 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \Rightarrow x = 0$.

Dacă $[x] = -2 \Leftrightarrow x \in [-2,-1)$ și $\left[\frac{1}{1+x}\right] = -1$.

În final se deduce $x = -2$. Prin urmare, $S = \{0, -2\}$.

48. Rezultă $\frac{1}{1-[x]} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 - [x] \in \{\pm 1\}$.

Dacă $1 - [x] = 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{1-x}\right] = 1 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Dacă $1 - [x] = -1 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{1-x}\right] = -1 \Rightarrow x \in [2,3)$.

În concluzie, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup [2,3)$.

O.L. Iași, 2012

49*. Avem $\{2002x\} = 2003 - [2001 + x] = 2 - [x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{2002x\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2002x \leq k \Rightarrow x = \frac{k}{2002}, k \in \mathbb{Z}$.

Înlocuind în ecuație rezultă:

$\left[2001 + \frac{k}{2002}\right] = 2003 \Rightarrow \left[\frac{k}{2002}\right] = 2 \Rightarrow 4004 \leq k < 6006 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{k}{2002}, k \in \{4004, 4005, \ldots, 6005\}$.

Nistor Budescu

50. Avem $x = \{x\} + [x] \neq 4\{x\} = 2[x] \Rightarrow [x] = 5\{x\}$ și cum $\{x\} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a < [x] < 5 \Rightarrow [x] \in \{0,1,2,3,4\}$.

Distingem situațiile:

a) $[x] = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$;

b) $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{6}{5}$;

c) $[x] = 2 \Rightarrow \{x\} = \frac{2}{5} \Rightarrow x_3 = \frac{12}{5}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $x_3 = \frac{18}{5}$ și $x_4 = \frac{21}{5}$.

Rezultă $x \in \left\{0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}, \frac{18}{5}, \frac{21}{5}\right\}$.

R.M.T., 2014

51. Notăm $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow [2(k+t)] = 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow [2t] = 0, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = k + t, t \in [0,1) \Rightarrow x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right), \forall\, k \in \mathbb{Z}.$

52*. Rezultă $\{x\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine

$\left[\frac{3+2x}{4}\right] = 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1,0\}.$

53. Evident $x = \pm 1$ sunt soluții.

Fie $x \in (0,1) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] > 1$, pentru $x \in (1,\infty) \Rightarrow [x] \geq 1$ și $\left[\frac{1}{x}\right] = 0$.

Analog, dacă $x < 0$. Pentru $x \in (-1,0) \Rightarrow [x] = -1$ și $\left[\frac{1}{x}\right] \leq -2$. Pentru

$x \leq -1 \Rightarrow [x] \leq -2$ și $\left[\frac{1}{x}\right] = -1$. Așadar, singurele soluții sunt $x = \pm 1$.

54. Rezultă că $x = k \in \mathbb{Z}$ și se consideră cazurile

$k \in \{6p, 6p+1, 6p+2, 6p+3, 6p+4, 6p+5\}$

de unde rezultă $x \in \{0,1,2-4,-3,-2,-7\}$.

55. Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Din egalitatea dată rezultă

$\left[t + \frac{3}{8}\right] = [2t]$.

Dacă $t \in \left[0, \frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left[t + \frac{7}{8}\right] = 0 \Rightarrow [2t] = 0 \Rightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Dacă $t \in \left[\frac{5}{8}, 1\right) \Rightarrow \left[t + \frac{3}{8}\right] = 1 \Rightarrow [2t] \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow t \in \left[\frac{5}{8}, 1\right)$.

Așadar, $\{x\} = t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right)$.

56*. Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Din ecuația a) rezultă

$k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = 0 \Rightarrow k \in \{2, -2, 3\}$ și din ecuația b) rezultă

$t \equiv \frac{1}{2} \Rightarrow x + k + t \in \left\{2 + \frac{1}{2}, -2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right\}$.

D. Săvulescu, G.M. nr. 4/1992

57*. Utilizând identitatea lui Hermite, obținem că membrul stâng este egal cu $[3x]$ și ecuația devine $[3x] = [2x+1] = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x \in [n, n+1)$ și

Scanned with OKEN Scanner

$2x+1 \in [n, n+1) \Rightarrow x \in \left[\frac{n}{3}, \frac{n+1}{3}\right) \cap \left[\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Ecuația are soluții numai dacă $n \in \{1,2,3,4\} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right)$.

58*. a) Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in [0,1)$, ecuația devine
$k + [2(k+t)] = 2 \Rightarrow 3k + [2t] = 2 \Rightarrow [2t] = 2 - 3k \Rightarrow k \leq 0$ deci
$[2t] < 2$ și $-3k \geq 2$. Prin urmare, ecuația nu are soluție.

b) $k + [3(k+t)] = 2 \Rightarrow 4k + [3k] = 2 \Rightarrow [3t] = 2 - 4k \geq 0, k \leq 0$.
Considerăm situațiile:

1) $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow [3t] = 0$, fals;

2) $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow [3t] = 1 = 2 - 4k$, fals;

3) $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow [3t] = 2 = 2 - 4k, k = 0 \Rightarrow x = t = x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$.

Gh. Andrei

c) $k + [n(k+t)] = 2 \Rightarrow [nt] = 2 - (x-1)k \geq 0 \Rightarrow k \leq 0$.

Dacă $k = 0 \quad [nt] = 2 \Rightarrow t \in \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right) \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right)$.

Dacă $k \leq -1 \Rightarrow 2 - (n+1)k > n$ și $[nt] < n$ deci nu avem soluții.

59*. Evident $x = 0$ este soluție.

Notăm $[x] = k, \{x\} = t \in [0,1)$ și ecuația devine

$$kt = k - t \Rightarrow t(k+1) = k \Rightarrow t_k = \frac{k}{k+1}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = k + t = k + \frac{k}{k+1}$$

$$x_k = \frac{k^2 + 2k}{k+1}, k \in \mathbb{N}.$$

Nistor Budescu, R.M.T. nr. 1/2010

60*. a) Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

$2k + [k + t + 3] - [2k + 5 + 2t] = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k + k + 3[t] - 2k - 5 - [2t] = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow k - 2 - [2t] = 4 \Rightarrow [2t] = k - 6 \quad (*)$.

Dacă $0 \leq 2t < 1 \Leftrightarrow 0 \leq t < \frac{1}{2}$ atunci din $(*) \Rightarrow k = 6 \Rightarrow$

$x = 6 + t \in \left[6, \frac{13}{2}\right)$.

Dacă $1 \leq 2t < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t < 1$ atunci din $(*) \Rightarrow k = 7 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$x = 7 + t \in \left[7, \frac{15}{2}\right) \Rightarrow x \in \left[6, \frac{13}{2}\right) \cup \left[7, \frac{15}{2}\right)$.

b) Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

Ecuația se mai scrie

$[k + 2 + t] = [2k + 2t + 1] \Rightarrow k + 2 + [t] = 2k + 1 + [2t] \Rightarrow [2t] = 1 - k$.

Dacă $2t \in [0,1) \Leftrightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = 1 + t \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$.

Dacă $2t \in [1,2) \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left[1, \frac{3}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Admitere A.S.E.

61*. Evident $x \neq 2 \Rightarrow \frac{x^2}{[x-2]} = [x]\left(\frac{x}{x-2}\right) \Rightarrow x = 0$ sau

$\frac{x}{[x-2]} = \frac{[x]}{x-2}$ (1).

Notăm $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, atunci (1) devine

$\frac{k+t}{[k+t-2]} = \frac{k}{k+t-2} \Leftrightarrow (k+t)^2 - 2(k+t) = k(k-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2kt + t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = k \in \mathbb{Z}$ și $t = 2 - 2k \in [0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 1$.

Prin urmare, soluțiile sunt $x = k \in \mathbb{Z} - \{2\}$.

Concurs „Radu Miron", 1996

62*. Evident, cum membrul drept este pozitiv rezultă că $x \geq 1$ și evident $x = 1$ nu verifică ecuația.

Fie $x > 1$ și $x = k + t, k \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1)$ și ecuația devine

$\frac{1}{k+t} + \frac{2}{k} = \frac{3}{t+2} \Rightarrow \frac{3k+2t}{k(k+t)} = \frac{3}{t+2}$, unde $k \geq 1$ deci

$2t^2 + 4t + 6k - 3k^2 = 0$ cu $4 \geq 0 \Leftrightarrow 6k^2 - 12k + 4 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*$ și $t_1 = \frac{-2 + \sqrt{6k^2 - 12k + 4}}{2} \in [0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 2$. Pentru $k \geq 2 \Rightarrow t \notin (0,1)$.

Așadar, singura soluție este $x = 2$.

63*. Evident $x \notin \mathbb{Z}$. Notăm $x = k + t, k \in \mathbb{N}^*, t \in [0,1)$ și obținem $kt = 0$ și cum $t \neq 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = t \in (0,1)$.

Dorin Mărghidan, Cardinal 2002-2003

64**. Rezultă că $x\{x\} = p \in \mathbb{Z}$ (1). Considerăm cazurile:

a) $p = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$;

b) $p < -1 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow k \leq -1$, atunci fie $x = [x] + \{x\} = k + t$,

Scanned with OKEN Scanner

$k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația (1) devine

$$t^2 + kt - p = 0 \Rightarrow t = \frac{-k \pm \sqrt{k^2+4p}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-k+\sqrt{k^2+4p}}{2} \in (0,1) \Rightarrow k^2 + 4p \geq 0$$

$$0 < \frac{-k+\sqrt{k^2+4p}}{2} < 1 \Rightarrow \sqrt{k^2+4p} < k+2 \Rightarrow k+2 > 0$$

$$\Rightarrow k \geq -1 \Rightarrow k = -1, 0 < \frac{1+\sqrt{1+4p}}{2} < 1, \text{fals (deoarece } 1+4p < 0).$$

c) Fie $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x > 0 \Rightarrow k \geq 0$. Atunci

$$t = \frac{-k+\sqrt{k^2+4p}}{2} \in (0,1) \Rightarrow p \leq k \Rightarrow x_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4p}}{2}$$

cu $k \in \{p, p+1, \ldots\}$.

65*. Fie $\left[x+\frac{1}{2}\right] = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[x+\frac{1}{3}\right] = 1-n$ deci $x \in \left[n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right) \cap$

$\cap \left[\frac{2}{3}-n, \frac{5}{3}-n\right)$ care este vidă dacă $n = 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

66. Rezultă că $\frac{3x+5}{7} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{7k-5}{3}$ și ecuația devine

$$\left[\frac{7k-2}{9}\right] = k + \left[\frac{13-14k}{18}\right], k \in \mathbb{Z}.$$

Avem $\frac{7k-2}{9} - 1 < \left[\frac{7k-2}{9}\right] = k + \left[\frac{13-14k}{18}\right] \leq k + \frac{13-14k}{18}$ (1)

și $\frac{7k-2}{9} \geq \left[\frac{7k-2}{9}\right] = k + \left[\frac{13-14k}{18}\right] > k + \frac{13-14k}{18} - 1$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $k \in \{0,1,2,3\}$; verifică numai $k \in \{1,23\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 3, x_3 = \frac{16}{3}$.

67**. a) $\begin{matrix}\left[\frac{x+2}{3}\right] \leq \frac{x+2}{3} < \left[\frac{x+2}{3}\right]+1 \\ \left[\frac{x+3}{4}\right] \leq \frac{x+3}{4} < \left[\frac{x+3}{4}\right]+1\end{matrix} \Rightarrow 4 < \frac{7x+17}{12} < 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{31}{7}, \frac{55}{7}\right) \Rightarrow x \in \{5,6\}$ care verifică ecuația.

b) Notăm $\left[\frac{x+3}{4}\right] = k \Rightarrow k \leq \frac{x+3}{4} < k+1 \Rightarrow x \in [4k-3, 4k+1)$

și $\left[\frac{x+2}{3}\right] = 4-k \Rightarrow 4-k \leq \frac{x+2}{3} < 5-k \Rightarrow x \in [10-3k, 13-3k) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [4k-3, 4k+1) \cap [10-3k, 13-3k)$ (*).

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, apar situațiile:

1) $10-3k \le 4k-3 \le 13-3k \le 4k+1$;
2) $10-3k < 4k-3 < 4k+1 < 13-3k$;
3) $4k-3 < 10-3k < 13-3k < 4k+1$;
4) $4k-3 < 10-3k < 4k+1 < 13-3k$.

Din 1) rezultă $7k \ge 13, 7k \le 16, 7k \ge 12 \Rightarrow 13 \le 7k \le 16 \Rightarrow k = 2$ și din $(*)$ rezultă $x \in [5,9) \cap [4,7) \Rightarrow x \in [5,7)$.

Din 2), 3) și 4) nu rezultă nicio soluție, prin urmare $x \in [5,7)$.

68. Evident $x \in \mathbb{Z}$. Considerăm funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x + \left[\frac{x}{6}\right] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right]$ care este periodică cu perioada $T = 6$.

Se verifică dacă $f(x+6) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{Z}$.

Se verifică dacă $x \in \{0,2,3,4,5\}$ sunt soluții, deci $x \in \{6k\} \cup \{6k+2\} \cup \cup \{6k+3\} \cup \{6k+4\} \cup \{6k+5\}, k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $x \in \mathbb{Z} - \{6k+1\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

69.** Evident membrul stâng este număr întreg, deci $\{x\} - 1$ întreg, rezultă $\{x\} \in [0,1) \Rightarrow \{x\} = 0$, deci x este întreg și ecuația devine $x^3 + x^2 + x = -1(x^2+1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$.

Olimpiadă Ucraina, 1989

70. a) Se impune ca $2\sqrt{x^2-x} \in \mathbb{Z}$ și $x (\in -\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Evident $x \le 0$ și x întreg nu verifică.

$x = 1$ este singura soluție, deoarece pentru $x \ge 2, k \in \mathbb{N}$, $x^2 - x = k^2 \Leftrightarrow x(x-1) = k^2, k \in \mathbb{Z}$; numai $x = 1$ verifică.

b) Evident $x \in [0,1]$. Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ nu există soluții și

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \left[\frac{2x+2}{3}\right] = 1, \left[\frac{2x-1}{3}\right] = 0, \left[\frac{2x-4}{3}\right] = -2,$$

deci membrul stâng este egal cu -1, iar cel drept este pozitiv. Ecuația are o singură soluție: $x = 1$.

„Trepte în matematică", 2005, Florian Pană

71.** Evident $x \notin \mathbb{Z} \cup [0,1)$ deci $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

a) Ecuația devine $\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = k + t \Rightarrow (k+t)(k+t-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow kt = 1 \Rightarrow k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow t = \frac{1}{k} \Rightarrow x_k = k + \frac{1}{k}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

b) Avem $\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = k \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{k^2-1}{k} > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow t = \frac{k}{k^2-1}$

$$x_k = k + \frac{k}{k^2-1} = \frac{k^3}{k^2-1}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Avem $\frac{1}{k}+\frac{1}{t}=t \Rightarrow \frac{1}{k}=t-\frac{1}{t}<0 \Rightarrow k \leq -1 \Rightarrow kt^2-t-k=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2k} \Rightarrow k$ nu poate fi pozitiv.

Atunci $t=\frac{1-\sqrt{1+4k^2}}{2k}$ pentru $k \leq -1 \Rightarrow x_k=k+\frac{1-\sqrt{1+4k^2}}{2k}$, $k \in \mathbb{Z}-\mathbb{N}$.

d) Notăm $x=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Evident $\frac{1}{1-\{x\}} \geq 1$.

Avem $\left[\frac{1}{1-t}\right]=\frac{k+t}{3t}=p \in \mathbb{N}^*$ (1) $\Rightarrow t=\frac{k}{3p-1}<1$ (2) $\Rightarrow k<3p-1$,

$k \in \{1,2,\ldots,3p-2\}$. Din (1) $\Rightarrow p \leq \frac{1}{1-t}<p+1 \Rightarrow 1-\frac{1}{p}<1-\frac{1}{p+1}$ (3).

Utilizând (2) în (3) $\Rightarrow 3p-3 \leq k<3p-4+\frac{4}{p+1} \Rightarrow \frac{4}{p+1}>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \in \{1,2\}$. Numai $p=2$ verifică $\Rightarrow k=3$ și $t=\frac{3}{5} \Rightarrow x=3+\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$.

O.L. Botoșani, 2017

72.** a) Evident $x \notin \mathbb{Z}, x \notin [0,1)$. Notăm $x=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in (0,1) \Rightarrow$

$\frac{1}{k+t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{t} \Rightarrow t^2+kt-k^2=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-k \pm \sqrt{5k^2}}{2} \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k=1 \Rightarrow t=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Analog, rezultă $t^2-kt-k^2=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{k \pm \sqrt{5k^2}}{2} \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k=-1$ și $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in (0,1) \Rightarrow x=-1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

c) Avem $\frac{1}{k}+\frac{1}{t}=\frac{1}{k+t} \Rightarrow t^2+kt+k^2=0$ care nu are soluție $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \emptyset$.

73.** Evident $x \neq 0$.

a) Observăm că $x \in (1,\infty) \cup (0,1)$ nu pot fi soluții întrucât un membru este 0 și celălalt este strict pozitiv.

Dacă $x \in (-\infty-1)$ sau $x \in (-1,0)$ un membru este strict mai mic decât -1 și altul, egal cu -1. Așadar, singurele soluții sunt $x \in \{\pm 1\}$.

b) Evident $x \in \{\pm 1\}$ sunt soluții.

Scanned with OKEN Scanner

74. Evident $x \notin \mathbb{Z}$, și nici x nu poate fi negativ, deci $x > 0, x \notin \mathbb{N}$. Dacă notăm $x = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$, ecuația devine
$k(t^2 + kt - 1) = 0$ și cum $k \neq 0 \Rightarrow t^2 + kt - 1 = 0$

$$t = \frac{-k + \sqrt{k^2+4}}{2} \Rightarrow x_k = k + t = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}, k \in \mathbb{N}^*.$$

Costică Negoiță

§ 3. Ecuații în care apar expresii raționale (A)

75. Evident $\frac{x+4}{2x-1} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k+4}{2k-1} \Rightarrow \left[\frac{4k+7}{5k+2}\right] = k \Rightarrow k \in \{\pm 1\}$
$\Rightarrow x \in \{-1,5\}$.

76. Evident $x \neq -1$.

Ecuația se mai scrie $\left[\frac{x-2}{x+1}\right] = \frac{x-2}{3} = k \geq 0 \Rightarrow x = 3k + 2, k \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{3k}{k+1}\right] = \left[\frac{k}{k+1}\right] = k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 2.$

Dacă $x < 2 \Rightarrow \left[\frac{x-2}{x+1}\right] = \frac{2-x}{3} = k = 0 \Rightarrow x = 2 - 3k, k > 2$

$\left[\frac{-3k}{3(1-k)}\right] = k \Rightarrow \left[\frac{k}{k-1}\right] = k, k \geq 2 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = -4.$

Rezultă $x \in \{2, -4\}$.

77. Notăm $\frac{3x+1}{x+3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1-3k}{k-3} \Rightarrow k \in \{0, \pm 1\} x \in \left\{1, -1, -\frac{1}{3}\right\}$.

Liviu Pârsan, G.M. nr. 11/2001

78. a) $x \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}\right\}$;

b) $x = 0$;

c) $x \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}\right\}$.

79.** a) Ecuația se mai scrie $\left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{2}{x+1} - 2\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{-2x}{x+1}\right] = 0$, dar $[a] + [-a] = \begin{cases} 0, & a \in \mathbb{Z} \\ -1, & a \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \frac{2x}{x+1} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k = -\frac{k}{k-2}, \forall\, k \in \mathbb{Z} - \{2\}$ (*).

b) $\left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{2}{x+1} - 2\right] = -1 \Rightarrow \left[\frac{2x}{x+1}\right] + \left[\frac{-2x}{x+1}\right] = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x}{x+1} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq -\frac{k}{k-2} = -1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{-k}{k-2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}-\{2\}}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezultă $\left[\frac{2x}{x+1}\right]+\left[\frac{-2x}{x+1}\right]=1$,

în baza lui $(*)$ rezultă egalitate imposibilă deci $x \in \emptyset$.

M. Bogdan

80. Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+x+3}$ și $g(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Se deduce că $\text{Im}f=\left[\frac{-9}{11},1\right]$ și $\text{Im}g=\left[-\frac{1}{3},1\right] \Rightarrow [f] \in \{-1,0,1\}$ și $[g] \in \{-1,0,1\}$.

Considerăm cazurile:

a) $[f]=[g]=1$ care nu se poate realiza;

b) $[f]=[g]=0 \Rightarrow 0 \leq \frac{3x+2}{x^2+x+3}<1$ și $0 \leq \frac{x+1}{x^2+x+1}<1 \Rightarrow$ $x \in \left[-\frac{2}{3},\infty\right)-\{1\}$ și $x \in (-1,\infty)-\{0\} \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3},\infty\right)-\{0,1\}=S_1$;

c) $[f]=[g]=-1$ de unde se deduce că și $x \in (-\infty,-1)=S_2$. Prin urmare, $x \in S_1 \cup S_2=(-\infty,-1) \cup \left[-\frac{2}{3},0\right) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

Gh. Andrei

81. Ecuația devine: $\left[\frac{2x(x^2+1)+2(x^2+2)+m-2}{x^2+1}\right]=x+3 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$2x+2+\left[\frac{m-2}{x^2+1}\right]=x+3 \Rightarrow \left[\frac{m-2}{x^2+1}\right]=1-x.$

Dacă notăm $x=k \in \mathbb{Z}$ $\left[\frac{m-2}{k^2+1}\right]=1-k$ $(*)$.

Pentru $m \in \{0,\pm 1\} \Rightarrow x=k=2$. Pentru $m=2 \Rightarrow x=k=1$.

Pentru $m=3$ $\left[\frac{1}{k^2+1}\right]=1-k \Rightarrow x=k \in \{0,1\}$.

Pentru $m \geq 4$ $0<\frac{m-2}{k^2+1}<1 \Rightarrow$

$\left[\frac{m-2}{k^2+1}\right]=0$ și ecuația nu are soluție.

Pentru $m=-1$ $\left[\frac{-3}{k^2+1}\right]=1-k \Rightarrow x=k=2.$

Pentru $m=-2$ $\left[\frac{-4}{k^2+1}\right]=1-k \Rightarrow x=k=2.$

Pentru $m=-3$ $\left[\frac{-5}{k^2+1}\right]=1-k \Rightarrow x=k=2.$

Pentru $\begin{matrix} m \leq -4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{matrix}$ ecuația $(*)$ nu are soluții.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

82. Ecuația devine

$$\left\{1+\frac{5x+4}{x^2+2}\right\}=-\frac{2}{3}\Rightarrow\left\{\frac{5x+4}{x^2+2}\right\}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left[\frac{5x+4}{x^2+2}\right]=\frac{5x+4}{x^2+2}-\frac{2}{3}.$$

Notând cu $y=\frac{5x+4}{x^2+2}\Rightarrow[y]=y-\frac{2}{3}=k\Rightarrow y=k+\frac{2}{3}$.

Dar cum $\operatorname{Im}\left(\frac{5x+4}{x^2+2}\right)=\left[\frac{4-\sqrt{66}}{4},\frac{4+\sqrt{66}}{4}\right]\Rightarrow$

$$\frac{4-\sqrt{66}}{4}\le k+\frac{2}{3}\le\frac{4+\sqrt{66}}{4}\Rightarrow k\in\{-1,0,1,2\}$$

$\Rightarrow y\in\left\{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right\}\subset\operatorname{Im}\left(\frac{5x+4}{x^2+2}\right)$ de unde rezultă 8 soluții.

83. Evident $x\in\mathbb{Z}$ și cum $\frac{3x^2}{x^2+x+1}>0\Rightarrow x\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x\le\frac{3x^2}{x^2+x+1}<x+1\Rightarrow x\in[0,1]-\mathbb{N}\Rightarrow x\in\{0,1\}.$$

Concursul „Cristian Calude", 2000

84. Evident $x>0$ și $\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\ge 2, 0<\frac{x}{x^2+1}<\frac{1}{2}$.

Ecuația devine $\left[\frac{x^2+1}{x}\right]=3\Rightarrow 3\le\frac{x^2+1}{x}<4\Rightarrow$

$$x\in\left(2-\sqrt{3},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2},2+\sqrt{3}\right).$$

Singura soluție întreagă este $x=3$.

M. Bogdan, G.M. nr. 3/2016

85*. Evident $\frac{2x^2}{x^2+1}\ge 0, x\in\mathbb{N}\Rightarrow\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]\in\mathbb{N}$, dar $\frac{2x^2}{x^2+1}\le x$ și

$\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]\le\frac{2x^2}{x^2+1}\Rightarrow x\le\frac{2x^2}{x^2+1}\Rightarrow x=\frac{2x^2}{x^2+1}$ de unde rezultă $x_1=0$, $x_2=1$.

Ernest Freund, G.M. nr. 10/1990

86. $\left[2+\frac{2x}{1+x^2}\right]=2+\left[\frac{2x}{1+x^2}\right]=5x-4$

$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\le 1$ egalitate doar pentru $x=\pm 1$ care nu verifică ecuația, deci

pentru $x\ne\pm 1\Rightarrow\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|<1$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x \in [0,\infty) - \{1\} \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} \in (0,1)$ deci $\left[\frac{2x}{1+x^2}\right] = 0$ și ecuația se mai scrie $2 = 5x - 4 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ care verifică ecuația dată.

Dacă $x \in (-\infty, 0) - 1$, atunci $\frac{2x}{1+x^2} \in (-1,0)$ și $\left[\frac{2x}{1+x^2}\right] = -1$; ecuația devine

$2 - 1 = 5x - 4 \Rightarrow x = 1$ care nu aparține intervalului $(-\infty, 0)$.

87. Ecuația se mai scrie

$$\left[\frac{4(x^2+6x+10)-2}{x^2+6x+10}\right] = \left[\frac{2(x^2+3)+1}{x^2+3}\right],$$

$$4 + \left[\frac{-2}{(x+3)^2+1}\right] = 2 + \left[\frac{1}{x^2+3}\right] = 2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-2}{(x+3)^2+1}\right] = -2 \Rightarrow 1 < \frac{2}{(x+3)^2+1} \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x+3| < 1 \Leftrightarrow x \in (-4,-2).$$

88*.** Calculând mulțimea valorilor funcției

$f(x) = \frac{2x}{x^2-x+1} \Rightarrow f(x) \in \left[-\frac{2}{3}, 2\right], \forall x \in \mathbb{R}$ deci

$\frac{2x}{2-x} \in \{-2,-1,0,1,2\}$ de unde rezultă

$x \in \left\{-2, 0, \frac{2}{3}, 1\right\}$ care verifică ecuația.

Concursul „Traian Lalescu", 2009

89. Evident $x \in \mathbb{Z}$ și ecuația se mai scrie:

$$\left[\frac{2x(x^2+1)+2(x^2+1)-1}{x^2+1}\right] = x+3 \Rightarrow \left[2x+2-\frac{1}{x^2+1}\right] = x+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2+\left[-\frac{1}{x^2+1}\right] = x+3 \Rightarrow 2x+1 = x+3 \Rightarrow x = 2.$$

G.M. nr. 8/1988

90.** a) Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{2x+13}{x+3} - \left[\frac{2x+13}{x+3}\right] = \frac{3x+2}{x+3} - \left[\frac{3x+2}{x+3}\right] \Rightarrow \left[\frac{3x+2}{x+3}\right] - \left[\frac{2x+13}{x+3}\right] =$$

$$= \frac{3x+2}{x+3} - \frac{2x+13}{x+3} = \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{14}{x+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{14}{x+3} = k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$$

$x_k = \frac{14}{k} - 3, k \in \mathbb{Z}^*$, unde $x_k \in \mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

Aceste valori verifică ecuația. Într-adevăr avem:

$\left[\frac{3(x+3)-7}{x+3}\right]-\left[\frac{2(x+3)+7}{x+3}\right]=3+\left[-\frac{7}{x+3}\right]-2-\left[\frac{7}{x+3}\right]=1-k$

$\left[\frac{7}{x+3}\right]-\left[-\frac{7}{x+3}\right]=k$, dar $\frac{7}{x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{k+3}=\frac{k}{2}$

$\left[\frac{k}{2}\right]-\left[-\frac{k}{2}\right]=k$ care verifică pentru $\forall\, k\in\mathbb{Z}^*$.

91. Ecuația se mai scrie

$\left[\frac{x^3+1}{2x+3}\right]=\frac{x^3+1}{2x+3}+\frac{2x^2+2x}{2x+3}\Leftrightarrow-\frac{2x^2+2x}{2x+3}=\frac{x^3+1}{2x+3}-\left[\frac{x^3+1}{2x+3}\right]=$

$=\left\{\frac{x^3+1}{2x+3}\right\}\in[0,1)\Rightarrow-1<\frac{2x^2+2x}{2x+3}\leq 0.$

Dacă $2x+3>0\Rightarrow-2x-3<2x^2+2x\leq 0\Rightarrow 2x^2+4x+3>0$ și $2x^2+2x\leq 0\Rightarrow x\in[0,1)\cap\mathbb{Z}=\{-1,0\}$. Dar numai $x=-1$ verifică ecuația.

Dacă $2x+3<0\Rightarrow-(2x+3)>2x^2+2x\geq 0\Rightarrow x\in\emptyset$. Așadar, $S=\{-1\}$.

Vasile Popa, R.G. nr. 26

92. Fie $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^2+1}$ și $g(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$ unde $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se deduce că

$\text{Im}f=\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2},\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$ și $\text{Im}g=\left(-\infty,-3-2\sqrt{2}\right]\cup\left[-3+2\sqrt{2},\infty\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Im}f\cap\text{Im}g=\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2},\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]\Rightarrow\left[\frac{x^2-x}{x+1}\right]\in\{1,2\}.$

Se consideră situațiile:

a) $\left[\frac{x^2-x}{x+1}\right]=\left[\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right]=1\Rightarrow x\in\left[1+\sqrt{2},\infty\right)=S_1$;

b) $\left[\frac{x^2-x}{x+1}\right]=\left[\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right]=2$

$\left[\frac{x^2+x+2}{x^2+1}\right]=2\Rightarrow x\in[0,1]$. În final rezultă $x\in S_2=\emptyset$.

Rezultă $x\in\left(1+\sqrt{2},\infty\right)$.

G.M. nr. 7/1998

Scanned with OKEN Scanner

93. a) Notând $\frac{3x+2}{x^2+2}=y \Rightarrow \frac{2x^2+3x+6}{x^2+2}=\frac{3x+2}{x^2+2}+2=y+2$ şi $\frac{-4x^2-4+6x}{x^2+2}=\frac{2(3x+2)}{x^2+2}-4=2y-4$ ecuaţia devine

$[y]\{y+2\}=2y-4 \Leftrightarrow [y]\{y\}=2[y]+2\{y\}-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow ([y]-2)(\{y\}-2)=0 \Rightarrow [y]=2 \Rightarrow y \in [2,3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \leq \frac{3x+2}{x^2+2}<3 \Rightarrow 2x^2-3x+2<0$ şi $3x^2-3x-14>0 \Rightarrow x \in \emptyset$.

b) Din $(2x+1)^2=n \Rightarrow 2x+1=\pm\sqrt{n}$.

Considerăm cazurile $2x+1=\sqrt{n}$, atunci (1) devine:

$\left[\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-4)}{3}\right]=n \Rightarrow n \leq \frac{n-4\sqrt{n}}{3}<n+1 \Rightarrow 2n+4\sqrt{n} \leq 0$, fals.

Fie cazul $2x+1=-\sqrt{n}$ (2), atunci (1) devine

$\left[\frac{n+4\sqrt{n}}{3}\right]=n \Rightarrow n \leq \frac{n+4\sqrt{n}}{3}<n+1 \Rightarrow \sqrt{n} \leq 2 \Rightarrow n \in \{1,2,3,4\}$.

Utilizând (2) $\Rightarrow x \in \left\{-1, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$ cu soluţia $x=-\frac{1}{2}$,

rezultă $x \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Simion Sorin

94. Cu notaţia $x^2-x+2=y$ membrul stâng devine:

$\left[\frac{(y-1)(y+1)}{y^2}\right]=\left[1-\frac{1}{y^2}\right]=0$, unde $y \geq \frac{7}{4}$.

Se impune ca şi membrul drept să fie zero, adică $0 \leq \frac{x^2+2x+m^2}{2x^2+x+2}<1$.

Pentru $m \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ inegalitatea din stânga este adevărată şi pentru inegalitatea din dreapta se impune ca $2x^2+x+2>x^2+2x+$ $+m^2 \Leftrightarrow x^2-x+2-m^2>0, \forall x \in \mathbb{R}$ şi pentru $\Delta=4m^2-7<0 \Rightarrow m \in$ $\in \{-1,1\}$. Prin urmare, pentru $m \in \{-1,1\}$ are loc egalitatea, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Gh. Andrei

95. Fie $f(x)=\frac{2x}{x^2-x+1}$.

Se calculează $\text{Im}f=\left[-\frac{2}{3},2\right]$, deci $[f(x)] \in \{-1,0,1,2\}$. Considerăm cazurile:

a) $\left[\frac{2x}{2-x}\right] = -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{2x}{2-x} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{2-x} > 0 \\ \frac{x+2}{2-x} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ x \in [-2,2) \end{cases} \Rightarrow x \in [-2,0) = S_1;$$

b) $\left[\frac{2x}{2-x}\right] = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{2x}{2-x} < 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-2} \leq 0 \\ \frac{3x-2}{x-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0,2) \\ x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{2}{3}\right) = S_2;$$

c) $\left[\frac{2x}{2-x}\right] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{2x}{2-x} < 2 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) = S_3;$

d) $\left[\frac{2x}{2-x}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{2x}{2-x} < 3 \Rightarrow x \in \left[1, \frac{6}{5}\right) = S_4.$

Rezultă $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left[-2, \frac{6}{5}\right)$.

C. Caragea, Etapa locală Constanța, 1995

§ 4. Ecuații în care apar expresii raționale (B)

96. a) Evident $x \neq 0 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{x}\right] = \left[\frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right]$.

Pentru $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{x}\right] \geq 2$ și $\left[\frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right] = 0$

și prin urmare nu sunt soluții pentru $x > 0$.

Pentru $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{x}\right] \leq 2$ și $\left[\frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right] = -1.$

Prin urmare, ecuația nu are soluție.

b) Evident x nu poate fi negativ. Fie $x > 0$, atunci cum

$$0 < \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{x^2+1}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{x^2+1}{x}\right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{x^2+1}{x} < 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(2 - \sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{3}\right) = S.$$

O.L. Timiș, 2017, G.M.S. nr. 3/2016

Scanned with OKEN Scanner

97. Ecuația se mai scrie

$$\left[\frac{x^2+1+x+1}{x^2+1}\right]=\left[\frac{x^2+1-(x+1)}{x+1}\right]\Rightarrow 1+\left[\frac{x+1}{x^2+1}\right]=-1+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right].$$

Notând $\frac{x+1}{x^2+1}=z$ rezultă ecuația: $1+[z]=-1+\left[\frac{1}{z}\right]$.

Dacă $g(x)=\frac{x+1}{x^2+1}\Rightarrow \text{Im}g(x)=\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]\Rightarrow [g(x)]=1$ deci

$[z]=1\Rightarrow\left[\frac{1}{z}\right]=3$ ecuație imposibilă, deci ecuația nu are soluție.

98*. Membrul drept devine $\left[\frac{2(x^2+3)+1}{x^2+3}\right]=\left[2+\frac{1}{x^2+3}\right]=2$, iar cel

stâng devine $\left[4-\frac{2}{(x+3)^2+1}\right]=3$. Prin urmare, ecuația nu are soluție.

99**. Considerăm două cazuri. Fie $x\geq 0\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+1}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow\left[\frac{x^2}{3x-2}\right]=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=0\Rightarrow 0\leq\frac{x^2}{3x-2}<0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3x-2>0$ sau $x^2=0\Leftrightarrow x\in\left(\frac{2}{3},\infty\right)\cup\{0\}$ și din $\frac{x^2}{3x-2}<1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+2}{3x-2}<0 x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(1,2)$. Prin urmare, $x\in(1,2)\cup\{0\}=S_1$.

Fie $x<0\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}\in\left[-\frac{1}{2},0\right]\Rightarrow\left[\frac{x^2}{3x-2}\right]=\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=-1\Rightarrow$

$$\Rightarrow -1\leq\frac{x^2}{3x-2}<0 \text{ de unde rezultă } x\in\left[-\frac{\sqrt{17}+3}{2},\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right]\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$$

și cum $x<0\Rightarrow x\in\left[-\frac{\sqrt{17}+3}{2},0\right)$.

Așadar, rezultă $x\in\left[-\frac{\sqrt{17}+3}{2},0\right]\cup(1,2)$.

Romeo Zamfir, G.M. nr. 9-10/2001

100. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+x+1}$ care are mulțimea valorilor, adică $\text{Im}f=\left[-\frac{2}{3},2\right]$ deci $[f(x)]\in\{0,\pm1,2\}$. Se analizează pe rând situațiile:

a) $\left[\frac{2x}{2-x}\right]=-1\Rightarrow x\in[-2,0)=S_1$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\left[\frac{2x}{2-x}\right]=1\Rightarrow x\in\emptyset=S_2$;

c) $\left[\frac{2x}{2-x}\right]=0\Rightarrow x\in\left[0,\frac{2}{3}\right)=S_3$;

d) $\left[\frac{2x}{2-x}\right]=2\Rightarrow x\in\mathbb{Q}=S_4$.

Rezultă $x\in S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\left[-2,\frac{2}{3}\right)$.

Constantin Caragea, O.L. Constanța, 1995

101. Fie funcția $f(x)=\frac{2x}{x^2+x+1}$ și se găsește că $\text{Im}f=\left[-\frac{2}{3},2\right]$ deci $[f(x)]\in\{0,\pm1,2\}$.

Dacă $[f(x)]=-2\Rightarrow -2\leq\frac{2x}{x+2}<-1\Rightarrow x\in\left[-1,-\frac{2}{3}\right]=S_1$.

Dacă $[f(x)]=-1\Rightarrow\begin{cases}-1\leq\frac{2x}{x+2}<0\\-1\leq\frac{-2x}{x^2+x+1}<0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\frac{2}{3},0\right)=S_2$.

Dacă $[f(x)]=0\Rightarrow\begin{cases}0\leq\frac{2x}{x+2}<1\\0\leq\frac{2x}{x^2+x+1}<1\end{cases}\Rightarrow x\in[0,2)=S_3$.

Rezultă $x\in[-1,2)$.

102*.** Pentru $x>0\Rightarrow\frac{48x}{x^2+9}\leq 8$, egalitate pentru $x=3$; altfel, dacă $\frac{48x}{x^2+8}<8\Rightarrow\left[\frac{48x}{x^2+8}\right]\leq 7$, dar $x+\frac{16}{x}\geq 8$ cu egalitate pentru $x=4\Rightarrow$ $\Rightarrow\left[x+\frac{16}{x}\right]\geq 8$. Prin urmare, egalitatea se produce pentru $x=3$.

Fie $x<0\Rightarrow x+\frac{16}{x}\geq -8$ cu egalitate doar pentru $x=-4$ și pentru $x\in(-\infty,0)-\{-4\}\Rightarrow\left[x+\frac{16}{x}\right]\leq -9$. Dar cum $\frac{48x}{x^2+9}\geq -8,\forall\, x<0$ cu egalitate doar pentru $x=-3$; prin urmare, soluția este $x=-4\Rightarrow$ $\Rightarrow S=\{3,-4\}$.

Romeo Zamfir, (L.S.) O.N., 2003

Scanned with OKEN Scanner

103.** Evident $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} > 0\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, iar

$\frac{2x^2+x-1}{x^2-x-2} \geq 0$ pentru orice $x \in (-\infty,-1) \cup \left(-1,\frac{1}{2}\right) \cup (2,\infty)$.

Notăm cu $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow (1-y)x^2-(y+1)x+1-y=0 \Rightarrow$

$y \in \left[\frac{1}{3},3\right] \Rightarrow \left[\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right] \in \{0,1,2,3\}$. Dacă $\left[\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right]=0$ avem și

$\left[\frac{2x^2+x-1}{x^2-x-2}\right]=0 \Rightarrow \left[\frac{2x-1}{x-2}\right]=0 \Rightarrow x \in \left(0,\frac{1}{2}\right]$ ș. a. m. d.

Mihai Onucu Drîmbe, Marian Ursărescu, etapa jud. Neamț, 1995

104*. a) Rezultă $\left[\frac{3x+2}{x+1}\right]=2$ (1) și $\left\{\frac{3x+5}{x+2}\right\}=0,(7)$ (2).

Cu substituția $x \to x+1$ (1) devine $\left[\frac{3x+5}{x+2}\right]=2$ (3).

Din (2) rezultă $0,(7)=\left\{\frac{3x+5}{x+2}\right\}=\frac{3x+5}{x+2}-2=\frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \frac{x+1}{x+2}=\frac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$.

Nicolae Stanciu, G.M. nr. 10/2008

b) Rezultă $\left\{\frac{3x+2}{x+1}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\frac{3x+2}{x+1}\right\}=0 \Rightarrow \frac{3x+2}{x+1}=k \Rightarrow x_k=\frac{1-k}{k}$,

$k \in \mathbb{Z}^*$, dar cum $\left[\frac{3x+5}{x+2}\right]=2 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{3x+5}{x+2} < 3$ unde se înlocuiește

$x \to x_k \Rightarrow 0 < \frac{1}{k+1} < 1 \Rightarrow k \in \mathbb{N}^*$.

Așadar, soluțiile sunt $x_k=\frac{1-k}{k}, k \in \mathbb{N}^*$.

c) Avem $\left\{\frac{x+3}{x+4}\right\}=0,9$ și $\left[\frac{3x+8}{x+3}\right]=2$.

Din $\left[\frac{3x+8}{x+3}\right]=2 \Rightarrow x \geq -2$ de unde rezultă că $0 < \frac{x+3}{x+4} < 1$ deci

$\left\{\frac{x+3}{x+4}\right\}=\frac{x+3}{x+4}=\frac{9}{10} \Rightarrow x=6$.

Concursul „Petru Simon", 2016

Scanned with OKEN Scanner

105**. Ecuația se mai scrie: $\left\{\frac{x-4}{x+5}+1\right\}+\left[\frac{2x+1}{x+5}\right]=a$

$\Rightarrow \left\{\frac{2x+1}{x+5}\right\}+\left[\frac{2x+1}{x+5}\right]=a \Rightarrow \frac{2x+1}{x+5}=a \Rightarrow x_a=\frac{2a-1}{2-a}, a\in\mathbb{R}-\{2\}.$

Gh. Molea, G.M. nr. 4/2004, Concursul „Dan Barbilian"

106*. Avem $x-2=(3[x]+2)\left[\frac{5x+2}{3x+2}\right] \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]=x=k\in\mathbb{Z}$ și relația devine

$\frac{x-2}{3x+2}=\left[\frac{5x+2}{3x+2}\right] \Rightarrow \frac{k-2}{3k+2}=\left[\frac{5k+2}{3k+2}\right] \Rightarrow k\in\{0,-1,\pm 2\}$, dar numai $k=-1$ verifică $\Rightarrow x=-1$.

107***. Se știe că dacă $\{x\}=\{y\} \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$; în cazul nostru, dacă $x=m\in\mathbb{Z}$ avem:

$\frac{m^2+2}{4}-\frac{m^2+m+1}{6}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{m^2-2m+4}{12}\in\mathbb{Z} \Rightarrow 12|(m-1)^2+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m-1)^2+3=12p \Rightarrow (m-1)^2=12q+9, q\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow m-1=M_{12}+3 \Rightarrow m=M_{12}+4$ sau $m-1=M_{12}+9 \Rightarrow$

$\Rightarrow m=M_{12}+10 \Rightarrow m\in\{12k+4\}\cup\{12k+10\}, k\in\mathbb{Z}.$

Dacă $m=12k+4$ sau $m=12k+10 \Rightarrow \left\{\frac{m^2+2}{4}\right\}=\left\{\frac{m^2+m+1}{6}\right\}=\frac{1}{2}.$

108**. Putem scrie $\left[\frac{2x-1}{3x+2}\right]=9-\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 2x-\frac{1}{3}=m\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3m+1}{6}$ și ecuația devine $\left[\frac{6m-4}{9m+15}\right]=9-m^2$ (*).

Dacă $\left[\frac{6m-4}{9m+15}\right]\neq 0 \Rightarrow \frac{6m-4}{9m+15}\geq 1$ sau $\frac{6m-4}{9m+15}<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m\in\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0\}$, dar verifică numai $m=-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3m+1}{6}=-\frac{5}{6}$. Așadar, $x\in S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{6}{5}\right\}$.

Olimpiadă Republica Moldova, 1998

109**. Cu notația $\frac{2x+1}{x^2+1}=y$, ecuația devine:

$[y]\{y+1\}=y-1 \Rightarrow [y]\{y\}=[y]+\{y\}-1 \Rightarrow ([y]-1)(\{y\}-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [y]=1 \Rightarrow y\in[1,2) \Rightarrow 1\leq\frac{2x+1}{x^2+1}<2 \Rightarrow x\in[0,2].$

Concursul „Academician Radu Miron", 2011

Scanned with OKEN Scanner

110***. Notăm $E(x)=\frac{(3x+1)^2}{x^2}+\frac{(x+3)^2}{2x+1}$.

Fie $x\geq 0$, soluție. Se remarcă faptul că funcția $f(x)=\frac{32x}{x^2+1}\leq 16$, deci $0<f(x)\leq 16$ și $\frac{(3x+1)^2}{x^2}+\frac{(x+3)^2}{2x+1}\geq 16$.

Într-adevăr, avem $\frac{x^4+24x^3+30x^2+8x+1}{x^2(2x+1)}\geq 16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x^4-8x^3+14x^2+8x+1}{x^2(2x+1)}\geq 0\Leftrightarrow(x^2-4x-1)^2\geq 0.$

Egalizarea cu 16 se produce pentru valori ale lui x diferite, $x=2+\sqrt{5}$ sau pentru $x=1$. Așadar, $\left[\frac{32x}{x^2+1}\right]<16, \forall\, x\neq 1$ și $E(x)\geq 16$ deci ecuația $[f(x)]=E(x)$ nu are soluții pozitive.

Romeo Zamfir, Concurs „Cristian Calude", 2002

111**. <u>Soluția 1</u>

Fie funcția $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se găsește $Imf=[0,4]$ și ecuația devine $2^{[3x-1]}\in\{0,1,2,34\}\Rightarrow \begin{matrix}2^{[3x-1]}=1, & 2^{[3x-1]}=4\\ 2^{[3x-1]}=2, & 2^{[3x-1]}=3\end{matrix}$

Ultima ecuație nu are rădăcină.

Avem: $[3x-1]=0\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$;

$[3x-1]=1\Rightarrow x\in\left[\frac{2}{3},1\right)$;

$[3x-1]=2\Rightarrow x\in\left[1,\frac{4}{3}\right)$.

Rezultă $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.

<u>Soluția 2</u>

Ecuația devine: $\left[1+\frac{3x}{x^2-x+1}\right]=1+\left[\frac{3x}{x^2-x+1}\right]$.

Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x}{x^2-x+1}$ și determinăm $\mathrm{Im}f$. Fie $y\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{3x}{x^2-x+1}=y\Leftrightarrow x^2y-x(y+3)+y=0$ și cu $\Delta_y\geq 0\Rightarrow y\in[-1,3]\Rightarrow[y]\in\{-1,0,1,2,3\}$.

Pentru $[y]=-1$ membrul drept devine 0 și ecuația nu are soluție.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $[y]=0 \Rightarrow 2^{[3x-1]}=1, 0 \leq 3x-1<1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = S_1$.

Pentru $[y]=1 \Rightarrow 2^{[3x-1]}=2$. Dar $y=1 \Rightarrow [3x-1]=1 \Leftrightarrow$
$1 \leq 3x-1<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1$ și $1 \leq \frac{3x}{x^2-x+1}<2 \Rightarrow$

$x \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}] \cap \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, -\infty) \Rightarrow$

$x \in \left[2-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup (2,2+\sqrt{3}] \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \emptyset$, cu $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) = S_2$.

Pentru $[y]=2 \Rightarrow 2^{[3x-1]}=3 \Rightarrow x \in \emptyset, 2 \leq \frac{3x}{x^2-x+1}<3$.

Pentru $[y]=3 \Rightarrow 2^{[3x-1]}=4 \Rightarrow [3x-1]=2 \Rightarrow x \in \left[1, \frac{4}{3}\right)$ și din

$3 \leq \frac{3x}{x^2-x+1}<4 \quad (*)$

și pentru $x \in \left[1, \frac{4}{3}\right)$ inegalitatea $(*)$ este satisfăcută, $S_3 = \left[1, \frac{4}{3}\right)$.

Rezultă $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

112**. Avem $\left[\frac{x^3+5}{x^2+3}\right] = 3 + \frac{1}{p}$.

Dacă $p \in \mathbb{Z}^* - \{\pm 1\}$, atunci ecuația nu are soluție.

Pentru $p=1 \Rightarrow \left[\frac{x^3+5}{x^2+3}\right] = 4 \Rightarrow 4 \leq \frac{x^3+5}{x^2+3}<5 \Rightarrow x^3-4x^2-7 \geq 0$,

$x^3-5x^2-10<0 \Rightarrow$ fiecare dintre ecuații are câte o singură soluție,

$x_1 \in (4,5)$ și $x_2 \in (5,6) \Rightarrow x \in (x_1, \infty)$ și $x \in (-\infty, 2) \Rightarrow x \in (x_1, x_2) = S_1$.

Pentru $p=-1 \Rightarrow \left[\frac{x^3+5}{x^2+3}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x^3+5}{x^2+3}<3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^3-2x^2-1 \geq 0 \\ x^3-3x^2-4<0 \end{cases}$ și fiecare are câte o soluție: $x_1' \in (2,3)$ și $x_2' \in (3,4)$

deci $x \in (x_1', x_2') = J$.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

§ 5. Ecuații (nivelul mediu-avansat)

113***. Pentru a) și b). În ambele cazuri:

$\left[\frac{x}{6}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{2}\right]=x$ și $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{8}\right]=\frac{7x}{8}$

ecuațiile se mai pot scrie:

$\frac{x}{6}-\left[\frac{x}{6}\right]+\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]+\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]=0\Leftrightarrow\left\{\frac{x}{6}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}+\left\{\frac{x}{2}\right\}=0,$

iar pentru b) avem:

$\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]+\frac{x}{4}-\left[\frac{x}{4}\right]+\frac{x}{8}-\left[\frac{x}{8}\right]=0\Leftrightarrow\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{4}\right\}+\left\{\frac{x}{8}\right\}=0,$

Pentru a) rezultă $\left\{\frac{x}{6}\right\}=\left\{\frac{x}{3}\right\}=\left\{\frac{x}{2}\right\}=0\Rightarrow x=6k, k\in\mathbb{Z}$, iar pentru

b) $x=8k, k\in\mathbb{Z}$.

c) Analog.

d) Rezultă că $\frac{x-8}{2}=a\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=2a+8\in\mathbb{Z}$. Introducând în ecuație, rezultă: $\left[\frac{2a}{5}\right]-\left[\frac{4a-1}{10}\right]-\left[\frac{6a-2}{15}\right]=a+2$ (1).

Numărul a poate fi de forma $5k, 5k\pm1, 5k\pm2, k\in\mathbb{Z}$. Considerând pe rând situațiile, rezultă că pentru $a\in\{5k+1, 5k+2, 5k+3\}$ ecuația (1) nu are soluție. Pentru $a=5k\Rightarrow k=0\Rightarrow x=8$ și pentru $a=5k+1\Rightarrow k=-1\Rightarrow a=-1\Rightarrow x=6$. Prin urmare, $x\in\{6,8\}$.

e) Evident, $6x\in\mathbb{Z}$; fie $6x=m\Rightarrow x=\frac{m}{6}, m\in\mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]=\left[\frac{m}{6}\right]+m, m\in\mathbb{Z}$ (*).

Fie $m=6p+r, r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Atunci ecuația (*) devine:

$3p+\left[\frac{r}{2}\right]+4p+\left[\frac{2r}{3}\right]=p+\left[\frac{r}{6}\right]+6p+r\Rightarrow\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{2r}{3}\right]=\left[\frac{r}{6}\right]+r$, unde $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Se observă că numai $r\in\{0,2,3,4,5\}$ verifică ultima ecuație și prin urmare $m\in\{6p, 6p+2, 6p+3, 6p+4, 6p+5\}$,

$x\in\left\{p, p+\frac{1}{3}, p+\frac{1}{2}, p+\frac{2}{3}, p+\frac{5}{6},\right\}, p\in\mathbb{Z}.$

f*) Notăm $\left[\frac{x}{2}\right]=n$ (1) $\Rightarrow\{4x\}=4\sqrt{5}-7-n$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\le 4\sqrt{5}-7-n<1\Rightarrow 7-4\sqrt{5}<-n<8-4\sqrt{5}\Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sqrt{5}-8<n\le 4\sqrt{5}-7\Rightarrow n=1$ și (2) devine

$\{4x\}=4\sqrt{5}-8=4(\sqrt{5}-2)\Rightarrow\{x\}=\sqrt{5}-2.$

Din $\left[\frac{x}{2}\right]=1\Rightarrow\frac{x}{2}-1<1\le\frac{x}{2}\Rightarrow x\in[2,4)\Rightarrow[x]\in\{2,3\}.$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $[x]=2$ și cum $\{x\}=\sqrt{5}-2 \Rightarrow x=\sqrt{5}$. Dacă $[x]=3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=3+\sqrt{5}-2=1+\sqrt{5} \Rightarrow x \in \{\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}$.

g*) Rezultă că $[5x^3]=1$ și $\{2x^2\}=3-\sqrt{5}$.

$$1 \leq 5x^3 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq x^3 < \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 2x^2 < 2\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 < 2x^2 < 2$. Dacă $[2x^2]=0 \Rightarrow 2x^2=3-\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x^3=\sqrt{5}-2$, iar condiția $1 \leq 5x^3 < 2$ este verificată.

Dacă $[2x^2]=1 \Rightarrow 2x^2=4-\sqrt{5}>1{,}7 \Rightarrow 5x^3>3{,}6$, contradicție cu $[5x^3]=1$.

Prin urmare, $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Concurs „Unirea", 2009

h*) Fie $\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}\right]=\left[\sqrt{\dfrac{x+2}{3}}\right]=k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$2k^2+1 \leq x < 2k^2+4k+3$ și $3k^2-2 \leq x < 3k^2+6k+1$.

Observăm că $2k^2+4k+3 < 3k^2+6k+1 \Leftrightarrow k^2+2k>2, \forall\, k \geq 1$.

Și apar situațiile:

$3k^2-2 < 2k^2+1 \leq x < 2k^2+4k+3 < 3k^2+6k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 \leq 3 \Rightarrow k=1 \Rightarrow x \in [3,9)$ sau

$2k^2+1 < 3k^2-2 \leq x < 2k^2+4k+3 < 3k^2+6k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2>3$ și $k^2-4k-5<0 \Rightarrow k \in \{2,3,4\}$.

Pentru $k=2 \Rightarrow x \in [10,19)$. Pentru $k=3 \Rightarrow x \in [25,33)$. Pentru $k=4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [46,51)$. Deci, $a \in [3,9) \cup [10,19) \cup [25,33) \cup [46,51)$.

114***. a) Rezultă ușor că $x \in \mathbb{Z}$ și dacă $x_0=k \in \mathbb{Z}$ este soluție, atunci și $k+6$ este soluție. Prin urmare, din cauza periodicității rezultă $x=k+6m$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}, \forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Putem considera funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=x+\left[\dfrac{x}{6}\right]-\left[\dfrac{x}{2}\right]-\left[\dfrac{2x}{3}\right]$

și se deduce ușor că $f(x+6)=f(x) \Rightarrow T=6$ este perioada funcției.

Cum $x_0 \in \{0,1,2,3,4,5\}=A$ sunt soluții, adică $f(x_0)=0$, atunci $x_m=x_0+6m, \forall\, m \in \mathbb{Z}$ și $x_0 \in A$.

Olimpiadă Anglia, 2001

b) Căutăm x de forma $x=12y+z$, cu $y \in \mathbb{Z}$ și $z \in \{0,1,2,\ldots,11\}$ (1).

Ecuația devine:

$$6y+4y+3y+\left[\frac{z}{2}\right]+\left[\frac{z}{3}\right]+\left[\frac{z}{4}\right]=12y+z \Rightarrow y=z-\left[\frac{z}{2}\right]-\left[\frac{z}{3}\right]-\left[\frac{z}{4}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Dând succesiv valorile lui z din (1) rezultă
$x \in \{0,13,14,15,4,17,6,19,8,9,10,23\}$.

Olimpiadă Canada, 2005

c) Rezultă $3x \in \mathbb{Z}$. Fie $3x = k \Rightarrow x = \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$\left[\frac{k-3}{6}\right] + \left[\frac{k-3}{9}\right] + \left[\frac{k-3}{12}\right] = k - 3 = m \in \mathbb{Z}, \left[\frac{m}{6}\right] + \left[\frac{m}{9}\right] + \left[\frac{m}{12}\right] = m$ (1).
Impunând condițiile cunoscute rezultă $m \in \{-4,-,3,-2,-1,0\}$, dar numai $m \in \{0,-3\}$ verifică (1) $\Rightarrow k \in \{0,3\} \Rightarrow x \in \{0,1\}$.

Aurel Doboșan, G.M. nr. 10/1993

d) Rezultă $x \in \mathbb{Z}$ și fie $x = 30p + r, r \in \{0,1,\ldots,29\}$.

$\left[15p + \frac{r}{2}\right] + \left[10p + \frac{r}{3}\right] + \left[6p + \frac{r}{5}\right] = 30p + r$

$31p + \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{5}\right] = 30p + r \Rightarrow \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{5}\right] = r - p \geq 0 \Rightarrow r \geq p \Rightarrow$
$\Rightarrow r \in \{p, p+1, \ldots, 29\}$.

Fie $r = p \Rightarrow \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{p}{3}\right] + \left[\frac{p}{5}\right] = 0 \Rightarrow p \in \{0,1\} \Rightarrow x \in \{0,31\}$.

Fie $r = p + 1 \Rightarrow \left[\frac{p+1}{2}\right] + \left[\frac{p+1}{3}\right] + \left[\frac{p+1}{5}\right] = 1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 30 + 2 = 32$.

Fie $r = p + 2 \Rightarrow \left[\frac{p+2}{2}\right] + \left[\frac{p+2}{3}\right] + \left[\frac{p+2}{5}\right] = 2 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 30 + 3 = 33$.

Fie $r = p + 3 \Rightarrow \left[\frac{p+3}{2}\right] + \left[\frac{p+3}{3}\right] + \left[\frac{p+3}{5}\right] = 3 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 30 + 4 = 34$.

Fie $r = p + 4 \Rightarrow \left[\frac{p+4}{2}\right] + \left[\frac{p+4}{3}\right] + \left[\frac{p+4}{5}\right] = 4 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow$ unde
$x = 30p + r, r \in \{4,5\} \Rightarrow x \in \{4,35\} \Rightarrow x = 35$ verifică.

Pentru $r = p + 5 \Rightarrow \left[\frac{p+5}{2}\right] + \left[\frac{p+5}{3}\right] + \left[\frac{p+5}{5}\right] = 5 \Rightarrow$ funcția din stânga este strict crescătoare, deci ecuația are cel mult o soluție $\Rightarrow$ ecuația nu are soluție.

Pentru $r = p + 6 \Rightarrow p = 1, r = 7 \Rightarrow x = 37$.
Pentru $r = p + 7 \Rightarrow p = 1, r = 8 \Rightarrow x = 38$.
Pentru $r = p + 8 \Rightarrow p = 1, r = 9 \Rightarrow x = 39$.

La fel pentru $r = 29 \Rightarrow \left[\frac{29}{2}\right] + \left[\frac{29}{3}\right] + \left[\frac{29}{5}\right] = 29 - p \Rightarrow p = 1 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x = 30 \cdot 1 + 9 = 39.$
Aşadar, $x \in \{0,31,32,33,34,36,37,38,39\}$.

Olimpiadă Canada, 1994

e) $\left[\frac{x-1}{2}\right] + \left[\frac{x-1}{2} + 1\right] + \left[\frac{x-1}{2} - 2\right] =$

$= \left[\frac{x+1}{3}\right] + \left[\frac{x+1}{3} + 1\right] + \left[\frac{x+1}{3} + 2\right] \Rightarrow \left[\frac{x-1}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{3}\right] = k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k \leq \frac{x-1}{2} < k+1$ şi $k \leq \frac{x+1}{3} < k+1.$

$2k+1 \leq x < 2k+3$ şi $3k-1 \leq x < 3k+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k+1, 2k+3) \cap [3k-1, 3k+2).$

<u>Cazul 1</u>
Cazul $[2k+1, 2k+3) \cap [3k-1, 3k+2) = \emptyset.$
Pentru $k \geq 0 \Leftrightarrow 2k+3 \leq 3k-1 \Leftrightarrow k \in [4, \infty) \cap \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{4,5,6, \ldots\}.$
Pentru $k < 0 \Leftrightarrow 3k+2 \leq 2k+1 \Leftrightarrow k \leq -1 \Rightarrow k \in \{-1, -2, -3, \ldots\}.$
Vom studia prin urmare cazurile $k \in \{0,1,2,3\}$.
Pentru $k = 0 \Rightarrow [1,3) \cap [-1,2) = [1,2).$
Pentru $k = 1 \Rightarrow [3,5) \cap [2,5) = [3,5).$
Pentru $k = 2 \Rightarrow [5,7) \cap [5,8) = [5,7).$
Pentru $k = 3 \Rightarrow [7,9) \cap [5,11) = [8,9).$
Rezultă $x \in [1,2) \cup [3,7) \cup [8,9).$

Viorica Bujor, O.L. Galaţi

115*.** a) Avem $[x] + [2x] + [3x] = 4x + 5 = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k-5}{4}$
şi ecuaţia devine:
$\left[\frac{k-5}{4}\right] + \left[\frac{2k-10}{4}\right] + \left[\frac{3k-15}{4}\right] = k \quad (1).$
Impunând condiţiile pentru partea întreagă, rezultă $k = \overline{15,20}$, dar numai $k = 18$ verifică $\Rightarrow x = \frac{13}{4}.$

b) Facem substituţia $x = y + 1$ şi atunci ecuaţia se scrie:
$[y] + \left[y + \frac{1}{4}\right] + \left[y + \frac{2}{4}\right] + \left[y + \frac{3}{4}\right] = 1.$
Din identitatea lui Hermite rezultă că membrul stâng este egal cu
$[4y] = 1 \Rightarrow y \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right) \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{6}{4}\right).$

Dana Heuberger, Argument, 2006

c) Avem $[[x] + 3 + [3x] + x] - [[2x] + 5] = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow [x] + [3x] + 3 + [x] - [2x] + 5 = 4 \Rightarrow 2[x] + [3x] - [2x] = 6.$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.
$2k + [3(k+t)] - [2(k+t)] = 6 \Rightarrow 2k + 3k + [3t] - 2k - [2t] = 6$
$[3t] - [2t] = 6 - 3k \geq 0 \Rightarrow k \leq 2$.
Dacă $t \in \left[0, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow 2t \in \left[0, \frac{1}{3}\right), 3t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow [3t] - [2t] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 2 + t \in \left[2, \frac{13}{6}\right) = S_1$.
Dacă $t \in \left[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}\right) \Rightarrow 3t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), 2t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow [3t] - [2t] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 2 + t \in \left[\frac{13}{6}, \frac{14}{6}\right)$.
Dacă $t \in \left[\frac{2}{6}, \frac{3}{6}\right) \Rightarrow 3t \in \left[1, \frac{3}{2}\right), 2t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow [3t] - [2t] = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 3k = 1$, fals.
Dacă $t \in \left[\frac{3}{6}, \frac{4}{6}\right) \Rightarrow 3t \in \left[\frac{3}{2}, 2\right), 2t \in \left[1, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow [3t] - [2t] = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 2 + t \in \left[\frac{15}{6}, \frac{16}{6}\right)$.
Dacă $t \in \left[\frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right) \Rightarrow 3t \in \left[2, \frac{5}{2}\right), 2t \in \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \Rightarrow [3t] - [2t] = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 3k = 1$, fals.
Dacă $t \in \left[\frac{5}{6}, 1\right) \Rightarrow 3t \in \left[\frac{5}{2}, 3\right), 2t \in \left[\frac{5}{3}, 2\right) \Rightarrow [3t] - [2t] = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 3k = 1$, fals.
Prin urmare, $x \in \left[\frac{12}{6}, \frac{13}{6}\right) \cup \left[\frac{13}{6}, \frac{14}{6}\right) \cup \left[\frac{15}{6}, \frac{16}{6}\right) = \left[2, \frac{7}{3}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right)$.

d) Din identitatea lui Hermite rezultă că:
$[2x] - [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ și egalitatea devine $\left[x + \frac{3}{8}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ (1).
Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și atunci (1) devine:
$\left[t + \frac{3}{8}\right] = \left[t + \frac{1}{2}\right], t \in [0,1)$.
Dacă $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left[t + \frac{3}{8}\right] = \left[t + \frac{1}{2}\right] = 0$.
Dacă $t \in \left[\frac{5}{8}, 1\right) \Rightarrow \left[t + \frac{3}{8}\right] = \left[t + \frac{1}{2}\right] = 1$.
Așadar, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right) = S$. Soluțiile sunt $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in S$.

116***. Notăm cu $E(x)$ membrul stâng. Funcțiile din membrul stâng sunt crescătoare și evident $x > 0$, prin urmare dacă ecuațiile au soluții sunt în număr finit.

Scanned with OKEN Scanner

a) Se constată că $x \in \{2014,2015\}$. Pentru alte valori întregi ale lui x membrul stâng devine mai mic decât 2013 sau mai mare decât 2013. De asemenea, toate valorile $x \in [2015,2016] \subset \mathbb{R}$ verifică ecuația.

b) Pentru $x = 2013, E(x) = 2013 < 2014$.

Pentru $x = 2015, E(x) = 2016 > 2014$, ecuația nu are soluții întregi și nici reale.

c) $x \in \{1596,1597\} \in \mathbb{N}$ și $x \in [1596,1597) \subset \mathbb{R}$ verifică (enunț extins).

N. Papacu, G.M. nr. 6-7-8/2013, Concursul „Gh. Mihoc", 2013

d) Se aplică identitatea lui Hermite pentru $x = 5$.

$$\left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{5} + \frac{1}{5}\right] + \left[\frac{x}{5} + \frac{2}{5}\right] + \left[\frac{x}{5} + \frac{3}{5}\right] + \left[\frac{x}{5} + \frac{4}{5}\right] + \left[\frac{x}{5} + 1\right] = 2017 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[5\left(\frac{x}{5}\right)\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + 1 = 2017 \Rightarrow [x] + \left[\frac{x}{5}\right] = 2016 \ (1).$$

Dacă $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$, atunci (1) devine

$k + \left[\frac{k+t}{5}\right] = 2016$ (2). $\left(\text{Din } \frac{k}{n} \leq u < \frac{k+1}{n} \Rightarrow [u] = \left[\frac{k}{n}\right].\right)$ Din (2) rezultă

$k + \left[\frac{k}{5}\right] = 2016$ (3). Considerăm cazurile:

1) $k = 5p$, atunci (3) devine $5p + p = 2016 \Rightarrow 6p = 2016 \Rightarrow p = 336 \Rightarrow k = 5p = 1680 \Rightarrow x \in [1680,1681)$.

2) $k = 5p + r, r \in \{1,2,3,4\}$, atunci (3) devine:

$$5p + r + \left[\frac{5p+r}{5}\right] = 2016 \Rightarrow 5p + r + p = 2016 \Rightarrow 6p + r = 2016 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6p = 2016 - r \in \{2015,2014,2013,2012\}$, unde niciunul nu este divizibil cu 6. Așadar, $x \in [1680,1681)$.

e) Vom utiliza relația (vezi capitolul „Proprietăți")

$n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n - 1, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

și dând lui n valorile $\{1,3,6,9,18,36\}$ rezultă:

$$\begin{gathered}
[x] \leq [x] \leq [x] \\
3[x] \leq [3x] \leq 3[x] + 2 \\
6[x] \leq [6x] \leq 6[x] + 5 \\
9[x] \leq [9x] \leq 9[x] + 8 \\
18[x] \leq [18x] \leq 18[x] + 17 \\
\underline{36[x] \leq [36x] \leq 36[x] + 35} \Rightarrow \\
73[x] \leq 14305 \leq 73[x] + 68 \Rightarrow \\
\Rightarrow 73[x] \leq 73195 + 70 \leq 73[x] + 68, \text{ imposibil.}
\end{gathered}$$

Așadar, ecuația nu are soluții.

O.L. Călărași, 2010

Scanned with OKEN Scanner

117*. a) Fie $[x]=k \Rightarrow x-\frac{1}{x}=k, k \leq x<k+1 \Rightarrow x^2-kx-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}, x_2=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}.$

Atunci $x_k=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \in [k, k+1)$, unde $k \in \mathbb{N}$.

b) Fie $x=[x]+\{x\}=k+t$.

Avem $[3(k+t)]+[-2(k+t)]=[3k+3t]+[-2k-2t]=$

$=3k-2k+[3t]+[-2t]=k+[3t]+[-2t]$.

Dacă $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=3$.

Dacă $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, ecuația devine $k+0-1=3 \Rightarrow k=4 \Rightarrow x \in \left[4, \frac{13}{3}\right)$.

Dacă $t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, ecuația devine $[x]=3 \Rightarrow x \in \left[\frac{10}{3}, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow$

$x \in \left[\frac{10}{3}, \frac{7}{2}\right) \cup \{3\} \cup \left[4, \frac{13}{3}\right)$.

c) Avem $\left[4 \cdot \frac{x-1}{6}\right]=\left[\frac{x-1}{6}\right]+2002$ (1).

Notăm $\frac{x-1}{6}=y$ și (1) devine $[4y]=[y]+2002 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y-1<[4y]=[y]+2002<y+2002 \Rightarrow y<\frac{2003}{3}$ și din

$y-1+2002<[y]+2002=[4y] \leq 4y \Rightarrow 2001<3y \Rightarrow y>667 \Rightarrow$

$\Rightarrow 667<y<\frac{2003}{3} \Rightarrow [y]=667 \Rightarrow [4y]=[y]+2202=2669 \Rightarrow$

$\Rightarrow [4y]=2669 \Rightarrow 2669 \leq 4y<2670 \Rightarrow 2669 \leq \frac{2x-2}{3}<2670 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [4004{,}5; 4006)$

Concursul „Mihai Viteazul", 2003

118*. a) Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k=\frac{(k+t)^2-1}{2k+2t} \Rightarrow k^2=t^2-1, \in [-1,0)$, absurd.

Deci, ecuația nu are soluții.

b) Evident, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$k=\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]$. Fie $k=6p+r, r \in \{0,1,\ldots,5\}$ și ecuația devine:

$6p+r=\left[3p+\frac{r}{2}\right]+\left[2p+\frac{r}{3}\right], p+r=\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]$.

Dând succesiv valorile $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ rezultă

$x=k \in \{-7,-5,-4,-3,-2,0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

119**. Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$. Ecuația devine:
$k^2 + [kt] + k = 6 \Leftrightarrow [kt] = -k^8 - k + 6 \quad (*)$. Pentru $t = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \in \{-3,2\} \Rightarrow x \in \{-3,2\}$. Fie $k \geq 1$ ($k = 0$ nu verifică) și atunci
$[kt] \geq 0 \Rightarrow -k^2 - k + 6 \geq 0 \Rightarrow k \in \{-3,-2,-1,0,1,2\} \Rightarrow k \in \{1,2\}$.
Dar pentru $k = 2$ și din $(*) \Rightarrow t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 2 + t \Rightarrow x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) = S_1$.
Pentru $k \leq -1$, din relația $(*)$ rezultă
$[kt] < 0 \Rightarrow k^2 + k - 6 > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -3) \Rightarrow k \leq -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow [kt] \leq [-4t] \in \{0,-1,-2,-3,-4\}$ și din $(*)$ rezultă
$-k^2 - k + 6 \in \{-1,-2,-3,-4\} \quad (**)$, dar pentru nicio valoare a lui
$k \leq -4$ nu se realizează $(**)$. Așadar, $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \cup \{-3\}$.

Gh. Andrei

120*. a) Evident, $x \geq 1$.
Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$.
$k - 4 = \left[\sqrt{k+t}\right] \leq \sqrt{k+t} \Rightarrow k > 4 \Rightarrow k \geq 5$
$k^2 - 8k + 16 \leq k + t \Rightarrow k^2 - 9k + 16 \leq t < 1 \Rightarrow k^2 - 9k + 15 < 0, k = 6$
$\Rightarrow x = 6 + t, x \in [0,1)$, care verifică ecuația, deci $x \in [6,7)$.

Constantin Caragea

b) Considerăm situațiile:
1) $x \in (-1,0) \Rightarrow x^3 \in (-1,0), x^2 \in (0,1)$, care verifică ecuația;
2) $x \in [0,1) \Rightarrow x^2, x^3 \in [0,1)$, care verifică ecuația.

Dacă $x > 1$ ($x = 1$ nu verifică), atunci
$[x^3] = [x \cdot x^2] \geq \left[[x][x^2]\right] = [x][x^2] \Rightarrow [x] + [x^2] \geq [x][x^2] \Rightarrow$
$\Rightarrow ([x^2] - 1)([x] - 1) \leq 1$.
Dacă $[x^2] \leq 2 \Rightarrow [x^2] = 1$ sau $[x^2] = 2$.
Dacă $[x^2] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow [x] = 1, [x^3] = 2, \sqrt[3]{2} \leq x \leq \sqrt[3]{3}$, adică
$\sqrt[3]{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
Dacă $[x^2] = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \Rightarrow [x] = 1, [x^3] = 3, \sqrt[3]{3} \leq x \leq \sqrt[3]{4}$, care verifică. Așadar, soluțiile sunt $x \in (-1,1) \cup \left[\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\right) \cup \left[\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}\right)$.

Olimpiadă Rusia, 1995

c) Dacă $x \geq 2 \Rightarrow [x] \geq 2$ și $[x^2] \geq 4$, fals.
Dacă $x \in [0,1) \Rightarrow x^2 \in (0,1)$, fals.
Dacă $x \in \left[1, \sqrt{2}\right] \Rightarrow x^2 \in [1,2] \Rightarrow [x] + [x^2] = 2 \Rightarrow x \in \left[1, \sqrt{2}\right)$.
Dacă $x \in \left[\sqrt{2}, 2\right] \Rightarrow x^2 \in [2,4] \Rightarrow [x] + [x^2] \geq 1 + 2 = 3$, fals.
Așadar, $x \in \left[1, \sqrt{2}\right)$.

d) Dacă $x \in [1,2] \Rightarrow x^2 \in [1,4]$.
Ecuația devine: $x^2 = [x^2] + (x - [x])^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm cazurile:

1) Dacă $x \in [1, \sqrt{2}) \Rightarrow \begin{matrix}[x]=1\\ [x^2]=1\end{matrix} \Rightarrow x^2 = 1 + (x-1)^2 \Rightarrow x = 1.$

2) Dacă $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow \begin{matrix}[x]=1\\ [x^2]=2\end{matrix} \Rightarrow x^2 = 2 + (x-1)^2 \Rightarrow$

$x = \frac{3}{2} \in [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

3) Dacă $x \in [\sqrt{3}, 2) \Rightarrow \begin{matrix}[x]=1\\ [x^2]=3\end{matrix} \Rightarrow x^2 = 3 + (x-1)^2 \Rightarrow$

$x = 2 \notin [\sqrt{3}, 2)$.

4) Dacă $x = 2 \Rightarrow 4 = 4 + 0 \Rightarrow x = 2$. Prin urmare, $x \in \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$.

121*. a) Evident, $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ și rezultă $x^2 = k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$. Ecuația devine: $[\sqrt{5 - x^2}] = \sqrt{5 - x^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{\pm 1, \pm\sqrt{5}\}$.

b) Dacă notăm $u = \sqrt{2x + 19} \Rightarrow 2x = u^2 - 19$ și ecuația devine:

$2u^2 + 21 = 14[u]$ (1)

$\Rightarrow 2u^2 - 14u + 21 \leq 0 \Rightarrow x \in u\left[\frac{7 - \sqrt{7}}{2}, \frac{7 + \sqrt{7}}{2}\right] = I.$

Din (1) $\Rightarrow 2u^2 = 7k$, dar $u^2 \notin \mathbb{Z}$ (altfel se ajunge la o contradicție în (1)) și chiar $2u^2 : 7 \Rightarrow 2u^2 = 7k \Rightarrow u = \sqrt{\frac{7k}{2}}$, k întreg, impar.

Dacă $k = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{2}} < \frac{7 - \sqrt{7}}{2} \Rightarrow u \notin I$. Dacă $k = 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{21}{2}} \in I$.

Dacă $k = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{35}{2}} < \frac{7 + \sqrt{7}}{2} \Rightarrow u \in I$.

Rezultă $2x + 19 = \frac{21}{2} \Rightarrow x = -\frac{17}{4}$ și $2x + 19 = \frac{35}{2} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{17}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$.

Concurs Serbia, 2008

122*. a) Evident, $x \geq 0$ și $x = 0$ verifică ecuația.

Fie $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [\sqrt{x}] = \sqrt{x} \Rightarrow x = k^2, k \in \mathbb{N}$.

Dacă $x \in (k, k+1), k \in \mathbb{N}$, atunci ecuația devine:

$[\sqrt{x}] = 2\sqrt{x} - \sqrt{k} \leq \sqrt{x} \Rightarrow x \leq k$, contradicție.

Așadar, soluțiile sunt $S = \{k^2, k \in \mathbb{N}\}$.

Dana Heuberger, Argument, nr. 15

Scanned with OKEN Scanner

b) Evident, $x > 0$. Notăm $2\sqrt{x} = k > 0 \Rightarrow 4x = k^2 \Rightarrow x = \frac{k^2}{4}$.

Avem $\left[\sqrt{1+\frac{5k^2}{4}}\right] = k \Rightarrow k \leq \sqrt{1+\frac{5k^2}{4}} < k+1 \Rightarrow k \in \{1,2,3,\ldots,7\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, 9, \frac{49}{4}\right\}$.

G.M. Supliment, nr. 9/2016

123*. a) Notăm $\left[\sqrt[3]{x}\right] = m \in \mathbb{Z}$, de unde rezultă
$m \leq \sqrt[3]{x} < m+1 \Rightarrow m^3 \leq x < m^3 + 3m^2 + 3m + 1$. Ecuația devine:
$x = 10m - 3$, deci $m^3 < 10m - 3 < m^3 + 3m^2 + 3m + 1$ (*).

Din $m^3 - 10m + 3 \leq 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, 3\right] \cap \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow m \in \{1,2,3\}$, deci $x \in \{7,17,27\}$.

Viorel Cornea, G.M. nr. 7-8/1997

b) Evident, $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} < x + 1$ și cu notația
$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y^3 \leq y + y^2 \leq y^3 + 1$.
Din stânga rezultă $y(y^2 - y - 1) \leq 0 \Rightarrow y^2 - y - 1 \leq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow x = y^3 \in \left[0, \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] \cap \mathbb{N} = \{0,1,2,3,4\}$.

Din inegalitatea dreaptă rezultă $(y-1)^2(y+1) > 0, y \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$.
Prin urmare, $x \in \{0,2,3,4\}$.

Gh. Stoica

124*. Evident, $x \notin [0,1), x \notin \mathbb{Z}$; înmulțind cu x^2 rezultă:
$\frac{x}{[x]} + \frac{x^2}{[x]\{x\}} + \frac{x}{\{x\}} = m \Rightarrow$ dacă notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}$,
$t \in [0,1)$ relația devine:

$\frac{k+t}{k} + \frac{k^2+2kt+t^2}{kt} + \frac{k+t}{t} = m \Rightarrow 4 + 2\frac{k}{t} + 2\frac{t}{k} = m \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\left(\frac{k}{t} + \frac{t}{k}\right) = m - 4 \Rightarrow \frac{k}{t} + \frac{t}{k} = \frac{m-4}{2}$.

Pentru $m = 5, \frac{k}{t} + \frac{t}{k} = \frac{1}{2}$ și pentru $m = 6, \frac{k}{t} + \frac{t}{k} = 1$,
ultimele două ecuații nu au soluții.

$\left(\text{Deoarece } x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0 \text{ și } x + \frac{1}{x} \leq -2, \forall x < 0.\right)$

G.M. nr. 2/2001

Scanned with OKEN Scanner

125*. $a+\frac{1}{a}\geq 2, \forall\, a\geq 0.$

Evident, $x^2-5x+5\neq 0\Rightarrow |x^2-5x+5|+\frac{1}{|x^2-5x+5|}\geq 2$ (1)

și $\left\{\frac{x+3}{2x}\right\}=0$ (2) $\Rightarrow |x^2-5x+5|=1\Rightarrow x\in\{1,4,2,3\}$,

din care numai $x\in\{1,3\}$ verifică ecuația (2).

126.** Avem

$\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{x^2+6}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ și $x^2+1\geq 1$.

Prin urmare, $x=0$ este singura soluție, sau se notează $x^2=y\geq 0$ ș.a.m.d.

Vasile Duma, R.G. nr. 23-24

127*. a) Evident $x=0$ este o soluție, iar $x\in\mathbb{Z}^*$ nu sunt soluții și nici $x<0$ nu sunt soluții. Fie $x>0$, cu $x=[x]+\{x\}=k+t, k\geq 0$. Ecuația devine:

$[k(k+t)]=k=0\Rightarrow x=t\in[0,1)=S$ sunt soluții.

b) Evident, ecuația nu are soluții negative neîntregi, dar $r\in\mathbb{Z}$ verifică ecuația. Fie $x=k+t, k\geq 0, t\in[0,1)$. Atunci ecuația devine:

$\{(k+t)k\}=[t(k+t)]\Rightarrow\{kt\}=[t^2+kt]\in[0,1)\Rightarrow[kt+t^2]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\leq kt+t^2<1$. Inegalitatea din stânga este evidentă. Fie

$t^2+kt-1<0\Rightarrow\alpha\in\left[0,\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)$, unde $\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}<1$,

$\forall\, k\in\mathbb{N}^*$.

Rezultă că $x\in\left[k,k+\frac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\right)=\left[k,k+\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right), \forall\, k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\left[k,k+\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)=S$. Prin urmare, avem soluția $S\cup\mathbb{Z}$.

Gh. Andrei

128.** a) Cu notația $x=k+t, k\in\mathbb{N}, t\in[0,1)$ ecuația devine:

$k=[2t]-[t]$.

Pentru $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow k=0\Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)=S_1$.

Pentru $t\in\left[\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow k=1\Rightarrow x=1+t\Rightarrow x\in\left[\frac{3}{2},2\right)=S_2$.

Rezultă că $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2},2\right)$.

b) Ecuația devine $|2k+t|=|k+2t|\Rightarrow 2k+t=\pm(k+2t)\Rightarrow$

$k=\pm t\Rightarrow k=0\Rightarrow t=0\Rightarrow x=0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezultă $\{2k+t\}=\{k+2t\}\Rightarrow\{t\}=\{2t\}$ $(*)$.

Dacă $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, atunci $(*)$ devine $t=2t\Rightarrow t=0\Rightarrow x=k\in\mathbb{Z}$.

Dacă $t\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, atunci $(*)$ devine $\{t\}=\{2t-1\}\Rightarrow t=2t-1\Rightarrow$ $t=1$, fals. Aşadar, $x\in\mathbb{Z}$.

d) Notăm $x-1=y\Rightarrow|[y]|+[|y|]=1$.

Pentru $y>0\Rightarrow[y]+[y]=1$, fals.

Pentru $y<0\Rightarrow|[y]|+[-y]=1\Rightarrow|[y]|=[-[-y]-1],[-y]>0\Rightarrow$ $\Rightarrow-[-y]>0\Rightarrow-[-y]-1<0\Rightarrow[-(-y)-1]=[-y]+1$ şi $[|y|]=$ $=[-y]\Rightarrow[-y]+1+[-y]=1\Rightarrow[-y]=0\Rightarrow y\in(-1,0)\Rightarrow x\in(0,1)$.

129*. Evident că $x=0$ verifică. Pentru $x>0$ ecuaţia devine:

$x+\{x\}=[\{x\}+x]\Rightarrow[x]+2\{x\}=\big[[x]+2\{x\}\big]=[x]+[2\{x\}]\Rightarrow$ $\Rightarrow2\{x\}=[2\{x\}]\in\{0,1\}$.

Dacă $2\{x\}=0\Rightarrow\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{N}$.

Dacă $2\{x\}=1\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=n+\frac{1}{2},n\in\mathbb{N}$.

Pentru $x<0$, ecuaţia devine: $\{x\}-x=[\{x\}-x]$ $(*)$,

iar dacă $x=[x]+\{x\}=k+t,k\in\mathbb{N},t\in[0,1)$ şi $(*)$ devine: $-k=[-k]$, deci orice $x\in(-\infty,0)$ verifică ecuaţia.

Aşadar, soluţiile ecuaţiei sunt $S=(-\infty,0)\cup\mathbb{N}\cup\left\{n+\frac{1}{2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Romeo Zamfir, Galaţi

130***. a) Evident $x\in\mathbb{Z}\cup[0,\infty)$ $(*)$. Dacă $x<0$ şi $x\notin\mathbb{Z}$, fie $x=k+t,k\leq-1$ şi ecuaţia devine:

$[|k+t|]=|k|\Rightarrow[-k-t]=-k\Rightarrow-k+[-t]=-k$

$[-t]=0\Rightarrow t=0$ deci $x=k\in\mathbb{Z},k\leq-1$ din $(*)$.

Aşadar, $x\in\mathbb{Z}$ şi $S=[0,\infty)\cup\mathbb{Z}$.

Concurs „Gh. Mihoc"

b) Evident $x\geq0$ şi $\sqrt{[x]}=k\in\mathbb{N}\Rightarrow[x]=k^2\Rightarrow x=k^2+\alpha$,

$\alpha\in[0,1)\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{k^2+\alpha}\in[k,k+1)\Rightarrow\left[\sqrt{x}\right]=k\Rightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[k^2,k^2+1)$.

131***. Evident $\frac{x}{3}=k\Rightarrow x=3k,k\in\mathbb{Z}$. Ecuaţia devine:

$$\left[\frac{3k^3+8k^2-3k+3}{18}\right]=k\Leftrightarrow18k\leq3k^3+8k^2-3k+3<18k+18\Rightarrow$$

$\Rightarrow0\leq3k^3+8k^2-21k+3\leq18$.

Dacă $k \geq 3$ atunci $3k^3 + 8k^2 - 21k + 3 = 3k(k^2 - 7) + 8k^2 + 3 > 18$.
Dacă $k \leq -5$ atunci $3k^3 + 8k^2 - 21k + 3 = 2k^2(k + 4) + k(k^2 - 21) + +3 < 0$.
Aşadar, $k \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 2$, verifică, deci $x_1 = 0, x_2 = 6$.

132**. a) Se remarcă faptul că $x = 0$ este soluție.
Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ şi ecuația devine:

$$t^2 + t\left(2k - \frac{1}{2}\right) - k = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}, t \text{ şi } k = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Soluțiile sunt $x_k = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$ şi $x = 0 \Rightarrow x \in \left\{k + \frac{1}{2}\right\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{0\}$.

b) Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ şi ecuația devine:

$$2k(1 + t) = 2k + 2t + 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2(k-1)} \in [0,1) \Rightarrow k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*$$

de unde $x_k = k + \frac{1}{2(k-1)} = \frac{2k^2 - 2k + 1}{2(k-1)}, \forall\, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Aurel Dobrescu, G.M. nr. 5/2016

133*. Se ştie că $[y] + [-y] = \begin{cases} 0, & y \in \mathbb{Z} \\ -1, & y \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
Pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 + 0 + 1 = 0$, fals.
Dacă $x, 2x \notin \mathbb{Z}$, atunci $[-2x] + [2x] + [x] + [-x] + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 - 1 + 1 = = 0$, fals.
Dacă $x \notin \mathbb{Z}, 2x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-2x] + [2x] + [x] + [-x] + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 - 1 + 1 = = 0$.

Aşadar, soluțiile sunt: $x_k = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Andrei Eckstein, O.L. Timiş, 2009

134*. a) Se impune ca $[2x - 5] = [3x - 7] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq 2x - 5 < 1 \Leftrightarrow$
$x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right)$ şi $0 \leq 3x - 7 < 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right) \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right) \cap \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right)$.

b) Evident $x \geq 1$ şi $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}^*$. Avem
$x \leq \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} < x + 1 \Rightarrow x - \sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow x \in \{1,2,3,4,5\}$ şi care verifică ecuația.

O.L. Giurgiu, 2016

Scanned with OKEN Scanner

135*. a) Notăm $[x^2-x+1]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k^2-(2x+1)k+x^2+x=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\Delta=1\Rightarrow k\in\{x,x+1\}\Rightarrow[x^2-x+1]=x$ sau $[x^2-x+1]=x+1\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in\{0,1,2\}$.

b) Se procedează analog, sau se obține din prima ecuație cu substituția $x\to x-1\Rightarrow x\in\{1,2,3\}$.

136*. Notăm $y=\sqrt{3}x$, iar ecuația devine

$$y^2=[2y]\{2y\}+1\Leftrightarrow(y-[2y])^2=1\Rightarrow y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{\pm1\}\Rightarrow x\in\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

Nicușor Minculete, R.G., 26

137*. a) Avem $(x-[x])(x^2+x[x]+[x]^2-x-[x])=0\Rightarrow x-[x]=$ $=\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ și $x^2+x[x]+[x]^2-x-[x]=0$, iar cu notația $x=k+t,t\in[0,1)$ rezultă: $x^2+x(k-1)+k^2-k=0$ cu $\Delta\geq0\Rightarrow$ $\Rightarrow k\in\{0,1\}\Rightarrow x\in\{0,1\}$. Prin urmare, $x\in\mathbb{Z}$.

b) Fie $x=k+t,k\in\mathbb{Z},t\in[0,1)$. Atunci ecuația devine: $(x-[x])(x^2+x[x]+[x]^2-3x-3[x])=0\Rightarrow\{x\}=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ și din al doilea factor obținem $t^2+3t(k-1)+3k^2-6k=0$, cu condiția $\Delta_k\geq0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k^2-2k-3\leq0\Rightarrow k\in\{\pm1,0,2,3\}=A$. Se constată că pentru fiecare valoare a lui $k\in A$ rezultă că $t\notin(0,1)$. Prin urmare, singurele soluții sunt numerele întregi.

138*. a) Deoarece $[x]\leq x\Rightarrow\min(x,[x])=[x]$ și ecuația devine $\{x^2\}+2x[x]=x^2+9\Rightarrow(x-[x])^2+2x[x]=x^2+9\Rightarrow[x]^2=9\Rightarrow$ $\Rightarrow[x]=\pm3$.

Avem $[x]=-3\Rightarrow x\in[-3,-2)\cup[3,4)$.

b) $x=[x]+\{x\}=k+t,k\in\mathbb{Z},t\in[0,1)$ și ecuația devine:

$kt=k-t\Rightarrow t(k+1)=k$ (evident cu $k\neq-1$) $\Rightarrow t=\frac{k}{k+1}\in(0,1)$ și $k\in\mathbb{N}$.

Dacă $k=0\Rightarrow t=0\Rightarrow x=0$. Dacă $k=1\Rightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Dacă $k=2\Rightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow x=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

Așadar, $x_k=k+\frac{k}{k+1}=\frac{k^2+2k}{k+1},k\in\mathbb{N}$.

Nistor Budescu, R.M.T., 2010

§ 6. Ecuații (nivelul avansat)

139*. a) Fie $x=k+t,k\in\mathbb{Z},t\in(0,1)$. Evident $x\notin\mathbb{Z}$ și $x\notin[0,1)$. Rezultă $kt=1\Rightarrow t=\frac{1}{k},k\in\mathbb{N}^*-\{1\}\Rightarrow x=k+\frac{1}{k}$, unde $k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

b) Notăm $[x]=k\in\mathbb{Z}$ și $\{x\}=t\in[0,1)$. De remarcat că $x>1$ (altfel ecuația nu are soluție), deci $k\geq1$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $[(k+t)t]=1 \Rightarrow 1 \le t^2+kt<2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2+kt-2<0 \Rightarrow t \in \left[0, \dfrac{-k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right) \\ t^2+kt-1 \ge 0 \Rightarrow t \in \left[\dfrac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}, 1\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in \left(\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}, \frac{-k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right), k \ge 1 \Rightarrow$$

$$x \in \left(\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}, \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right), \forall\, k \ge 1$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k \ge 1} \left(\frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}, \frac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right).$$

Tiberiu Agnola, O.L. Sibiu, 2004

c) Evident $x=0$ este soluție. Fie $x \neq 0$ și $x=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, iar ecuația devine:

$k(k+t)=t \Rightarrow k^2=t(1-k), k<1$ și evident $k=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=0$.

Avem $t=\dfrac{k^2}{1-k} \in (0,1) \Rightarrow k \in \{0,-1\}$.

Pentru $k=-1 \Rightarrow t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$. Rezultă $x \in \left\{0,-\dfrac{1}{2}\right\}$.

G.M. nr. 5-6/1998

d) Evident $x=0$ este soluție.

1) Dacă $x \ge 1 \Rightarrow [x]\{x\}<[x] \le x$; iar dacă $x \in (0,1) \Rightarrow$ $\Rightarrow [x]\{x\}=0<x$ și evident $x=1$ nu verifică.

2) Vom căuta soluții negative.

Fie $x<0$ cu $[x]=-n$ unde $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -n\{x\}=-n+\{x\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\}=\dfrac{n}{n+1} \in [0,1), \forall\, n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $x=-n+\dfrac{n}{n+1}=-\dfrac{n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, deci o infinitate de soluții.

e) Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow 1 \le x[x]<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \le k(k+t)<2 \Rightarrow 1 \le k^2+kt<2 \qquad (*)$,

care este adevărată pentru $k=1 \Rightarrow k=1+t \Rightarrow x \in [1,2)=S_1$.

Din $(*) \Rightarrow k^2+kt-1 \ge 0$ și $k^2+kt-2<0$.

$1-k^2 \le kt<2-k^2 \Rightarrow k \in \{\pm 1\}$ și pentru $k=1 \Rightarrow x=1+t \in [1,2)$ și pentru $k=-1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow S=[1,2) \cup \{-1\}$.

Matematica v scole, 1989

Scanned with OKEN Scanner

f) Evident $x = 0$ este soluție.

Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in [0,1)$. Ecuația devine:

$k = (k+t)t \Rightarrow t^2 + kt - k = 0$ cu $\Delta \geq 0 \Rightarrow k^2 + 4k \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in (-\infty, -4] \cup [0, \infty)$.

Fie, $k > 0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2+4k}}{2} \Rightarrow t_k = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2+4k}}{2} \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k = k + \dfrac{\sqrt{k^2+4k}-1}{2} = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4k}}{2}, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Dacă $k < 0$, atunci $t_{1,2}$ nu aparține $[0,1)$. Prin urmare, ecuația are soluții pozitive $x_k = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4k}}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Concursul „Traian Lalescu", 2001, G.M. nr. 7-8/2002

140**. a) Dacă $x \geq 1 \Rightarrow [x] \geq 1 \Rightarrow \dfrac{\{x\}}{[x]} = x \geq 1 \Rightarrow \{x\} \geq [x]$, fals.

Dacă $x < -1 \Rightarrow [x] \geq -2 \Rightarrow \dfrac{\{x\}}{[x]} = x < -1$ și cum $[x] \geq -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\{x\} < [x] < 1, \Rightarrow [x] > -1$, contradicție.

Fie $x \in [-1,0) \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow x = -\{x\} \Rightarrow [x] + \{x\} = -\{x\} \Rightarrow$

$\{x\} = \dfrac{1}{2}$ și cum $x \in [-1,0) \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

b) Evident $x \in \mathbb{Z}$ și fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}$, $t \in (0,1)$. Ecuația devine: $k^2 = t(1-k) \Rightarrow (*) \quad k \leq 1$ ($k = 1$ și $k = 0$ nu verifică).

Din $(*)$ rezultă $t = \dfrac{k^2}{1-k} \in (0,1) \Rightarrow k < 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

c) Evident $x \notin \mathbb{Z}$. Fie $= k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in (0,1)$.

Avem $k = t(k+t) \Rightarrow t^2 + tk - k = 0$, iar din $k = \dfrac{t^2}{1-t} \geq 0$ și

$\Delta_t = k^2 + 4k \geq 0 \Rightarrow k \in (0, \infty) \Rightarrow$

$k \geq 1$ ($k = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 0$ nu convine)

$\Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2+4k}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{-k+\sqrt{k^2+4k}}{2} \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4k}}{2}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Titu Andreescu, a) G.M. nr. 6/1986, b) G.M. nr. 9/1988

141**. Evident $x \geq 0$ și toate numerele pătrate perfecte sunt soluții, $x = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, iar numerele $x \in (0,1)$ nu verifică, deci $x \geq 1$.

Avem $x - [x] = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \Leftrightarrow x - \sqrt{x} = [x] - [\sqrt{x}] = k \in \mathbb{N}$

Scanned with OKEN Scanner

$x-\sqrt{x}=k$ și $\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2 \Rightarrow u^2-u-k=0 \Rightarrow$

$u_k=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}, k\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{k}=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k=\frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}, k\in\mathbb{N}.$

Evident $S=\left\{x_k=\frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}, k\in\mathbb{N}\right\}$

care conține și pătratele perfecte.

C. Caragea, Gh. Andrei

142**. a) Evident $x\in\mathbb{Z}$ sunt soluții. Arătăm că nu există și alte soluții.

Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{N}, t\in[0,1)$. Ecuația se mai scrie:

$\{k(k+t)\}=\{t(k+t)\} \Rightarrow \{kt\}=\{kt+t^2\} \Rightarrow \{kt+t^2\}-\{kt\} \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2=[kt+t^2]-[kt]\in\{0,1\}$, de unde rezultă numai $t=0 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$.

Gh. Andrei

b) Evident ecuația nu are soluții negative și $x\in[0,1)=S_1$ care verifică; numerele naturale nu sunt soluții. Încercăm să depistăm soluțiile mai mari ca 1. Ecuația se mai scrie:

$[k(k+t)]=[t(k+t)] \Leftrightarrow k^2+[kt]=[kt+t^2] \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2=[kt+t^2]-[kt]\in\{0,1\}$.

Pentru $k=0$ rezultă soluțiile S_1. Pentru $k=1 \Rightarrow 1=[t^2+t]-[t]=$

$=[t^2+t]$.

Se impune ca $1\le t^2+t<2$, unde inegalitatea din dreapta este evidentă, iar din stânga rezultă: $t\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$. Prin urmare, rezultă soluțiile:

$x=1+t, t\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$, atunci $x\in\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2},2\right)=S_2 \Rightarrow x\in S_1\cup S_2$.

Gh. Andrei

c) Evident $x=0$ este soluție. Fie $x\ge 0$ și $x=[x]+\{x\}=k+t \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2+kt+k^2=0 \Rightarrow \left(k+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}=0 \Rightarrow k=t=0 \Rightarrow x=0.$

Dacă $x<0, kt=-(k+t)^2 \Rightarrow t^2+3kt+k^2=0 \Rightarrow$

$t_{1,2}=\frac{k}{2}\left(-3+\sqrt{5}\right)\in(0,1)$ doar pentru $k\in\{-1,-2\}$.

Așadar, pentru $k=-2 \Rightarrow t_2=3-\sqrt{5} \Rightarrow x_1=1-\sqrt{5}$ și pentru $k=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Prin urmare, $x\in\left\{0,1-\sqrt{5},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

143**. a) Evident $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \cup [0,1)$.
Notăm $[x] = k, \{x\} = t \in (0,1)$. Ecuația devine:

$$k - t + (k-t)\frac{1}{kt} = 0 \Rightarrow (k-t)\left(1 + \frac{1}{kt}\right) = 0, k \neq t$$

$$kt = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{k} \text{ cu } k \leq 2 \Rightarrow x = k - \frac{1}{k}, k \leq -2.$$

Petre Năchilă

b) Evident $x \neq 0$. Ecuația devine: $[x] - \left[\frac{1}{x}\right] = \{x\} - \left\{\frac{1}{x}\right\}$ (1)
și cum membrul stâng este un număr întreg, iar cel drept, un număr compus în intervalul $(-1,1)$, avem

$$[x] - \left[\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow [x] = \left[\frac{1}{x}\right] \text{ și din (1)} \Rightarrow \{x\} = \left\{\frac{1}{x}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \pm 1.$$

Nicolae Cavachi, Dorin Arventiev, O.L. Constanța, 2013

c) Evident $x \notin [0,1) \Leftrightarrow [x] \neq 0, \{x\} \neq 0$. Ecuația se mai scrie:
$([x] - \{x\})([x]\{x\} - 1) = 0$, dar cum $[x] \neq \{x\} \Rightarrow [x]\{x\} = 1 \Rightarrow$
$[x] > 0 \Rightarrow [x] \geq 1$, însă $[x] \neq 1 \Rightarrow [x] \geq 2 \Rightarrow$ Fie $[x] = k \geq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x\} = \frac{1}{k} \Rightarrow x_k = k + \frac{1}{k}$, unde $k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

144**. a) Notăm $[2x-1] = [2-3x] = m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2x - 1 < m + 1 \\ m \leq 2 - 3x < m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} \leq x < \frac{m+2}{2} \\ \frac{1-m}{3} < x < \frac{2-m}{3} \end{cases} \quad (1)$$

și din $\begin{cases} \frac{m+1}{2} \leq x < \frac{m+2}{2} \\ \frac{m-2}{3} \leq -x < \frac{m-1}{3} \end{cases}$ (2)

$$\Rightarrow \frac{5m-1}{6} \leq 0 < \frac{5m+4}{6} \Rightarrow m = 0,$$

iar din (1) rezultă $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} \leq -x < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

b) În mod analog $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \left[\frac{1-2x}{6}\right] = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$$\Rightarrow \begin{cases} m \le \frac{x+1}{3} < m+1 \\ m \le \frac{1-2x}{6} < m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 \le x < 3m+2 \\ \frac{6m-1}{2} \le -x < \frac{6m+5}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m-1 \le x < 3m+2 \\ \frac{-6m-5}{2} < x \le \frac{-6m+1}{2} \end{cases} \quad (2).$$

Din (1) rezultă $k_m - \frac{3}{2} \le 0 < 6m + \frac{9}{2} \Rightarrow m = 0$ și din (2), pentru $m = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 2 \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right].$$

c) Analog $\left[\frac{x-3}{4}\right] = \left[\frac{x-4}{3}\right] = m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4m+3 \le x < 4m+7 \\ 3m+4 \le 4 < 3m+7 \end{cases} \quad (1) \text{ și } \begin{cases} 4m+3 \le x < 4m+7 \\ -3m-7 < -x \le -3m-4 \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow m - 4 < 0 < m + 3 \Rightarrow m \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Pentru $m = 0$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} 3 \le x < 7 \\ 4 \le x < 7 \end{cases} \Rightarrow x \in [4,7) = S_1$.

Pentru $m = 1$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} 7 \le x < 11 \\ 7 \le x < 10 \end{cases} \Rightarrow x \in (7,10) = S_2$.

Pentru $m = 2$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} 11 \le x < 15 \\ 10 \le x < 13 \end{cases} \Rightarrow x \in [11,13) = S_3$.

Pentru $m = 3$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} 15 \le x < 19 \\ 13 \le x < 16 \end{cases} \Rightarrow x \in [15,16) = S_4$.

Pentru $m = -1$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 3 \\ 1 \le x < 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [1,3) = S_5$.

Pentru $m = -2$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} -5 \le x < -1 \\ -2 \le x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2,-1] = S_6$.

Rezultă $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 =$

$= [4,10) \cup [11,13) \cup [15,16) \cup [1,3) \cup [-2,-1]$.

c) Avem $\left[\frac{3-x}{3}\right] = \left[\frac{1-x}{2}\right] = m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m \le x < -3m+2 \\ -2m-1 \le 4 < -2m+1 \end{cases} \quad (1) \text{ și din } \begin{cases} -3m \le x < -3m+3 \\ 2m-1 < -x \le 2m+1 \end{cases} \quad (2).$$

Din (2) $\Rightarrow -m - 1 < 0 < -m + 4 \Rightarrow m \in \{0,1,2,3\}$.

Pentru $m = 0$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1] = S_1$.

Pentru $m = 1$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} -3 \le x < 0 \\ -3 \le x < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3,-1] = S_2$.

Pentru $m = 2$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} -6 \le x < -3 \\ -5 \le x < -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-5,-3] = S_3$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m = 3$ în (1) $\Rightarrow \begin{cases} -9 \leq x < -6 \\ -7 \leq x < -5 \end{cases} \Rightarrow x \in (-7,-6] = S_4$.

Rezultă $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = (-7,-6] \cup (-5,-3] \cup (-3,-1] \cup (0,1]$.

e) În mod analog rezultă că $x \in [1,2) \cup [3,7) \cup [8,9)$.

Matematica v scole, 1991

145*. Se știe că dacă $[a] = [b] \Rightarrow |a-b| < 1$, deci dacă $|a-b| \not< 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [a] \neq [b]$.

a) Avem $|2x^2 - x + 1 - x^2 - x + 1| = |x^2 - 2x + 2| =$

$= |(x-1)^2 + 1| \not< 1$, rezultă că $x \in \emptyset$.

b) $\left|\frac{x^2}{2} + x - x + \frac{1}{2x^2}\right| = \left|\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right| = \left|\frac{x^4+1}{2x^2}\right| \not< 1 \Rightarrow x \in \emptyset$.

c) Din $\left|\frac{x^2+2x}{3} - (x+3)\right| < 1 \Rightarrow x \in (-3,-2] \cup (3,4)$.

Dacă $x \in (-3,-2] \Rightarrow [x+3] = 0$ și dacă $x \in (3,4) \Rightarrow [x+3] = 6$.

Considerăm cazurile $\begin{cases} [x+3] = 0 \\ \left[\frac{x^2+2x}{3}\right] = 0 \end{cases}$, pentru $x \in (-3,-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-3,-2) = S_1$.

Cazul $\begin{cases} [x+3] = 6 \\ \left[\frac{x^2+2x}{3}\right] = 6 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-1+\sqrt{19}, -1+\sqrt{22}\right] = S_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in S_1 \cup S_2 = (-3,-2) \cup \left[-1+\sqrt{19}, -1+\sqrt{22}\right]$.

d) Utilizând identitatea $[x+n] = [x] + n, \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$, avem

$[x^4 - 4x^2 + 4] = [x^4 + 4x^2 + 4] \Leftrightarrow [(x^2-2)^2] = [(x^2+2)^2] = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{k} \leq |x^2 - 2| < \sqrt{k+1} \\ \sqrt{k} \leq x^2 + 2 < \sqrt{k+1} \end{cases}$ (1).

Dacă $x^2 \geq 2 \Rightarrow 2\sqrt{k} \leq 2x^2 < 2\sqrt{k+1} \Rightarrow \sqrt{k} \leq x^2 < 2\sqrt{k+1}$,

contradicție cu (1).

Dacă $x^2 < 2 < \sqrt{k+1} \Rightarrow 2\sqrt{k} \leq 4 < 2\sqrt{k+1} \Rightarrow \sqrt{k} \leq 2 < \sqrt{k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \leq 4 < k+1 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow x = 0$.

Aurel Ene, Concursul „Matematica – modus vivendi", 2009

146*. a) Evident $x \notin [0,1)$. Atunci ecuația devine:

$(x - [x])\left(\frac{2015}{x[x]} - 1\right) = 0 \Rightarrow x - \{x\} = \{x\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, care nu convine sau

$x[x] = 2015 \Rightarrow k(k+1) = 2015 \Rightarrow x = \frac{2015 - k^2}{k} \in [0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 \leq 2015$ (1)

și $2015 \leq k^2 + k$ (2) $\Rightarrow k \in [-44,44] \cap \mathbb{Z}$, dar niciunul dintre numerele care verifică condiția (1) nu verifică condiția (2).

Așadar, nu există numere neîntregi care să verifice ecuația dată.

b) Evident, $x \in \mathbb{Z}^*$ verifică ecuația. Ecuația se mai scrie:

$$x - [x] = 2025\left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \{x\} = 2025\frac{\{x\}}{x[x]} \Rightarrow \{x\}(x[x] - 2025) = 0.$$

Din $\{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}^*$ (1), iar din $x[x] = 2025$,

cu notația $x = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in (0,1)$ rezultă:

$$k(k+t) = 2025 \Rightarrow t = \frac{2025 - k^2}{k} \in [0,1) \Rightarrow 0 \leq \frac{2025 - k^2}{k} < 1.$$

Pentru $k \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} k^2 \leq 2025 \\ k^2 + k - 2025 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k \in \{1,2,3,\ldots,45\} \\ k = 45 \end{matrix}$.

Rezultă $k = 45, x = 45 + t, x \in [45,46) = S_2$ (1).

Pentru $k \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 2025 - k^2 \leq 0 \\ k^2 + k - 2025 < 0 \end{cases} \Rightarrow k = 46 \Rightarrow k \leq -45, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-45,-44) = S_3$.

Așadar, $x \in [45,46) \cup [-45,-44) \cup \mathbb{Z}^*$.

147***. a) Avem $[x] = x^3 - 3 \Rightarrow x - 1 < x^3 - 3 \leq x \Rightarrow -1 < x^3 - x - 3 \leq$

$\leq 0 \Leftrightarrow -1 < f(x) \leq 0$.

Se deduce că ecuația are soluția $x = \sqrt[3]{4} \in (1,2) \Rightarrow S = 4$.

A.S.E., 2002

b) Pentru $x \geq 2 \Rightarrow x^5 \geq x^4[x] \geq 16[x] = [x] + 15[x] \geq [x] + 30 >$

$> [x] + 5$. Dacă $x \leq 1 \Rightarrow x^5 < x^4([x] + 1) \leq [x] + 1 < [x] + 5$.

Prin urmare, soluțiile se află în intervalul (1,2). Atunci $[x] = 1$ și ecuația devine $x^5 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[5]{6}$.

c) Fie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Avem $f(-1) < 0, f(0) = 1 > 0, f(2) < 0, f(3) > 0$,

deci ecuația are rădăcini reale: $x_1 \in (-1,0), x_2 \in (0,1), x_3 \in (2,3) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x_1] = -1, [x_2] = 0, [x_3] = 2$.

148**. a) Se știe că dacă $|x - y| \leq 1 \Rightarrow |[x] - [y]| \in \{0,1\}$.

Cum $\left|x + \frac{1}{3} - x - \frac{2}{5}\right| < 1 \Rightarrow \left|\left[x + \frac{1}{3}\right] - \left[x + \frac{2}{5}\right]\right| \in \{0,1\}$.

Cazul $\left[x + \frac{1}{3}\right] = \left[x + \frac{2}{5}\right] = \frac{3}{2}$ este un caz imposibil și atunci avem cazul

$$\begin{cases} \left[x + \frac{1}{3}\right] = 1 \\ \left[x + \frac{2}{5}\right] = 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{8}{5}, \frac{5}{3}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\left[x-\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{4}\right]=4$ și analog ca la punctul a) rezultă numai cazul $\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{4}\right]=2\Rightarrow x\in\left[\frac{5}{2},\frac{11}{4}\right)$.

Cazul $\left|\left[x+\frac{1}{4}\right]-\left[x-\frac{1}{2}\right]\right|=1$ nu poate avea loc.

c) Evident că ecuația nu are soluții negative și nici pentru $x\in(0,1]$ ecuația nu poate fi verificată. Prin urmare, $x>1$ și cum

$\left|\frac{12}{x}-\frac{11}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<1\Rightarrow\left|\left[\frac{12}{x}\right]-\left[\frac{11}{x}\right]\right|\in\{0,1\}$.

Dar $\left[\frac{11}{x}\right]\leq\left[\frac{12}{x}\right]$, unde egalitatea nu poate avea loc deoarece membrul drept este număr impar. Prin urmare, avem $\begin{cases}\left[\frac{11}{x}\right]=6\\ \left[\frac{12}{x}\right]=7\end{cases}\Rightarrow x\in\left(\frac{11}{7},\frac{12}{7}\right]$.

149***. Soluția 1

Fie $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k\Rightarrow\left[x+\frac{1}{3}\right]=1-k\Rightarrow k\leq x+\frac{1}{2}<k+1\Rightarrow$

$k-\frac{1}{2}\leq x<k+\frac{1}{2}$

și $1-k\leq x+\frac{1}{3}<2-k\Rightarrow\frac{2}{3}-k\leq x<\frac{5}{3}-k\Rightarrow\begin{matrix}k-\frac{1}{2}\leq x<k+\frac{1}{2}\\ k-\frac{5}{3}<-x\leq k-\frac{2}{3}\end{matrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{matrix}2k<\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\\ 2k>\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}k<\frac{13}{12}\\ k>\frac{1}{12}\end{matrix}\Rightarrow k=1\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$ și $\left[x+\frac{1}{3}\right]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 1\leq x+\frac{1}{2}<2$ și $0\leq x+\frac{1}{2}<1\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\cap\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

Soluția 2

Deoarece $\left|x+\frac{1}{2}-x-\frac{1}{3}\right|<1\Rightarrow\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-\left[x+\frac{1}{3}\right]\right|\in\{0,1\}$.

Cazul $\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{3}\right]$ nu se poate rezolva.

Cazul $\left[x+\frac{1}{3}\right]+1=\left[x+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}\left[x+\frac{1}{3}\right]=0\\ \left[x+\frac{1}{2}\right]=1\end{cases}\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 3

Fie $\left[x+\frac{1}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left[x+\frac{1}{3}\right]=1-k$ și prin urmare $x\in\left[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)$ și $x\in\left[\frac{2}{3}-k,\frac{5}{3}-k\right)\Rightarrow x\in S=\left[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\cap\left[\frac{2}{3}-k,\frac{5}{3}-k\right)$.

Pentru $k\geq 2$ sau $k\leq 0\Rightarrow S=\emptyset$.

Pentru $k=1\Rightarrow S=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

150**. a) Notăm $\frac{1}{x}=y\Rightarrow[y]+[-y]=-1\Rightarrow k-k-1=-1$.

Dacă $y=k+t,k\in\mathbb{Z},t\in[0,1)\Rightarrow x=\frac{1}{k+t},k\in\mathbb{Z},t\in(0,1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}^*-\left\{\frac{1}{k},k\in\mathbb{Z}^*\right\}$.

Astfel, dacă $\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{1}{k},k\in\mathbb{Z}^*$, ecuația devine $k-k=-1$,

deci $x\in\mathbb{R}^*-\left\{\frac{1}{k},k\in\mathbb{Z}^*\right\}$ și avem:

$\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\Rightarrow-\left[\frac{1}{x}\right]-1<-\frac{1}{x}\leq-\left[\frac{1}{x}\right]\Rightarrow\left[\frac{1}{x}\right]+\left[-\frac{1}{x}\right]=-1$.

Așadar, $x\in\mathbb{R}^*-\left\{\frac{1}{k},k\in\mathbb{Z}^*\right\}$.

b) Ecuația devine:

$\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]+\left(-\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=1\Rightarrow$

$\left[\frac{1}{x}\right]+\left[-\frac{1}{x}\right]=-1$, deci este echivalentă cu a).

G.M. nr. 1/2008

151. Notăm $x=k+t,k\in\mathbb{N},t\in[0,1)\Rightarrow$

$4\left[2k+2t-\frac{1}{3}\right]-[3(k+t)]+1=-5,5k+4\left[2t-\frac{1}{3}\right]-3k-[3t]=-6,$

$5k+4\left[2t-\frac{1}{3}+1\right]-[3t]=-2,\qquad 5k+4\left[2t+\frac{2}{3}\right]-[3t]=-2.$

Considerăm cazurile:

a) $t\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\Rightarrow[3t]=0\Rightarrow\left[2t+\frac{2}{3}\right]\in\{0,1\}\Rightarrow k\notin\mathbb{Z}$;

b) $t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow\left[2t+\frac{2}{3}\right]=1$ și $[3t]=1\Rightarrow 5k+41-1=-2\Rightarrow k=-1$

$\Rightarrow x=-1+t,t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x\in\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=S_1$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \left[2t + \frac{2}{3}\right] = 2, [3t] = 2 \Rightarrow 5k + 8 - 2 = -2 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}.$

Rezultă $S = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

152**. a) Ecuația se mai scrie:

$\left(\sqrt{x} - 2 - 1\right)^2 + \left[x - \frac{2010}{671}\right]^2 = 0 \Rightarrow x = 3$, soluție unică.

b) Ecuația devine

$$\left[-\left[\frac{x-2}{3}\right]\right] = \frac{1-5x}{5} - \left[\frac{x-2}{5}\right] = \frac{1-5x}{5} \Rightarrow \left[\frac{x-2}{5}\right] = \frac{5x-1}{5} \qquad (*).$$

Notăm $\frac{5x-1}{5} = k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5k-1}{5}$ și ecuația $(*)$ devine:

$$\left[\frac{5k-9}{15}\right] = k \Rightarrow k \in \{1,2\} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{4}{5}, -\frac{9}{5}\right\}.$$

Emil Runceanu, S.G.M. nr. 9/2014

153***. a) Evident $x \neq 2$ și ecuația se mai scrie:

$$\frac{|x|^2}{|x-2|} - |x| = 0 \Leftrightarrow |x|\left(\left|\frac{x}{x-2}\right| - 1 - \frac{2}{x-2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow |x| = 0 \text{ sau } \left|\frac{x}{x-2}\right| = \frac{x}{x-2} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty) = S.$$

Concurs „Radu Miron", 1999

b) Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in [0,1)$, deci

$$\frac{1}{1-k} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0,2\} \Rightarrow \left[\frac{1}{1-x}\right] = 1.$$

Pentru $k = 0 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) = S_1$.

Pentru $k = 2 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2,3) = S_2 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup [2,3)$.

Nicolae Stanciu, R.M.C.S. nr. 5/2011, R.M.C.S., 2012

c) Notăm $[x] = k$ și $\{x\} = t \in [0,1), x = k + t$.

Avem $\frac{x}{x+4} = \frac{5k-7}{7k-5} \Rightarrow x = \frac{10k-14}{k+1} \Rightarrow t = \frac{-k^2+9k-14}{k+1} \in [0,1)$,

de unde rezultă $k \in \{2,6,7\} \Rightarrow x \in \left\{2,7,\frac{46}{7}\right\}$.

Concurs Cehia 2004-2005

d) Evident, orice $x \in \mathbb{Z}$ verifică ecuația.

Fie $x \notin \mathbb{Z}$, iar ecuația devine:

$$\{x\} + \frac{2}{2x-1} - \frac{2}{2[x]-1} = 0 \Rightarrow \{x\}\left(1 - \frac{4}{(2x-1)(2[x]-1)}\right) = 0$$

și cum $\{x\} \neq 0 \Rightarrow (2x-1)(2[x]-1) = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că pentru $[x] \geq 2$ sau $[x] \leq -2$ membrul stâng este mai mare decât 4, deci $[x] \in \{-1,0,1\}$. Considerând fiecare dintre cele trei cazuri, rezultă că numai pentru $[x] = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$ este soluție.

Concurs Rusia

154**. a) Notăm $\left[\frac{x}{2}\right] = n \Rightarrow \{4x\} = 4\sqrt{5} - 7 - n \Rightarrow 0 \leq 4\sqrt{5} - 7 - n < 1$
$\Rightarrow 4\sqrt{5} - 8 \leq n < 4\sqrt{5} - 7 \Rightarrow 1 \leq n < 2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow x \in [2,4)$.
$\{4x\} = 4(\sqrt{5} - 2) \in (0,1) \Rightarrow \{4(k+t)\} = 4(\sqrt{5} - 2) \neq \{4t\} = 4(\sqrt{5} - 2)$
ș.a.m.d.

b) Deducem $[5x^3] = 1$ (1) și $\{2x^2\} = 3 - \sqrt{5}$ (2).

$1 \leq 5x^3 < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{25}} \leq 2x^2 < \sqrt[3]{\frac{4}{25}} \Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt[3]{5} \leq 2x^2 < \frac{2}{5}\sqrt[3]{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow [2x^2] \in \{0,1\}$.

Dacă $[2x^2] = 0 \Rightarrow 2x^2 = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
Atunci $x^3 = \sqrt{5} - 2$ și condiția $1 \leq 5x^3 < 2$ este verificată.
Dacă $[2x^2] = 1 \Rightarrow 2x^2 = 4 - \sqrt{5} \Rightarrow 5x^3 > 3{,}6$, în contradicție cu (1).
Prin urmare, $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ este soluție.

Concurs „Unirea", 2009

155***. Dacă $x \leq 0$, membrul stâng este negativ, iar cel drept este mai mare decât 1. Fie $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $x = k + t$, unde $t \in [0,1)$. Ecuația devine:
$2k + \left[t + \frac{1}{2}\right] = [x^2] + 1$. Avem $\left[\frac{2(k+t)}{2} + 1\right] = \left[k + t + \frac{1}{2}\right] = k + \left[t + \frac{1}{2}\right]$.
Dacă $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left[\frac{2x+1}{2}\right] = k \Rightarrow x = k + t \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right)$, ecuația devine
$[x^2] = 2k - 1 \Rightarrow k^2 \leq [x^2] = 2k - 1 < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = 1, k = 1 \Rightarrow x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.
Dacă $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \left[\frac{2x+1}{2}\right] = k + 1 \Rightarrow x = k + t \in \left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right)$ și
ecuația devine: $[x^2] = 2k \Rightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \leq [x^2] = 2k < (k+1)^2 \Rightarrow$
$k = 0$ sau $k = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ sau $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$. Așadar, soluțiile sunt $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

Costică Grigoriu, O.L. Neamț, 2006

Scanned with OKEN Scanner

156*. Avem $[x+3]+[3x]+[x]-([2x]+5)=4 \Rightarrow 2[x]-[2x]+[3x]=$ $=6$.

Pentru $x=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$ rezultă $2k-2k-[2t]+3k+[3t]=6$ $[3t]-[2t]=6-3k \quad (*)$.

Dacă $t\in\left[0,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow k=2 \Rightarrow x=2+t \Rightarrow x\in\left[2,\frac{7}{3}\right)=S_1$.

Dacă $t\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$, ecuația $(*)$ devine $1-0=6-3k \Rightarrow k\notin\mathbb{Z}$ numai pentru $t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, iar dacă $t\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ ecuația $(*)$ devine $1-1=6-3k \Rightarrow k=2$ $\Rightarrow x\in\left[\frac{5}{2},\frac{8}{3}\right)=S_2$.

Dacă $t\in\left[\frac{2}{3},1\right)$, ecuația $(*)$ devine $2-1=6-3k \Rightarrow k\notin\mathbb{Z}$.

Rezultă $x\in\left[2,\frac{7}{3}\right)\cup\left[\frac{5}{2},\frac{8}{3}\right)=S_1\cup S_2$.

157*. Din ecuație rezultă $x\geq 0$ și evident $x=0$ verifică.

Notăm $x=k+t, k\in\mathbb{N}, t\in[0,1)$. Ecuația devine:

$$\left\{\frac{k+t}{2}\right\}+t+\{2k+2t\}=k+t \Leftrightarrow \left\{\frac{k}{2}+\frac{t}{2}\right\}+t+\{2t\}=k+t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{k}{2}+\frac{t}{2}\right\}+t+\{2t\}=k\in[0,2) \Rightarrow k\in\{0,1\}.$$

Dacă $k=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=0$. Dacă $k=1$ $\left\{\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right\}+\{2t\}=1$.

Pentru $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{t}{2}+2t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{6}{5}$.

Pentru $t\in\left[\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow 1=\left\{\frac{1}{2}+\frac{t}{2}\right\}+\{2t\}=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}+\{2t-1\}=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{t}{2}+2t-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5t}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow t=\frac{3}{5}\in\left[\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow x=k+t=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}. \text{ Așadar, } x\in\left\{0,\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right\}.$$

158.** a) Utilizăm relația $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=\{x\}=[x] \Rightarrow x=0$.

b) Ecuația se mai scrie

$$x([x]+\{x\})+\{x\}(x-\{x\})+\frac{5}{4}=0 \Rightarrow x^2+x\{x\}+\frac{5}{4}-\{x^2\}=0$$

cu discriminantul $\Delta=\{x^2\}+4\{x^2\}-5<0$, deci ecuația nu are soluții.

Mariana Mărculescu, R.M., 2013

Scanned with OKEN Scanner

159**. Cum $x^2 = [x^2] + \{x^2\} = b + a, b \in k, a \in [0,1)$. Ecuația devine:
$\{x^2\}(1 + [x^2]) = 2(1 - a - b)(1 - 1 - [x^2])$
$a(1 + b) = 2(1 - a - b)(-b) = 2b(a + b - 1) \Rightarrow$
$(b - 1)(2b - a) = 0 \Rightarrow 2b - a = 0$
$2b = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow x = 0$ și $b = 1 \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \Rightarrow 1 \leq |x| < \sqrt{2} \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$.
Prin urmare, $x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}) \cup \{0\}$.

Petru Vlad, R.M.T., 2011

160**. Rezultă că $\left\{\frac{2x-1}{3}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\frac{2x-1}{3}\right\} = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3k+1}{2}$. Introducând în ecuație, rezultă $\left[\frac{3k+1}{2}\right] = \frac{3k+1}{2}$,
$\frac{3k+1}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow k$ *impar*, adică $k = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$, deci
$x_p = \frac{3(2p+1)+1}{2} = 3p + 2, p \in \mathbb{Z}$.

161*. <u>Soluția 1</u>
Utilizând identitatea lui Hermite rezultă:
$[x^2] + [2x] - [x] = [2\sqrt{x}] \Rightarrow [x^2] + [2x] = [x] = [2\sqrt{x}]$ (1)
$\Rightarrow x^2 - 1 + 2x - 1 < [x^2] + [2x] = [x] = [2\sqrt{x}] \leq x + 2\sqrt{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + x \leq 2(1 + \sqrt{x})$ cu notația; $\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = t^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^4 + t^2 \leq 2(1 + t) \Rightarrow t \in [0,1) \Rightarrow x \in [0,1)$. Evident $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

<u>Soluția 2</u>
Din (1) rezultă $f(x) = f(\sqrt{x})$.
Dacă $x > 1 \Rightarrow x > \sqrt{x} \Rightarrow f(x) > f(\sqrt{x})$ deci $x \in [0,1)$. Atunci
$x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) = S$.

162*. Rezultă că $\left|\frac{4[x]}{3}\right| \in \mathbb{N} \Rightarrow [x] = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3k + t, t \in [0,1)$
$\Rightarrow \left|\frac{4 \cdot 3k}{3}\right| = 4|k|$, membrul stâng devine $\left[\frac{4|3k+t|}{3}\right] = 4|k|$ (*).
Dacă $k \leq 0 \Rightarrow \left[\frac{4(-3k-t)}{3}\right] = -4k \Rightarrow -4k + \left[-\frac{4t}{3}\right] =$
$= -4k \Rightarrow 0 \leq -\frac{4t}{3} < 1 \Rightarrow t = 0$ deci $x = 3k, k \in Z_-$. Dacă $k > 0$, atunci relația (*) devine:
$\left[\frac{4(3k+t)}{3}\right] = 4k \Leftrightarrow 4k + \left[\frac{4t}{3}\right] = 4k \Rightarrow 0 \leq \frac{4t}{3} < 1 \Rightarrow 0 \leq t < \frac{3}{4} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x = 3k + t, y \in \left(0, \frac{3}{4}\right] \Rightarrow x \in \left[3k, 3k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbb{N}.$

Prin urmare, dacă $x \leq 0 \Rightarrow x = 3k, k \in \mathbb{Z}_-$, iar dacă $x \geq 0 \Rightarrow$ $x \in \left[3k, 3k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbb{N}.$

C.D.P.

163. a) Notăm $[x + 2] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x + 3\} = t \in [0,1)$. Ecuația devine:

$k + t + kt = 4 \Rightarrow k \neq -1 \Rightarrow t = \frac{4 - k}{k + 1} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{2,3,4\}.$

Rezultă perechile $(k, t) \in \left\{\left(2, \frac{2}{3}\right), \left(3, \frac{1}{4}\right), (4,0)\right\}$ și

$$1) \begin{cases} [x + 2] = 2 \\ \{x + 3\} = \frac{2}{3} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} [x + 2] = 3 \\ \{x + 3\} = \frac{1}{4} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} [x + 2] = 4 \\ \{x + 3\} = 0 \end{cases}$$

Din 1) $\Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow 3 \leq x + 3 < 4 \Rightarrow [x + 3] = 3$ și din $x + 3 = \frac{2}{3} \Rightarrow$ $x = \frac{2}{3}$. Prin urmare, $x_1 = \frac{2}{3}$.

Din 2) $\Rightarrow 3 \leq x + 2 < 4 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow 4 \leq x + 3 < 5 \Rightarrow [x + 3] = 4.$

Atunci din 2) rezultă $x + 3 - [x + 3] = \frac{1}{4} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4}.$

Din 3) $\Rightarrow [x + 2] = 4 \Rightarrow 4 \leq x + 2 < 5 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow 5 \leq x + 3 < 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow [x + 3] = 5$ și $\{x + 3\} = 0 \Rightarrow x_3 = 2$

$x \in \left\{\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, 2\right\}.$

Dinicu Budescu, G.M. nr. 7-8/1997

b) Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:

$t^2(2k + t)^2 + k^2(2t + k)^2 - 2t^2k^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^4 + 4kt^3 + 4k^2t^2 + 4k^2t^2 + 4tk^3 + k^4 - 2t^2k^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^4 + k^4 + 2k^2t^2 + 4k^2t^2 + 4kt(t^2 + k^2) = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k^2 + t^2)^2 + 4kt(k^2 + t^2) + 4k^2t^2 = (k^2 + t^2 + 2kt)^2 =$

$= (k + t)^4 = x^4 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$

Revista „Tangenta", Grecia

c) Avem $2\left[\frac{[x]}{2} + \{x\}\right] + \frac{[x]}{2} + \{x\} - \left[\frac{[x]}{2} + \{x\}\right] = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\frac{[x]}{2} + \{x\}\right] = \frac{[x]}{2} = k \Rightarrow [x] = 2k.$

Ecuația devine: $[k + \{x\}] = k \Rightarrow$ adevărată.

Așadar, din $[x] = 2k, x = 2k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow x \in [2k, 2k + 1) \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k+1)$.

Aurel Doboșan, Revista Arhimede, 2001

164**. a) Evident $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.
Ecuația devine: $k - 1 = \frac{2}{t} > 2 \Rightarrow k > 3 \Rightarrow k \geq 4 \Rightarrow t = \frac{2}{k-1} \Rightarrow x = k + \frac{2}{k-1}$, cu $k \geq 4, k \in \mathbb{N}^*$.

G.M. nr. 12/1983

b) Evident $x \neq 0$ și $x \notin \mathbb{Z}$. Notăm $[x] = k, \{x\} = t \in [0,1)$.
$\frac{2}{t} = \frac{4}{k} + \frac{5}{k+t} \Leftrightarrow (t+2)(4t-k) = 0 \Rightarrow t = \frac{k}{4} \Rightarrow k \in \{1,2,3\} \Rightarrow$
$x \in \left\{\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right\}$.

c) Evident $x \notin \mathbb{Z} \cup [0,1)$.
Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$. Ecuația devine:
$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = k + t \Rightarrow k^2 + kt + t^2 = 0$, care nu are soluție.

d) Pentru existența ecuației se impun condițiile: $[x] \neq 0, \{x\} \neq 0 \Rightarrow x \notin [0,1)$ și $x \notin \mathbb{Z}$. Dacă $x = [x] + \{x\} = m + t, m \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, ecuația se scrie
$m + t = \frac{1}{m} + \frac{1}{t} \Leftrightarrow (m+t)(mt-1) = 0$ și cum $m + t \neq 0 \Rightarrow mt = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{Z}^*$, deci $x = m + \frac{1}{m}$, unde $m \in \mathbb{Z}^*$.

e) Evident $x \notin \mathbb{Z} \cup [0,1)$. Fie $x = k + t$, unde $k = [x] \in \mathbb{Z}, t = \{x\} \in$
$\in [0,1)$ și ecuația devine: $t^2 + kt - k^2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{k}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.
Dacă $t_1 = \frac{k}{2}(-1-\sqrt{5}) \notin (0,1), \forall\, k \in \mathbb{Z}^*$ și $t_2 = \frac{k}{2}(-1+\sqrt{5}) \in (0,1)$, doar pentru $k = 1$ și $t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (se pot da și alte soluții).

f) $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\{x\}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} \leq 1, [x] \leq x < [x]+1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{[x]}$
și $\frac{2}{x} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow [x] \in \{2,3\}$.
Dacă $[x] = 2 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = 2$
Dacă $[x] = 3 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1+\sqrt{7}$ $\Rightarrow x \in \{2, 1+\sqrt{7}\}$.

g) Evident $x \neq 0, x \notin \mathbb{Z}$ și x nu poate fi negativ. Rezultă:
$[x](x^2 - x[x] - 1) = 0 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1) = S_1$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $x^2 - x[x] - 1 = 0 \Rightarrow x \notin [0,1)$. Fie $[x] = k \in \mathbb{Z}, \{x\} = t \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2} \Rightarrow x_k = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}, k \in \mathbb{N}^*.$

Așadar, $x \in (0,1) \cup \left\{\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

h) Evident $x \notin [0,1)$ și $x \notin (-\infty, 0)$ și nici $x \notin [1,2)$, întrucât membrul stâng este mai mare ca 1 și cel drept este mai mic ca 1. Fie $x = k + t$ și ecuația

devine: $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k + [2t]} = t \qquad (*)$.

Cazul I: $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right)$, atunci $(*)$ devine $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k} = t \Rightarrow t = \dfrac{3}{2k} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow k > 3$, deci $k \geq 4$ și $x = k + \dfrac{3}{2k}$ care verifică ecuația.

Cazul II: $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$, atunci $(*)$ devine $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k+1} = t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{3k+1}{k(k+1)} \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2 \Rightarrow t = \dfrac{7}{10} \Rightarrow x = 2 + \dfrac{7}{10} = 2{,}7.$

i) Evident $x \in [0,1)$. Notând $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in [0,1)$, ecuația devine: $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k} = t + \dfrac{1}{3} \Rightarrow t = \dfrac{9-2k}{6k} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{2,3,4\}$.

Pentru $k = 2 \Rightarrow t = \dfrac{5}{2} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2 + \dfrac{5}{12} = \dfrac{29}{12}$.

Pentru $k = 3 \Rightarrow t = \dfrac{1}{6} \Rightarrow x = 3 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{6}$.

Pentru $k = 4 \Rightarrow t = \dfrac{1}{24} \Rightarrow x = 4 + \dfrac{1}{24} = \dfrac{97}{24}$.

Dacă $t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)$, ecuația devine $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k+1} = t + \dfrac{1}{3}, t = \dfrac{-2k^2+8k+3}{3k(2k+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{-2k^2+8k+3}{3k(2k+1)} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{10k^2-13k-6}{6k(2k+1)} \leq 0$ și $\dfrac{-8k^2+5k+3}{3k(2k+1)} < 0.$

Evident $k(2k+1) > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, deci $10k^2 - 13k - 6 \leq 0$ și $-8k^2 + 5k + 3 < 0$, care nu are soluții întregi.

Așadar, $x \in \left\{\dfrac{29}{12}, \dfrac{19}{6}, \dfrac{97}{24}\right\}$.

Concurs Rusia, 2013

Scanned with OKEN Scanner

j) Soluția 1

Evident $x \notin \mathbb{Z} \cup [0,1)$ și x nu poate fi negativ (membrul stâng ar fi pozitiv și cel drept ar fi negativ). Așadar, $x > 1$. Avem

$$\frac{8}{t} = \frac{9}{k+t} + \frac{10}{k} \Rightarrow 10t^2 - 11kt - 8k^2 = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{8k}{5} \text{ și } t_2 = \frac{k}{2}.$$

Cum $k \geq 1 \Rightarrow k = 1, t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Soluția 2

$\frac{8}{\{x\}} > 8 \Rightarrow \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]} > 8$ și pentru $x \geq 3$ nu avem soluție.

Considerăm cazurile: $x \in (1,2), x \in (2,3)$.

Cazul $x \in (1,2) \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow \{x\} = x - 1 \Rightarrow \frac{8}{x-1} = \frac{9}{x} + 10 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Cazul $x \in (2,3) \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow \{x\} = x - 2$ și atunci ecuația devine $\frac{8}{x-2} = \frac{9}{x} + 5$, care nu are soluție.

Universitatea Lomonosov, 1998

k) Evident $x \notin [0,1)$ și cum membrul stâng este pozitiv rezultă că și membrul drept trebuie să fie pozitiv, deci $x \geq 1$ și cum $x \notin \mathbb{N}^*$ (pentru că membrul drept este strict pozitiv și cel stâng este egal cu 0), prin urmare $x \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N} \cup [0,1)$.

Fie $x = k + t, k \in \mathbb{N}^*$ și $t \in [0,1)$. Atunci ecuația se mai scrie:

$t = \frac{2k(k+t)}{2k+t} \Rightarrow t^2 = 2k^2$, fals. Deci, ecuația nu are soluție.

Dorin Mărghidan, Cardinal, 2002-2003

165*. a) Evident $x \in [0,4]$ și $x\sqrt{2} = k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \frac{k\sqrt{2}}{2}$ și atunci ecuația devine: $\left[\frac{2}{3}\sqrt{2k\sqrt{2} - \frac{2k^2}{4}}\right] = k \Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}\sqrt{8k\sqrt{2} - 2k^2}\right] = k$.

Din $x \in [0,4] \Rightarrow k = \{0,1,2,3,4,5\}$ și ultima egalitate se verifică pentru $k \in \{0,1\} \Rightarrow x \in \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

C.D.

b) Ecuația se mai scrie $\left[\left\{\frac{k}{3}\right\} + \frac{2}{3}\right] = \begin{cases} 0, & 0 \leq \left\{\frac{x}{3}\right\} < \frac{1}{3} \\ 1, & \frac{1}{3} \leq \left\{\frac{x}{3}\right\} < 1 \end{cases}$ și atunci ecuația devine: $\sqrt{5x^2 + 6x} = 0$ și $x = 0$ este soluție.

Scanned with OKEN Scanner

$x=-\frac{6}{5}$ nu este soluție, deoarece $\left\{-\frac{6}{5}\right\}=\left\{\frac{4}{5}\right\}\notin\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

Din $\sqrt{5x^2+6x}=1\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+\sqrt{14}}{5} & \text{cu } \{x_1\}\notin\left[\frac{1}{3},1\right)\\ x_2=\dfrac{-3-\sqrt{14}}{5} & \text{cu } \{x_2\}=0{,}63\in\left[\frac{1}{3},1\right)\end{cases}$.

Așadar, soluțiile sunt $S=\left\{0,\frac{-3-\sqrt{14}}{5}\right\}$.

Dan Popescu, Baraj Vrancea

166*. Evident $x\geq 0$ și $x=0$ verifică.

Fie $x\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\sqrt[4]{x}\Rightarrow x=k^4, k\in\mathbb{N}$.

Fie $x\in(k,k+1), k\in\mathbb{N}\Rightarrow\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}\leq\sqrt{[\sqrt{x}]}$ și avem

$0<\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}\leq\sqrt{[\sqrt{x}]}\Rightarrow 4\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{k}+\sqrt{k}\leq[\sqrt{x}]\leq\sqrt{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{k}+\sqrt{k}\leq 0\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot 4\sqrt{k}\leq\sqrt[4]{x}\leq\sqrt[4]{k}$.

Notând $\sqrt[4]{x}=t\Rightarrow 3t^2-4t\sqrt[4]{k}+\sqrt{k}\leq 0\Rightarrow\sqrt{k}\leq\sqrt[4]{x}\Rightarrow$
$x\leq k$, contradicție. Prin urmare, $x\in S=\{k^4, k\in\mathbb{N}\}$.

Dana Heuberger, Argument 15

167. Evident $x\geq 0$ și dacă notăm cu $a=[\sqrt{x}]-3\{\sqrt[3]{x}\}$ se impune $a\geq 0$ și ecuația devine: $\sqrt{a+1}-1+\sqrt[3]{a+8}-2+\sqrt[4]{a}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{a}{\sqrt{a+1}+1}+\frac{a}{\sqrt[3]{(a+8)^2}+2\sqrt[3]{a+8}+4}+\sqrt[4]{a}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt[4]{a}\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a+1}+1}+\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[3]{(a+8)^2}+2\sqrt[3]{a+8}+4}+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt[4]{a}=0\Rightarrow a=0,[\sqrt{x}]=3\{\sqrt[3]{x}\}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[\sqrt{x}]=3\{\sqrt[3]{x}\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{\sqrt[3]{x}\}\in\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$.

Considerăm cazurile:

a) $\begin{cases}\{\sqrt[3]{x}\}=0\\ [\sqrt{x}]=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{x}=k\\ x\in[0,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=k^3\\ x\in[0,1)\end{matrix}\Rightarrow x=0;$

b) $\begin{cases}[\sqrt{x}]=1\\ \{\sqrt[3]{x}\}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}\in[1,2)\\ \sqrt[3]{x}=k+\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[1,4)\\ x=\left(k+\frac{1}{3}\right)^3\end{cases}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 1 \le \left(k+\frac{1}{3}\right)^3 < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \le k+\frac{1}{3} < \sqrt[3]{4} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{64}{27}$;

c) $\begin{cases} [\sqrt{x}] = 2 \\ \{\sqrt[3]{x}\} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \in [2,3) \\ \sqrt[3]{x} = k+\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [4,9) \\ x = \left(k+\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases} \Rightarrow$

$4 \le \left(k+\frac{2}{3}\right)^3 < 9 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{125}{27}$. Prin urmare, $x \in \left\{0, \frac{64}{27}, \frac{125}{27}\right\}$.

Concurs Croaţia, 2011

168**. Evident $x \ge 1$. Notăm $[x] = k \ge 1$.

$\frac{1}{2k\sqrt{k}} + \frac{1}{3(k+1)\sqrt[3]{k}} = \frac{2}{k(k+2)}$. Avem $\frac{1}{2k\sqrt{k}} \ge \frac{1}{2k \cdot \frac{k+1}{2}} = \frac{1}{k(k+1)}$

$\frac{1}{3(k+1)\sqrt[3]{k}} \ge \frac{1}{3(k+1) \cdot \frac{k+1+1}{3}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\frac{2}{k(k+2)} \ge \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

care se realizează ca egalitate, pentru $k = 1$, deci $x \in [1,2)$.

Daniel Jinga, R.M.T. nr. 1/2003, Concursul „Recreaţii Matematice", 2003

169**. Cazul $x \ge 1$. Ridicând ambii membri la pătrat se obţine:

$x + [x] + x + \{x\} + 2\sqrt{x + [x](x + \{x\})} =$

$= x + [x]\{x\} + x + 1 + 2\sqrt{(x + [x]\{x\})(x + 1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ([x] - 1)(1 - \{x\}) = 2\sqrt{(x + [x]\{x\})(x + 1)} - \sqrt{(x + [x])(x + \{x\})}.$

Dar cum $1 - \{x\} \ge 0, [x] - 1 \ge 0$ şi

$\sqrt{(x + [x]\{x\})(x + 1)} \ge \sqrt{(x + [x])(x + \{x\})} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x + x[x]\{x\} + [x]\{x\} \ge x^2 + [x] \cdot x + \{x\} \cdot x + [x]\{x\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + [x]\{x\} \ge [x] + \{x\} \Leftrightarrow (1 - [x])(1 - \{x\}) \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 - [x])(1 - \{x\}) = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x \in [1,2).$

Cazul $x \in (0,1) \Rightarrow [x] = 0$ şi $\{x\} = x$, deci ecuaţia nu are soluţie în acest caz.

Prin urmare, $x \in [1,2)$.

Dan Popescu, R.M.T., 2008

170**. a) Din $\{x\} = \left\{\frac{x^2}{2}\right\}$ rezultă că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{x^2}{2} - x = k$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 2k = 0 \Rightarrow x^2 = 2x - 2k \ (1) \Rightarrow x^3 = (2k+4)x + 4k \ (2).$

Scanned with OKEN Scanner

Din $\left\{\frac{x^2}{2}\right\}=\left\{\frac{x^3}{3}\right\}$ rezultă că există $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}=m\Rightarrow$
$\Rightarrow x^3=3x^2+6m$ (3) și din (1) rezultă $x^3=6x+6k+6m$ (4).
Din (2) și (4) rezultă $2(k-1)x=2(k+3m)\Rightarrow(k-1)x=k+3m.$
Pentru $k\neq 1\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$. Din (1) rezultă $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{x^2}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{x^3}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$\Rightarrow x=6p, p\in\mathbb{Z}.$

Dana Heuberger, R.M. nr. 11/2009

b) Din $\{a\}=\{b\}\Rightarrow a-b\in\mathbb{Z}$. Avem $x^2-x=p\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2=x+p$
și cum $x^4-x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow(x+p)^2-x^2=2px+p^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2px\in\mathbb{Z}.$
Apar cazurile: $k=0\Rightarrow x\in(0,1)$, atunci $\{x\}=\{x^2\}=\{x^4\}\Rightarrow$
$x=x^2=x^4\Rightarrow\Rightarrow x\in\{0,1\}=S_1$ și din $2px\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}.$
Atunci $x^2-x-p=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4p}}{2}\in\mathbb{Q}$ și $\Delta=1+4p\geq 0\Rightarrow$
$p\in\mathbb{N}.\ 1+4p=(2q+1)^2\Rightarrow p=q(q+1)\Rightarrow x_1=-p, x_2=p+1.$
Prin urmare, $x\in\mathbb{Z}$.

Vasile Pop, Concursul „Alexandru Papiu-Ilarian", 2016

c) Din $\{x\}=\{x^2\}\Rightarrow x^2-x=a\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2=x+a$ (1)
și din $\{x\}=\{x^n\}\Rightarrow x^n-x=b\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^n=x+b$ (2).
Arătăm că $x\in\mathbb{Q}$. Presupunem că $x\notin\mathbb{Q}$ și atunci din (1) $\Rightarrow$
$x^3=x^2+ax\Rightarrow$
$x^3=(a+2)x+a$ (3). Prin inducție se deduce că $x^k=a_kx+b_k$,
cu $a_k, b_k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^{k+1}=a_{k+1}x+b_{k+1}$, cu $a_{k+1}, b_{k+1}\in\mathbb{Z}$. Avem
$x^{k+1}=x^k\cdot x=a_kx^2+b_kx=a_k(x+a)+b_kx=(a_k+b_k)x+a\cdot a_k\Rightarrow$
$\Rightarrow\begin{cases}a_{k+1}=a_k+b_k\\ b_{k+1}=a\cdot a_k\end{cases}\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, cu $a_2=1, b_2=a.$
Ecuația $x^2-x-a=0$ are rădăcini reale, rezultă $1+4a\geq 0, a\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$a\geq 0$. Dacă $a=0\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x\in\{0,1\}$, contradicție
cu presupunerea $x\notin 0$.
Fie $a>0\Rightarrow a_2>0, b_2>0$ și prin inducție rezultă a_k și $b_k>0\Rightarrow$
$a_{k+1}-a_k=>0$, deci șirul $\{a_k\}_{n\geq 1}$ este strict crescător.
Din ipoteza $x^n=x+b\Rightarrow x+b=a_nx+b_n$, cu $x\notin\mathbb{Q}$ și $a_n, b_n, b\in\mathbb{Z}\Rightarrow$
$a_n=1, b_n=1\Rightarrow a_2<a_3<a_4<\cdots<a_n=1\Rightarrow$ contradicție. Prin urmare,
$x\in\mathbb{Q}$ și rădăcina ecuației $x^2-x-a=0$ și este un număr întreg.

Laurențiu Panaitopol

171**. a) Evident $x\notin\mathbb{Z}$. Fie $x=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in(0,1)$ și atunci ecuația devine:
$\frac{k}{t}=\frac{2007(k+t)}{2008}\Rightarrow 2008=2007(kt+t^2)\Rightarrow k(2008-2007t)=2007t^2$

$\Rightarrow k \geq 1$ și din $2007t^2 + 2007tk - 2008k = f(t) = 0$.
Ecuația $f(t) = 0$ are două soluții reale ($\Delta > 0$) și de semne contrare,
$t_1, t_2 = -\frac{2008k}{2007}, t_1 + t_2 = -k$.
Pentru ca o rădăcină $t \in (0,1)$ se impune $f(1) > 0$ $(f(0) < 0)$, adică
$2007 - k > 0 1 \leq k < 2007$. Prin urmare, pentru fiecare
$k \in \{1,2,3, \ldots, 2006\}$ există câte o soluție $t_k \in (0,1)$, deci $x_k = k + t_k$. Avem 2006 soluții.

Mihail Bălună, Concursul „Gh. Myller", 2008

b) Soluția 1

Evident $x = 0$ verifică. Pentru $x > 0 \Rightarrow 0 \leq [x] \leq x, 0 \leq \{x\} < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]\{x\} < x < 2001x$, deci ecuația nu are soluție.
Pentru $x \leq -1 \Rightarrow 0 > [x] > x$ și $0 < \{x\} < 1 \Rightarrow [x]\{x\} > x - 1 > 2001x$, deci ecuația nu are soluție. Pentru $-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$ și $\{x\} = x + 1$ și ecuația
are forma $-x - 1 = 2001x \Rightarrow x = -\frac{1}{2002}$. Prin urmare, $x \in \left\{0, -\frac{1}{2002}\right\}$.

Soluția 2

Notăm $[x] = k$, de unde se deduce că $k \in \{-1,0\}$. Pentru $k = 0, t = 0$, $x_1 = 0$.
Pentru $k = -1 \Rightarrow t = \frac{2001}{2002} \Rightarrow x = k + t = \frac{1}{2002} \Rightarrow x \in \left\{0, -\frac{1}{2002}\right\}$.

Olimpiadă R. Moldova, 2001

c) Evident, se impune $x \geq 4$.
Ecuația se mai scrie: $16\left[\frac{x}{3}\right] = 21\left[\frac{x}{4}\right]$. Dar cum $(16,21) = 1$ și $\left[\frac{x}{3}\right], \left[\frac{x}{4}\right] \in \mathbb{N}^*$
rezultă $\begin{cases} \left[\frac{x}{3}\right] = 21k, \\ \left[\frac{x}{4}\right] = 16k, \end{cases} k \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21k \leq \frac{x}{3} < 21k + 1 \\ 16k \leq \frac{x}{4} < 16k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 63k \leq x < 63k + 3 \\ 64k \leq x < 64k + 4 \end{cases}$$

de unde rezultă $\begin{cases} 63k < 64k + 4 \\ 64k < 63k + 3 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{1,2\}$.
Pentru $k = 1 \Rightarrow 64 \leq x < 66 \Rightarrow x \in [64,66)$, iar pentru $k = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 128 \leq x < 199 \Rightarrow x \in [128,129)$
și, prin urmare, $x \in [64,66) \cup [128,129)$.

A. Kurciatov, 2013/2014

Scanned with OKEN Scanner

172*. Vezi identitatea $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}], \forall n \in \mathbb{N}$ și deci $x \in \mathbb{N}$ sunt soluții. Prin calcul rezultă:
$\sqrt{4x+1}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x}<\sqrt{4x+2}$ și $0<\sqrt{4x+2}-\sqrt{4x+1}<1$ (1).
Se impune să arătăm că $k \leq \sqrt{4x+1}<\sqrt{4x+2}<k+1, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ (2)
sau $k'-1<\sqrt{4x+1}<\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<k'<\sqrt{4x+2}$ (3).
Din (2) și (3) rezultă $x \in \left[\frac{k^2-1}{4}, \frac{(k+1)^2-2}{4}\right)$ și

$x \in \left(\left(\frac{k'^2-2}{4}\right), \left(\frac{k'^2-1}{4}\right)\right), k'>2.$

Olimpiadă Iran, 1999

173**. Fie $x=[x]+\{x\}=k+t,\ t \in [0,1), k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:
$k=-20t \Rightarrow k \in (-20,0]$. Cel mai mic întreg este $k=-19 \Rightarrow$

$t=\frac{19}{20}=0{,}95 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-18{,}05, x_{max}=0$, penultima soluție este $x_k=k-\frac{k}{20}=\frac{19k}{20}$,

$k \in \{0,-1,-2,-19\}, x_{min}=-\frac{19^2}{20}=-18{,}05$ și $x_{max}=0$.

Manuela Stroe, O.L. Olt, 2012

174*. Evident, $x=k+t,\ t \in [0,1)$ și $k \in \mathbb{N}^*$, k minim. Ecuația devine:
$t^2=\frac{2}{k^2+[2kt+t^2]}$ (*). Considerăm $k=1$ și ecuația (*) devine:

$t^2=\frac{2}{1+[t^2+2t]}$ și cum $t^2+2t \in (0,3)$, luăm

$[t^2+2t]=2 \Rightarrow t^2=\frac{2}{3} \Rightarrow t=\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow x_{min}=1+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

175. a) Evident $x \in [0,1)$. Ecuația devine: $[32x]=31x$.
Evident, $31x=k \Rightarrow x=\frac{k}{31} \Rightarrow \left[\frac{32k}{31}\right]=k \Leftrightarrow k \leq \frac{32k}{31}<k+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \in \{0,1,2,\ldots,30\}$, deci ecuația are 31 de soluții.

b) Avem $\{x\}=\frac{[x]}{\sqrt{2020}}<1$ și cum $\left[\sqrt{2020}\right]=44$
rezultă $[x] \in \{0,1,2,\ldots,44\}$. Prin urmare ecuația are 45 de soluții.

c) Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$.
Avem $1999\{x\}=x+[x] \Rightarrow 199t=2k+t \Rightarrow 1998t=2k \Rightarrow 999y=k \Rightarrow$
$\Rightarrow t=\frac{k}{999}, k=\overline{0{,}998}, x=k+t=\frac{1000k}{99}, k=\overline{0{,}998} \Rightarrow$ sunt 999 soluții.

Dorin Marghidan, G.M., 2001

Scanned with OKEN Scanner

176**. Evident $x \in \mathbb{N}^*$.

Dacă notăm $x = y + 2020$ (1), ecuația devine: $y = \left[\sqrt{y + 2020}\right]^2$ (2), deci y este pătrat perfect. Prin urmare (1) devine: $x = z^2 + 2020$, iar din (2) rezultă: $z = \left[\sqrt{z + 2020}\right] \Rightarrow z \leq \sqrt{z^2 + 2020} < z + 1 \Rightarrow z > 1009 \Rightarrow z \geq 1010$.

Cea mai mică valoare este $1010 \Rightarrow x = 1010^2 + 2020 = 1022120$.

177**. a) $[x] = \dfrac{x^3 + 2}{3} \Rightarrow x - 1 < \dfrac{x^3 + 2}{3} \leq x \Rightarrow x^3 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow$ $x \in (-\infty, -2] \cup \{1\}$ și $x^3 - 3x + 5 > 0$. Dacă $[x] = k \Rightarrow x^3 = 3x - 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \sqrt[3]{3k - 2}$ pentru $k \leq -2$ și $\left(\sqrt[3]{3k - 2}\right)^3 - 3\sqrt[3]{3k - 2} + 5 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k + 1 \geq \sqrt[3]{3k - 2} \Rightarrow k^3 + 3k^2 + 3 \geq 0, k \leq -2$.

Observăm că numai $k = -2$ și $k = -3$ verifică, de unde rezultă $x_1 = -2, x_2 = -\sqrt[3]{11}$ și evident $x_3 = 1$.

b) <u>Soluția 1</u>

Evident $x^3 - 3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \sqrt[3]{k}, k \in \mathbb{Z}$ și ecuația devine: $\left[2\sqrt[3]{k}\right] = k - 3, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k - 3 \leq 2\sqrt[3]{k} < k - 2 \Leftrightarrow$ $(k - 3)^3 \leq 8k < (k - 2)^3$,

de unde rezultă că numai $k = 6$ verifică, deci $x = \sqrt[3]{6}$.

<u>Soluția 2</u>

Observăm că pentru: $x < -1 \Rightarrow x^3 - 3 < 2x - 1 < [2x]$

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow x^3 - 3 < -3 < [2x]$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow x^3 - 3 < 0 \leq [2x]$

$1 \leq x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow x^3 - 3 < 2 \leq [2x]$

$\dfrac{3}{2} \leq x < 2 \Rightarrow [2x] = 3 \Rightarrow x^3 - 3 = 3, x^3 = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$

$x > 2 \Rightarrow [2x] \leq 2x < x^3 - 3$.

Așadar, soluția unică este $x = \sqrt[3]{6}$.

Concurs Ucraina, 1990

c) Ecuația devine $x^3 - x = 3 - \{x\} \in [2,3] \Rightarrow 2 < x^3 - x \leq 3$.

Avem situațiile:

Dacă $x \leq -1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) \leq 0$.

Dacă $-1 < x \leq 0 \Rightarrow x^3 - x < -x < 1$.

Dacă $x \in (0,1] \Rightarrow x^3 - x < x < 1$.

Dacă $x \geq 2 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2(2^2 - 1) = 6$.

Așadar, dacă $x \in [1,2) \Rightarrow [x] = 1$ și ecuația devine: $x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație:

1) Se poate constata că funcția $f(x)=x^3-[x]$ este strict crescătoare, deci ecuația are soluție unică $x=\sqrt[3]{4}$.

2) Din $2<x^3-x\leq 3\Rightarrow 0<x^3-x-2\leq 1$ $(*)$, dar ecuația $x^3-x-2=0$ are o singură soluție $x_0\in(1,2), f(1)<0, f(2)>0$. Soluțiile dublei inecuații sunt $S\subset[0,2)$, prin urmare $[x]=1\Rightarrow x^3=4\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\sqrt[3]{4}\in(1,2)$.

Olimpiadă Polonia, 1993, Concurs A.S.F. București, 2002

178**. a) Dacă $x<0\Rightarrow 3(x^3-1)=([x]+1)^2$, fals. Dacă $x\geq 2\Rightarrow$ $\Rightarrow x^3\geq x[x]^2>[x]^2, x^3>x[x]^2>x[x]>2[x]$ și $x^3>4\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x^3>[x]^2+2[x]+4$.

Dacă $x\in(0,1)\Rightarrow 3x^3=4\Rightarrow x^3=\frac{4}{3}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}>1$.

Dacă $x\in[1,2)\Rightarrow 3x^3=7\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{7}{3}}\in(1,2)$.

Petre Năchilă

b) Notăm cu $I_n=(n,n+1)$. Ecuația are soluția $x=0$.

1) Fie $x\in(n,n+1)=I_n, [x]=n\Rightarrow n(x^2+1)=x^3\Rightarrow$ $\Rightarrow x^3-nx^2-n=0$. Dar cum $f(x)=x^3-nx^2-n$ este strict crescătoare pe $I_n=(n,n+1)$, cu $f(n)<0$ și $f(n+1)>0$. Prin urmare, există o soluție unică în I_n.

2) Să presupunem că ecuația are o soluție rațională $x_0=\frac{p}{q}, (p,q)=1, q>1$ și cum $\frac{x^3}{x^2+1}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow x_0=\frac{p}{q}$ și avem $\frac{p^3}{q(p^2+q^2)}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow q|p^3\Rightarrow q|p$, absurd.

Concurs Țările Baltice, 2012

c) Notăm $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$. Ecuația se mai scrie: $(k+t)^3+0{,}999=3kt(k+t)\Rightarrow k^3+t^3=-0{,}999$ și cum $k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)\Rightarrow[k^3+t^3]=-1$ (1), $\{k^3+t^3\}=0{,}001$ (2). Din (1) rezultă $k^3+[t^3]=-1\Rightarrow k^3=-1\Rightarrow k=-1$ și din (2) rezultă $\{t^3\}=10^{-3}\Rightarrow t=\frac{1}{10}\Rightarrow x=k+t=-0{,}99$.

Marian Cucoaneș, R.M.T., 2014

d) Evident că rezultă $x^3\in[0,1)\Rightarrow x\in[0,1)$.

Avem $x^3=\{x^3+3x(x+1)\}=x^3+3x(x+1)-[x^3+3x(x+1)]\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x(x+1)=[x^3+3x(x+1)]\Rightarrow 3x(x+1)\in\mathbb{N}\Rightarrow 3x(x+1)=k$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x_k = \dfrac{\sqrt{9+12k}-3}{6} \in [0,1), k \in \{0,1,2,3,4,5\}.$

Olimpiadă Rusia, 1998

179**. a) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Ecuația se mai scrie:

$(x^2+x)^2 - 4(x^2+x) + 4 - 2 = k \Leftrightarrow (x^2+x-2)^2 = k+2 \geq 0$ (1)

$\Rightarrow k \geq -2$. Vom arăta că trebuie să avem $k \leq 1$. Dacă $k \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2+x-2)^2 > x^2+x-2 \geq x+2 \geq k+2$,

adică $(x^2+x-2)^2 > k+2$, de unde rezultă că $k \in \{-2,-1,0,1\}$.

Considerăm cazurile:

1) $k = -2$, atunci din (1) rezultă $x^2+x-2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$;

2) $k = -1$, atunci din (1) rezultă $x^2+x-2 = \pm 1$, care nu are soluție cu $[x] = -1$;

3) $k = 0$, atunci din (1) rezultă $(x^2+x-2)^2 = 2 \Rightarrow$

$x^2+x-2 = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ o singură soluție cu $[x] = 0, x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2}$;

4) $k = 1$, atunci din (1) rezultă $(x^2+x-2)^2 = 3 \Rightarrow$

$x^2+x-2 = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ o singură soluție cu $[x] = 1, x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2}$.

Prin urmare, $x \in \left\{-2, \dfrac{-1+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{9+4\sqrt{3}}}{2}\right\}$.

Ioan Bran, G.M. nr. 9/1993

b) Avem $\dfrac{1}{2}[x] + [x] + \{x\} = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + x \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}[x] + x = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + x$

$\Rightarrow [x] = x^4 - 2x^2 \Rightarrow 1 + [x] = (x^2-1)^2 = k+1, k \geq -1$.

Pentru $k = -1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = -1$ verifică.

Fie $1 + k > 0 \Rightarrow x^2 - 1 = \pm\sqrt{1+k}$, $x^2 = 1 \pm \sqrt{k+1} \Rightarrow$

$x = \sqrt{1 \pm \sqrt{k+1}}$ (1).

Pentru $k = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 0$ (deoarece $x \in [0,1)$), $x_3 = \sqrt{2}$.

Fie $k \geq 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1+k} < 0$ și $x = \sqrt{1+\sqrt{k+1}}$ (2)

și cum $x \in [k, k+1) \Rightarrow \sqrt{1+\sqrt{k+1}} \geq k$.

Din (1) rezultă $k = 1$, deoarece $k \geq 2$ membrul drept este mai mare decât 1.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k=1 \Rightarrow x_3=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Aşadar, $x \in \left\{0,-1,\sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$.

G.M. nr. 3/1998

c) Fie $x \in [1,2) \Rightarrow [(x-1)^3]=[x-1]^3=0$. Avem

$$0 \leq (x-1)(x-2)(x-3)=4(x-1)\cdot\frac{2-x}{2}\cdot\frac{3-x}{2} \leq$$

$$\leq \frac{4}{17}\left(x-1+\frac{2-x}{2}+\frac{3-x}{2}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow [(x-1)(x-2)(x-3)]=0.$$

Prin urmare, $x \in [1,2)$ sunt soluţii (se verifică faptul că $x=2$ nu este soluţie).

Fie $x \in (2,3] \Rightarrow [(x-1)^3] \geq 1$ în timp ce $[(x-1)(x-2)(x-3)] \leq 0$.

Fie $x \in (3,4] \Rightarrow [(x-1)^3] \geq 8$, iar $[(x-1)(x-2)(x-3)] \leq 6$.

Prin urmare, dacă $x \in [n,n+1), n \geq 4$ avem:

$[(x-1)^3] \geq (n-1)^3$ şi $[(x-1)(x-2)(x-3)] \leq n(n-1)(n-2)$,

iar $(n-1)^3 > n(n-1)(n-2)$. Aşadar, soluţiile sunt $S=[1,2)$.

Alexandru Blaga, Rev. Mat., 2014

d) Evident $[x] \neq 0 \Leftrightarrow x \notin [0,1)$. Fie $x \in [-1,0) \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3+2=-6 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=-8 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-2 \Rightarrow x=-1.$$

$$\text{Fie } x \geq 1 \Rightarrow x+\frac{1}{x} \geq [x]+\frac{1}{[x]} \Leftrightarrow \left(x-[x]\cdot\left(1-\frac{1}{x[x]}\right)\right) \geq 0.$$

$$\text{Rezultă } \left(x+\frac{1}{x}\right)^3+2 \geq \left([x]+\frac{1}{[x]}\right)^3+2 \Rightarrow$$

$$3\left([x]+\frac{1}{[x]}\right) \geq \left([x]+\frac{1}{[x]}\right)^3+2.$$

$$\text{Notăm } y=[x]+\frac{1}{[x]} \geq 2 \Rightarrow y^3-3y+2 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y+2) \leq 0, \text{ fals.}$$

Aşadar, singura soluţie este $x=-1$.

Gabriel Dospinescu, O.L. 2011

180**. a) Fie $x=[x]+\{x\}=m+\alpha, m=\overline{1,0-1}$ şi $0 \leq \alpha < 1$, pentru $x \in [1,n)$. Ecuaţia se mai scrie:

$$\{x^2\}=\{x\}^2 \Leftrightarrow \{(m+\alpha)^2\}=\alpha^2 \Rightarrow \{2m\alpha+\alpha^2\}=\alpha^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2m\alpha+\alpha^2-[2m\alpha+\alpha^2]=\alpha^2 \Rightarrow 2m\alpha$ întreg.

Ecuaţia devine: $[2m\alpha+\alpha^2]=2m\alpha$, unde α poate lua doar $2m$ valori, adică

$$\left\{\frac{k}{2m}, 0 \leq k \leq 2m-1\right\}.$$

Aşadar, pentru fiecare număr natural $m, 1 \leq m \leq n-1$, ecuaţia are $2m$ soluţii

Scanned with OKEN Scanner

pe intervalul $[m, m+1)$, adică $x = m + \frac{k}{2m} \in [m, m+1)$.

Prin urmare, numărul de soluții ale ecuației pe intervalul $[1, n]$ este egal cu

$$1 + 2(1 + 2 + \cdots + n - 1) = 1 + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2 - n + 1$$

(unde s-a numărat și soluția $x = n$).

Anglia, 1984, Iugoslavia, 1987, Olimpiadă Republica Moldova, 1999

b) Evident, toate numerele $\{1,2,3, \ldots, n-1\}$ verifică ecuația.

Fie $x = m + \alpha, m \in \{1,2,3, \ldots, n-1\}, \alpha \in (0,1)$ și atunci ecuația se mai scrie:

$$\{x^3\} = \{x\}^3 \Leftrightarrow \{(m+\alpha)^3\} = \alpha^3 \Rightarrow \{3m^2\alpha + 3m\alpha^2 + \alpha^3\} = \{\alpha^3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{3m\alpha(m+\alpha)\} = 0 \Rightarrow 3m\alpha(m+\alpha) = p \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha^2 + \alpha m = \frac{p}{3m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha m - \frac{p}{3m} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-m + \sqrt{m^2 + \frac{4p}{3m}}}{2} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{m^2 + \frac{4p}{3m}} < 2 + m \Leftrightarrow 4p < 12m(m+1) \Rightarrow p < 3m(m+1).$$

Numărul soluțiilor este dat de

$$\sum_{m=1}^{n-1} 3m(m+1) = 3\sum_{m=1}^{n-1} m^2 + 3\sum_{m=1}^{n-1} m =$$

$$= 3\frac{(n-1)n(m-1)}{6} + 3\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)(n+1) = n^3 - n \text{ soluții.}$$

Australia, 1992

181. a) Evident $x^6 - 1 \geq -1$ și $-\frac{9}{4}(x-1)^2 \leq 0$, deci

$$(x^6 - 1) = -\frac{9}{4}(x-1)^2 \in [-1,0].$$

Prin urmare, distingem cazurile:

$$1) \begin{cases} [x^6 - 1] = 0 \\ -\frac{9}{4}(x-1)^2 = 0 \end{cases} \text{ sau } 2) \begin{cases} [x^6 - 1] = -1 \\ -\frac{9}{4}(x-1)^2 = -1 \end{cases}.$$

Din 1) rezultă $x = 1$ și din 2) rezultă $x = \frac{1}{3}$, deci $x \in S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$.

b) Dacă $\{x\} = 0$, atunci ecuația are soluții, $x \in \mathbb{Z}$.

Dacă $[x] = 0$, atunci ecuația are soluții $x \in (0,1)$. Dacă $\{x\} \neq 0$, atunci ecuația

$$\{x\}^5 = x^5 - [x]^5 = (x - [x])(x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4) \Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \{x\}^4 = x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4 = E(n)$.
Dacă $[x] \neq 0$, atunci $E(1) = [x]^4 + F(n) > 1$. Așadar, $S = (0,1) \cup \mathbb{Z}$.

Ion Nedelcu, O.N., 2012

c) $\{x\}^{2008} = [x]^{2008} + x^{2008} \Rightarrow |x| < 1$.
Fie $x \in (-1,0) \Rightarrow [x]^{2008} = 1 \Rightarrow \{x\}^{2008} = 1 + x^{2008}$, fals.
Evident $x \in [0,1)$ sunt soluții.

d) Fie n par. Atunci $x^n = \{x\}^n - [x]^n \geq 0 \Rightarrow \{x\}^n \geq [x]^n \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1)$.
Dacă n este impar și $x < 0$, $[x]^n < 0$ și $x^n + [x]^n = \{x\}^n$, contradicție, deci ecuația nu are soluții negative.
Dacă $x \geq 0$, atunci ca mai sus rezultă $x \in [0,1)$.
Așadar, ecuația are soluția $S = [0,1)$.

182***. a) Observăm că $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$ și $\left[3 + 2\sqrt{2}\right] = 5$.
Avem $17 + 12\sqrt{2} - \left((5+1)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right) + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 17 + 12\sqrt{2} - 18 - 12\sqrt{2} + 1 = 0$.

b) Fie α o rădăcină și atunci avem:

$$\alpha^2 - \left([\alpha] + \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1\right)\alpha + 1 = \alpha^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - \left(\{\alpha\} + \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}\right) + 1\right)\alpha + 1 =$$

$$= \alpha^2 - \alpha\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \{\alpha\} + \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}\alpha - \alpha + 1 = \alpha\left(\{\alpha\} + \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\alpha\} + \left\{\frac{1}{\alpha}\right\} = 1.$$

c) Rezultat cunoscut (vezi capitolul proprietăți).

Argument nr. 12, Tabăra de matematică Baia Mare, 2010

183***. Vom scrie sub forma mai simplă membrul stâng al ecuațiilor.
$x + 2x + 3x - ([x] + [2x] + [3x]) = 6x - ([x] + [2x] + [3x])$.
Rezultă că $6x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 6x = n \Rightarrow x = \frac{n}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

a) $n = 2 + \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]$ (*).
Considerăm $n = 6k + r, r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ și ecuația (*) devine

$$6k + r = 2 + k + \left[\frac{r}{6}\right] + 2k + \left[\frac{r}{3}\right] + 3k + \left[\frac{r}{2}\right] \Rightarrow$$

$$r = 2 + \left[\frac{r}{6}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{2}\right] (**).$$

Cu $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ singura valoare care verifică (**) este $r = 5$.
Așadar, $x = \frac{6k+5}{6} = k + \frac{5}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Mihai Piticari, Vladimir Cerbu

Scanned with OKEN Scanner

b) Analog, rezultă $n = 1 + \left[\frac{n}{6}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]$.

Pentru $n = 6k + r, r \in \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow r = 1 + \left[\frac{r}{6}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{2}\right]$.

Ultima ecuație este verificată pentru $r \in \{1,2,3,4\}$, deci

$n \in \{6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4\}$, dar $x = \frac{n}{6}$

$x \in \left\{\frac{6k+1}{6}, \frac{6k+2}{6}, \frac{6k+3}{6}, \frac{6k+4}{6}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Gh. Andrei

c) Relația devine: $x = 3 + \left[\frac{x}{6}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{2}\right]$ (1)

și pentru $x = 6k + r, k \in \mathbb{Z}, \in \{0,1,2,3,4,5\}$ relația (1) devine:

$r = 3 + \left[\frac{r}{6}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{2}\right]$, care nu este satisfăcută pentru nicio valoare a lui r.

Ecuația nu are soluție. Se observă mai rapid că membrul stâng este strict mai mic decât 3.

Gh. Andrei

d) Ecuația devine $x = p + \left[\frac{x}{6}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{2}\right]$

și pentru $x = 6k + r, k \in \mathbb{Z}, \in \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow r = p + \left[\frac{r}{6}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] + \left[\frac{r}{2}\right]$ (2).

Rezultă că ecuația (2) are soluție numai dacă $p \in \mathbb{N}$ și, mai mult, $p \in \{0,1,2\}$.

Gh. Andrei

184***. a) <u>Soluția 1</u>

Evident rezultă $x \geq 0$ și $\{x\} + \{2x\} + \left\{\frac{x}{2}\right\} = [x] + \{x\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{2x\} + \left\{\frac{x}{2}\right\} = [x] \in [0,2) \Rightarrow [x] \in \{0,1\}$.

Dacă $[x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1) \Rightarrow \{2x\} + \left\{\frac{x}{2}\right\} = 0 \Rightarrow \{2x\} = \left\{\frac{x}{2}\right\} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$,

$2x \in \mathbb{Z}$ și cum $x \in [0,1) \Rightarrow x = 0$.

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow x \in [1,2) \Rightarrow \frac{x}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Considerăm două cazuri:

I. $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2}, \{2x\} = 2x - [2x] = 2x - 2$

și ecuația devine:

$2x - 2 + \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

II. $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow \left\{\frac{x}{2}\right\} = \frac{x}{2}$, $\{2x\} = 2x - [2x] = 2x - 3$ și ecuația devine:

$2x - 3 + \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{8}{5} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$. Prin urmare, $x \in \left\{0, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right\}$.

Soluția II

Evident $x \geq 0 \Rightarrow [x] = k \geq 0$. Fie $x = k + t$, unde $k \geq 0, t \in [0,1)$ și atunci ecuația devine: $\left\{\frac{k+t}{2}\right\} + t + \{2k + 2t\} = k + t \Rightarrow \left\{\frac{k+t}{2}\right\} + \{2t\} =$

$= k \in [0,2)(1)$, deci $k \in \{0,1\}$.

Dacă $k = 0 \Rightarrow \left\{\frac{t}{2}\right\} + \{2t\} = 0 \Rightarrow \frac{t}{2} \in \mathbb{N}, 2t \in \mathbb{N}$ și $t \in [0,1) \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$

$x = 0$.

Dacă $k = 1$, atunci (1) devine: $\left\{\frac{t+1}{2}\right\} + \{2t\} = 1 \quad (2)$.

Considerăm cazul $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2t \in (0,1), \frac{t+1}{2} \in (0,1)$ și (2) devine:

$\frac{t+1}{2} + 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

Considerăm cazul $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow 2t \in [1,2), \frac{t+1}{2} \in (0,1)$ și ecuația (2)

devine: $\frac{t+1}{2} + 2t - 1 = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{5} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow x = k + t = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$.

$S = \left\{0, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right\}$.

b) (1) Ecuația este echivalentă $[x] + [2x] = [3x]$.

Fie $x \in \left[k, k + \frac{1}{3}\right), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [2x] = 3k = [3x]$

și toate elementele mulțimii $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k, k + \frac{1}{3}\right)$ sunt soluții.

Dacă $x \in \left[k + \frac{1}{3}, k + \frac{2}{3}\right), k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [2x] \in \{3k, 3k + 1\}$ și

$[3x] = 3k + 1$.

Prin urmare, în acest caz ecuația are soluții dacă și numai dacă

$x \in \left[k + \frac{1}{2}, k + \frac{2}{3}\right)$ și elementele mulțimii $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k + \frac{1}{2}, k + \frac{2}{3}\right)$ sunt soluții.

Dacă $x \in \left[k + \frac{2}{3}, k + 1\right) \Rightarrow [x] + [2x] = 3k + 1$ și $[3x] = 3k + 2$,

iar în acest caz nu avem soluții. Prin urmare, mulțimea soluțiilor este:

Scanned with OKEN Scanner

$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k, k+\frac{1}{3}\right) \cup \left[k+\frac{1}{2}, k+\frac{2}{3}\right).$

2) Din punctul 1) rezultă că pentru $x \in \mathbb{N}^*, x_n = n + \frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ este soluție și $x_n + \frac{1}{3} = n + \frac{5}{6}$ nu este soluție.

3) Pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$ alegem $x_n \in \left[n+\frac{1}{6}, n+\frac{1}{3}\right)$ care sunt soluții ale ecuației (vezi punctul 1)) și $x_n + \frac{1}{3} \in \left[n+\frac{1}{2}, n+\frac{2}{3}\right)$ care sunt soluții ale ecuației.

Dana Heuberger, Argument nr. 15

185***. Deoarece $\sin\frac{\pi x}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin\frac{\pi x}{2} \in \{0, \pm 1\}$, dar și $-1 \le \frac{6x}{x^2+9} \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\sin\frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2k \Rightarrow 0 \le \frac{12k}{4k^2+9} < 1 \Rightarrow \left[\frac{6x}{x^2+9}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6x}{x^2+9} \in [0,1) \Rightarrow x \in [0,\infty) - \{3\} \Rightarrow x \in \{2k, k \in \mathbb{N}\} = S_1.$

$\sin\frac{\pi x}{2} = 1 \Rightarrow x = 4k-1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\frac{6x}{x^2+9}\right] = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6x}{x^2+9} \in [-1,0) \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$ deci $x \in \{4k-1, k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*\} = S_2.$

Dacă $\sin\frac{\pi x}{2} = 1 \Rightarrow x = 4k+1, k \in \mathbb{Z}$ și $\left[\frac{6x}{x^2+9}\right] = 1 \Rightarrow 1 \le \frac{6x}{x^2+9} < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$, care nu este de forma $4k+1$, deci nu este soluție.

Așadar, $x \in \{2k, k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{4k-1, k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*\}$.

Dumitra Șerban, R.M.G. nr. 35

186***. a) Căutăm soluții de forma $x = \frac{n}{10}, n \in \mathbb{N}$. Se arată că $x = \frac{13}{10}$ verifică. Așadar, $x = 10k + \frac{13}{10}, k \in \mathbb{Z}$ satisface egalitatea.

b) Presupunem prin reducere la absurd că există $x > 0, x \in \mathbb{Q}$ care verifică egalitatea.

Notăm $[x] = n$ și avem $n < x < n+1$ și $n^2 < x^2 < n^2 + 2n + 1$.

Fie $[x^2] = n^2 + k$ unde $0 \le k \le 2n$. Egalitatea devine:

$x^2 + x - n^2 - n - k - 1 = 0.$

Se impune $\Delta = 4n^2 + 4n + 4k + 5$ pătrat perfect (impar), adică

$(2m+1)^2 \Rightarrow n^2 + n + k + 1 = m^2 + 1$

și cum $m \ge n+1 \Rightarrow m^2 + m \ge n^2 + 3n + 2 \Rightarrow k \ge 2n+1$, contradicție.

S. Dragomir

Scanned with OKEN Scanner

187***. a) Din ecuație rezultă că $x > 1$. Presupunem că ecuația are soluții raționale.

Fie $x = \frac{p}{q} > 1$. Atunci există c, r astfel încât $p = cq + r \quad (1), \ 0 < r < q$ (evident, ecuația nu are soluții întregi deoarece $\{x\} = 0$).

Din (1) rezultă $\frac{p}{q} = c + \frac{r}{q} \Rightarrow \left\{\frac{p}{q}\right\} = \left\{\frac{r}{q}\right\} = \frac{r}{q}$ și ecuația devine

$\left\{\frac{q}{r}\right\} = \frac{q}{r} \Leftrightarrow 0 < \frac{q}{r} < 1$, fals.

Prin urmare, ecuația nu are soluții raționale.

b) α) Rezultă că $x > 0, x \notin \mathbb{Z}$ și $x > 1$; atunci ecuația

$\{x\} = \frac{1}{x} = \left\{\frac{1}{x}\right\} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = k \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow x^2 - xk - 1 = 0 \Rightarrow x_k = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$,

$k \in \mathbb{N}^*$ și cum $\sqrt{k^2+4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

β) O rădăcină este $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

γ) Pentru ca $[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2} < 2 \Rightarrow k = 1$,

deci soluția este $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pentru $k = 2$ se obțin soluțiile cu $[x] = 2$.

De remarcat că $[x_k] = k, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Concurs Estonia, 1998

§ 7. Ecuații în mulțimea numerelor întregi

188. a) Avem $\left[\sqrt{n}\right] = \frac{n+2}{5} = k \Rightarrow n = 5k - 2$

$k \leq \sqrt{5k-2} < k+1 \Rightarrow k^2 \leq 5k - 2 < k^2 + 2k + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{1,2,3,4\} \Rightarrow n \in \{3,8,13,18\}$.

Aurel Doboșan, Concursul „Gh. Mihoc", 2003

b) Notăm $\frac{n-3}{5} = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 5m + 3 \Rightarrow \left[\sqrt{5m+3}\right] = m \Rightarrow$

$\Rightarrow m \leq \sqrt{5m+3} < m+1 \Rightarrow m \in \{4,5\} \Rightarrow n \in \{23,28\}$.

c) Avem $\left[\sqrt{n}\right] = \frac{n-1}{3} = k \Rightarrow n = 3k + 1 \Rightarrow k \in \{2,3\} \Rightarrow n \in \{7,10\}$.

Math Bulletin, Canada 1997, Concursul „Gheorghe Țițeica", 2012

d) Notăm $\left[\sqrt[3]{x}\right] = y \in \mathbb{Z}$, iar ecuația devine: $x = 2y + 1$.

Dar $y \leq \sqrt[3]{x} < y + 1 \Rightarrow y \leq \sqrt[3]{2y+1} < y + 1 \Rightarrow y^3 - 2y - 1 < 0$ și

$y^3 + 3y^2 + y > 0 \Rightarrow y \in [-\infty, -1) \cup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{0,1\}$ și doar $y = 1$ verifică și cea de-a doua ecuație. Așadar, $x = 2y + 1 = 3$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 1/1982

189. a) Avem $k < \sqrt{k(k+1)} < k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k$,

deci $\sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{k(k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = 231 \Rightarrow n = 21.$

b) Avem $(k-1)^2 \leq k^2 - k + 1 < k^2, \forall\, k \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k - 1 \leq \sqrt{k^2 - k + 1} < k \Rightarrow \left[\sqrt{k^2 - k + 1}\right] = k - 1.$

Ecuația devine:

$$1 + \sum_{k=2}^{n} (k-1) = 1 + (1 + 2 + \cdots + n - 1) = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = 191$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 190 \Rightarrow n(n-1) = 380 = 19 \cdot 20 \Rightarrow n = 20.$$

c) Dacă $n \geq 3$, membrul stâng este mai mare cu 349. Prin verificare rezultă că $n = 2$ este soluție.

O.L. Galați, 2013

190. Evident, $x = -2$ este soluție și $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

a) Fie $x = 3k, k \in \mathbb{Z}$ și atunci ecuația devine

$$\left[3k^2 - 2 + \frac{2}{3}\right] = (3k+2)^2$$

$\Rightarrow 3k^2 - 2 = 9k^2 + 12k + 4 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -3.$

b) Fie $x = 3k + 1$; în mod analog deducem $k = -1 \Rightarrow x = -2$.

c) Fie $x = 3k + 2$. Deducem $k = -2 \Rightarrow x = -4$.

Așadar, $x \in \{-4, -3, -2\}$.

191*. <u>Soluția 1</u>

Avem $n = [\sqrt{n}] + \left[\frac{n-2}{3}\right] + 1 \leq \sqrt{n} + \frac{n-2}{3} + 1 \Rightarrow 2n - 1 < 3\sqrt{n} \Rightarrow n \leq 3.$

Verifică $n \in \{0,1,2\}$. (Pentru $n \geq 4$, prin inducție se deduce că $2n - 1 > 3\sqrt{n}$.)

<u>Soluția 2</u>

Notăm $\left[\frac{n-2}{3}\right] = k \in \mathbb{Z}$. Fie $n \in \{3k+3, 3k+4\}$.

Pentru $n = 3k + 2 = \left[\sqrt{3k+2}\right] = 2k + 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = 2.$

Pentru $n = 3k + 3 = \left[\sqrt{3k+3}\right] = 2k + 2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow n = 0.$

Pentru $n = 3k + 4 = \left[\sqrt{3k+4}\right] = 2k + 3 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$

$n \in \{0,1,2\}$.

Romanța Ghiță, Ion Ghiță, G.M. nr. 11/2011, Concursul „Gh. Mihoc", 2012

Scanned with OKEN Scanner

192. Avem $[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}-n]=0 \Rightarrow$
$[\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-1+\sqrt{4}-1+\cdots+\sqrt{n}-1]=0,$
unde funcția $g(n)=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-1+\cdots+\sqrt{n-1}$ este strict crescătoare, deci pentru $n\in\{1,2\}$, pentru $n\geq 3 \Rightarrow$
$[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}]>n, \forall\, n\geq 3.$

Ionel Tudor

193. Soluția 1
Funcția din membrul stâng este crescătoare, deci ecuația are cel mult o soluție și prin urmare $x=1$ verifică ecuația.

Soluția 2
Se constată că $x\in\left[\frac{7}{31},\frac{97}{31}\right)\cap\mathbb{N}=\{1,2,3\}$. Numai $x=1$ verifică.

194*. $\sqrt{2}n-1+\sqrt{3}n-1<100<\sqrt{2}n+\sqrt{3}n \Leftrightarrow 32<100(\sqrt{3}-\sqrt{2})<$
$<n<102(\sqrt{3}-\sqrt{2})<33, n\in\mathbb{N}.$
Rezultă că nu există $n\in\mathbb{N}$ care să verifice egalitatea.

195*. a) Notăm $[\sqrt{n}]=k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow n\in[k^2,(k+1)^2)$ și $2^k=n\in$
$\in[k^2,(k+1)^2) \Rightarrow k^2\leq 2^k<(k+1)^2$, unde prima inegalitate este adevărată pentru $k\in\mathbb{N}^*-\{3\}$ și a doua pentru $k\in\{1,2,4,5\} \Rightarrow$
$n\in\{2,4,16,32\}$.

b) Notăm $[\sqrt[3]{n}]=k\in\mathbb{N}^* \Rightarrow k\leq\sqrt[3]{n}<k+1 \Rightarrow k^3\leq n<(k+1)^3$
$\Rightarrow k^3\leq 2^k<k^3+3k^2+3k.$
(Se poate arăta că $2^k>(k+1)^3, \forall\, k>10$ și $2^k<k^3, \forall\, 2\leq k<9.$)
Pentru $k=10 \Rightarrow n=1024$. Pentru $k=1 \Rightarrow [\sqrt[3]{n}]=1 \Rightarrow n\in\{1,2,3\}$, dar numai $n=2$ verifică ecuația. Prin urmare, $n\in\{2,1024\}$.

c) Evident, $x\geq 0$. Notăm $[\sqrt{x}]=k\in\mathbb{N} \Rightarrow k^2\leq x<(k+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^4\leq x^2<(k+1)^4 \Rightarrow k^4\leq 2^k<(k+1)^4 \quad (*).$
Se deduce prin inducție că $2^k\geq k^4, \forall\, k\in\{0,1,16,17\ldots\}$ și $2^k<(k+1)^4$, $\forall\, k\in\{1,2,3,\ldots 16\}$. Prin urmare, relația din $(*)$ este adevărată pentru $k\in\{1,16\} \Rightarrow x\in\{\sqrt{2},256\}$, dar numai $x=256\in\mathbb{N}$.

Ion Nedelcu, Lucian Tuțescu (L 13)

196*. Funcția din membrul stâng este o funcție strict crescătoare și, prin urmare, ecuațiile au soluție unică.
Dacă $m=1001 \Rightarrow x=584$ și pentru $m=1002 \Rightarrow x=585$.

197*. Rezultă că $2<\frac{2k+1}{k}<3, \forall\, k\geq 2$ și $\frac{2k+1}{k}=3$. Pentru $k=1$ suma dată este $3+(n-1)=2n+1=101 \Rightarrow n=50$.

Scanned with OKEN Scanner

198*. Se verifică ușor că $n=2$ verifică ecuația, iar pentru $n\in\{1,3\}$ nu verifică.
Remarcăm că $[n+10]<n<\left[\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}\right], \forall\, n\geq 4$ $(*)$.
Într-adevăr, $\sqrt{n+10}<n, \forall\, n\geq 4$, $n<\sqrt{n}+\sqrt{n^2+1}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Concurs Rusia, 2001-2002 (Ecaterinburg)

199. Rezultă că $\sqrt{n^2+3m+9}\in\mathbb{N}\Rightarrow n^2+3n+9=k^2, k\in\mathbb{N}$.
Obținem $(2n+3)^2+27=4k^2\Rightarrow(2k+2n+3)(2k-2n-3)=27\Rightarrow$
$\Rightarrow n\in\{-8,-3,0,5\}$.

Ionuț Stroe, Rev. Mat., 2010

200**. Este necesar ca $\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}<3\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sqrt{n+1}+2<9\Rightarrow 4n+4<49, n<\frac{45}{4}\Rightarrow n\in\{0,1,2,3,\ldots 11\}$ și
$\sqrt{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\sqrt{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\geq 2\Leftrightarrow 2\sqrt{n+1}+2\geq 4\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sqrt{n+1}\geq 2\Rightarrow n\geq 3\Rightarrow n\in\{3,4,\ldots 11\}$. Prin urmare, $n\in\{3,4,5,6,\ldots 11\}$.

Liviu Pârșan, G.M. nr. 12/2003

201**. Fie funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, f(n)=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$.
Se deduce ușor că $f(n+1)>f(n)\Leftrightarrow\sqrt{n^2+3n+3}+\sqrt{n^2-n+1}>$
$>2\sqrt{n^2+n+1}\Leftrightarrow 2n^3+6n^2+6n+3>0$
și cum f este strict crescătoare și $1000f(5)=985{,}18816\Rightarrow n=5$.

Mihaly Bencze

202*. Fie $m=12k+r, k\in\mathbb{Z}$ și cu $0\leq r\leq 11, r\in\mathbb{N}$ ecuația se mai scrie: $\left[6k+\frac{r}{2}\right]+\left[2k+\frac{r}{6}\right]=\left[4k+\frac{r}{3}\right]+\left[3k+\frac{r}{4}\right]\Rightarrow$
$\Rightarrow k=\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]-\left[\frac{r}{6}\right]-\left[\frac{r}{2}\right]$.
Distingem cazurile: I. $r\in\{0,1,3,4,5,9\}, k=0\Rightarrow x\in\{0,1,3,4,5,9\}$.
II. $r\in\{6,7,8,10,11\}, k=-1\Rightarrow x\in\{-6,-5,-4,-2,-1\}$.

Liviu Pârșan, G.M. nr. 3/2004

203*. Avem $\sqrt{n}-[\sqrt{n}]=\sqrt{n+2011}-[\sqrt{n+2011}]\Rightarrow$
$\Rightarrow\sqrt{n+2011}-\sqrt{n}=[\sqrt{n+2011}]-[\sqrt{n}]=p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$
$\Rightarrow 2011=p^2+2p\sqrt{n}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow n=k^2, k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow 2011=p(p+2k)$
și cum 2011 este prim $\Rightarrow p=1, p+2k=2011\Rightarrow k=1005, n=1005^2$.

Alexandra Blaga, O.J., 2012

204*. Dacă n este par atunci $x=1$. Dacă n este impar, atunci diferența celor două părți fracționare este $\frac{1}{2}$ sau $-\frac{1}{2}$ și apar soluțiile $x_1=1{,}5$, $x_2=0{,}5$, dar numai $x=1{,}5$ verifică. Așadar, $x\in\{1;\ 1{,}5\}$.

Scanned with OKEN Scanner

205**. a) Se impune ca $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și prin inducție se deduce că
$3^n \geq n^3, \forall\, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}, \forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \Rightarrow \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[3]{9} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < 2 + 3 = 5,$
deci ecuația dată nu are soluții pentru $n \geq 5$. Verificând direct valorile $n \in \{2,3,4\}$ se găsește unica soluție $n = 3$.

b) Se impune condiția $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Se cercetează dacă $n \in \{3,5\}$ nu verifică, iar $n = 4$ verifică. Arătăm că nu există soluția $n \geq 6$. Prin inducție rezultă că $3^{n-1} > n^3, \forall\, n \geq 6 \Rightarrow \sqrt[n-1]{n} < \sqrt[3]{3}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, n \geq 6$
$\Rightarrow \sqrt[n-1]{n^2} < \sqrt[3]{9} \Rightarrow \sqrt[n-1]{n} + \sqrt[n-1]{n^2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < 2 + 3 < 6$. Așadar, singura soluție este $n = 4$.

Ionel Tudor, „Recreații matematice" nr. 2/2013

206**. Soluția 1

Considerăm funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ unde:
$f(n) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{12}\right] + \left[\frac{n}{18}\right] - 11\left[\frac{n}{36}\right].$
Se arată ușor că $f(n + 36) = f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$ și deci este periodică cu perioada $T = 36$.

Avem $f(0) = 0$ și pentru $n \in \{1,2, \ldots 35\} = A \Rightarrow \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3} =$
$= \frac{5n}{6} < 1$, iar $\left[\frac{n}{36}\right] = 0$. Așadar, ecuația nu are soluții în mulțimea A.
Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{36k, k \in \mathbb{N}\}$.

Gh. Iurea, R.M., 2003

Soluția 2

Utilizăm egalitatea $[x + n] = [x] + n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.
Fie $n = 36k + r,\ r \in \{0,1, \ldots 35\}$. Atunci ecuația devine:
$r = \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] - \left[\frac{r}{12}\right] + \left[\frac{r}{18}\right].$
Dacă $r \geq 1$, atunci $r \leq \left[\frac{r}{2}\right] + \left[\frac{r}{3}\right] \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{32} = \frac{5r}{6} < r$, fals. Așadar, $r = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 36k, k \in \mathbb{N}$.

Gh. Iurea, O.L. Iași, 2003

207**. Notăm cu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
Arătăm mai întâi că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{2n}{n+1}$.
Pentru $n \in \{1,2,3\}$, inegalitatea se verifică imediat.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n \geq 4$ rezultă că $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{25}{12} > 2$, deci

$a_n > 2 > \frac{2n}{n+1}$.

Avem $1 \leq \frac{2n}{n+1} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left[\frac{2n}{n+1}\right] = 1$ și ecuația devine:

$[a_n] = 1$ $(*)$. Se remarcă faptul că pentru $n \in \{1,23\}$ egalitatea $(*)$ este verificată. Pentru $n \geq 4 \Rightarrow a_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \Rightarrow [a_n] \geq \left[\frac{25}{12}\right] = 2$.

Așadar, ecuația nu are soluții pentru $n \geq 4$.

Alexandru Szörös, G.M. nr. 4/1992

208**. Fie $n = nk + r, r \in \{0,1, \ldots 11\}$ și ecuația devine:

$6k + \left[\frac{r}{2}\right] = 4k + \left[\frac{r}{3}\right] + 3k + \left[\frac{r}{4}\right]$

$\left[\frac{r}{2}\right] = k + \left[\frac{r}{3}\right] + \left\{\frac{r}{3}\right\}$. Dând valorile $r \in \{0,1,2, \ldots 11\}$ rezultă:

1) $r = 0, k = 0, n = 0$;
2) $r = 1, k = 0, n = 1$;
3) $r = 2, k = 1, n = 12 + 2 = 14$;
4) $r = 3, k = 0, n = 3$;
5) $r = 4, k = 0, n = 4$;
6) $r = 5, k = 0, n = 5$;
7) $r = 6, k = 0, n = 6$;
8) $r = 6, k = 0, n = 7$;
9) $r = 8, k = 0, n = 8$;
10) $r = 9, k = -1, n = -12 + 9 = -3 \notin \mathbb{N}$;
11) $r = 10, k = 0, n = 10$;
12) $r = 11, k = 0, n = 11$.

Prin urmare, $n \in \{0,1,3,4,5,6,7,8,10,11,14\}$.

Liviu Pârșan, G.M. nr. 11/1994

209**. Observăm că $x = 3n, y = 9n, z = 18n, t = 2n, n \in \mathbb{N}^*$ sunt soluții.

Traian Tămîian, G.M. nr. 2/2005

210**. Fie $a_n = \left[\sqrt[3]{n^2}\right] + [\sqrt{n}] + 1$. Pentru $n \geq (2m)^6 \Rightarrow a_n < \frac{n}{m}$.

Într-adevăr $\frac{a_n}{n} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1}{n} \leq \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{8m^3} + \frac{1}{64m^6} \leq$

$\leq \frac{1}{m}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64}\right) < \frac{1}{m}$.

Cezar Lupu, Dan Schwatz, G.M. nr. 2/2009

Scanned with OKEN Scanner

§ 8. Ecuații în care sunt implicate trinoamele de gradul II (A)

211. Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in [0,1)$.

a) $k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow k \in \{-2,3\}, [x] = -2 \Rightarrow x \in [-2,-1)$, $[x] = 3 \Rightarrow x \in [3,4) \Rightarrow x \in [-2,-1) \cup [3,4)$;

b) $3t^2 + 4t - 4 = 0 \Rightarrow t \in \left\{-2, \frac{2}{3}\right\} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow x = k + \frac{2}{3}, \forall\, k \in \mathbb{Z}$;

c) $2t^2 + 5t + 2 = 0$, ecuația nu are soluție (membrul stâng este strict pozitiv);

d) $6k^2 - k - 1 = 0 \Rightarrow k \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$, deci ecuația nu are soluție;

e) avem $5k^2 - 11k + 2 = 0, k \in \left\{2, \frac{1}{5}\right\} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x \in [2,3)$.

212. Evident, în fiecare caz în parte se asociază ecuația $3y^2 + 4y - 4 = 0$, $y_1 = \frac{2}{3}, y_2 = -2 \Rightarrow$

a) $|x| = \frac{2}{3}, |x| = -2 \Rightarrow x \in \left\{\pm\frac{2}{3}\right\}$;

b) $[x] = -2 \Rightarrow x \in [-2,-1)$;

c) $\{x\} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_k = k + \frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

213. Se notează $[x] = y \in \mathbb{Z}$.

a) $y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 3 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow x \in [-1,0) = S_1$ și $[x] = 3 \Rightarrow x \in [3,4) = S_2 \Rightarrow x \in [-1,0) \cup [3,4)$;

b) Analog $y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow x \in [2,3)$ și ecuația $[x] = -\frac{1}{2}$ nu are soluție;

c) Ecuația nu are soluție $[x] = \frac{1}{2}, [x] = -\frac{2}{3}$.

214.** Avem $x = \frac{1}{8}(1 + 16\{x\}^2) \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{17}{8}\right] \Rightarrow [x] \in \{0,1,2\}$.

Dacă $[x] = 0 \Rightarrow \{x\} = x \Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$.

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow x = 1 + \{x\} \Rightarrow 16\{x\}^2 - 8\{x\} - 7 = 0 \Rightarrow \{x\} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{4}$.

Dacă $[x] = 2 \Rightarrow x = 2 + \{x\} \Rightarrow 16\{x\}^2 - 8\{x\} - 15 = 0 \Rightarrow$

$\{x\} = \frac{1 \pm 4}{5} \notin [0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, soluțiile sunt $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{4}$.

Maria Teler, G.M. nr. 3/2007

b) Avem $\{x\}^2 = \frac{10x-1}{2} \in [0,1) \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right) \Rightarrow \{x\} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 10x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2} \Rightarrow x = \frac{5-\sqrt{23}}{2} \in [0,1)$.

c) Fie $x = k + \alpha, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1) \Rightarrow 25\{x\}^2 - 10([x] + \{x\}) + 1 =$
$= 0 \Rightarrow 25\alpha^2 - 10k - 10\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (5\alpha - 1)^2 = 10k$
și cum $5\alpha - 1 \in [-1,4) \Rightarrow 10k \in [0,16) \Rightarrow [x] = k \in \{0,1\}$.

Dacă $k = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}$.

Dacă $k = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{1+\sqrt{10}}{5} = \frac{6+\sqrt{10}}{5}$.

Bogdan Chiriac, Recreații matematice nr. 1/2012

215. a) Avem $[x] = -x^2 + x + 2 \Rightarrow x - 1 <= -x^2 + x + 2 \leq x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \leq x^2 < 3 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Dacă $x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Dacă $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vasile Pop, R.M.T., 2011

b) $x = [x] + \{x\} = k + t$ și ecuația devine:
$k^2 + 2k + 3t = \pi \Rightarrow k^2 + 2k + [3t] = 3$.

Dacă $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow [3t] = 0 \Rightarrow k = 1, k = -3$.

Pentru $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$. Pentru $k = -3 \Rightarrow x = \frac{\pi-12}{3}$.

Dacă $[3t] = 1 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 3 \Rightarrow k^2 + 2k - 2 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$.

Dacă $[3t] = 2 \Rightarrow k^2 + 2k + 2 = 3 \Rightarrow k \notin \mathbb{Z}$.

Deci, $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi-12}{3}\right\}$.

c) Avem $3x^2 = 5 - 2\{x\} \Rightarrow x^2 \in \left(1, \frac{5}{3}\right] \Rightarrow [x] \in \{-2,1\}$.

Dacă $[x] = -2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$, care nu convine.

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{22}-1}{3}$.

Concurs „Gh. Mihoc", 1997

Scanned with OKEN Scanner

d) Avem $3(x-1) < 2x^2 + x - 4 \leq 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ 2x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 2\right] = I \cup J.$

Dacă $x \in I \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$

Dacă $x \in J \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{57}}{4} \in J$ și $x = 2$ verifică ecuația. Prin urmare $x \in \left\{-1, 2, \frac{-1+\sqrt{57}}{4}\right\}$.

Szabo Magda, Longaver Lajos, G.M. nr. 5/2014

216***. a) $[x] = \frac{x^2+6}{5} \leq x \Rightarrow x \in [2,3)$. Dacă $x \in [2,3) \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$, iar $x = 3$ verifică, deci $x \in \{2,3\}$.

b) $[x] = \frac{4x^2-3}{4} \leq x \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Dacă $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow 4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Dacă $x \in [0,1) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 4x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dacă $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 4x^2 = 7 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$.

c) $x - 1 < [x] \leq x \Rightarrow x - 1 \leq 15 - 2x^2 \leq x \Rightarrow 2x^2 + x - 15 \geq 0$ și $2x^2 + x - 16 \leq 0, x \in \left[\frac{-1-\sqrt{129}}{4}, -3\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{-1+\sqrt{129}}{4}\right]$.

Dacă $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{129}}{4}, -3\right) \Rightarrow [x] = -4 \Rightarrow 2x^2 = 19 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{38}}{2}$ și evident $x = -3$ verifică.

Dacă $x \in \left[\frac{5}{2}, \frac{-1+\sqrt{129}}{4}\right] \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow x \left\{\frac{-\sqrt{38}}{2}, \frac{\sqrt{26}}{2}, -3\right\}$.

d) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:

$4(k+t)^2 + 8k + 7 = 0 \Rightarrow 4t^2 + 8kt + 4k^2 + 8k + 7 = 0$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow -4(k+7) \geq 0 \Rightarrow 8k + 7 \leq 0 \Rightarrow k \leq -1$

$t_{1,2} = \frac{-4k \pm \sqrt{-4(8k+7)}}{4} = \frac{-2k \pm \sqrt{-8k-7}}{2} = -k \pm \frac{-\sqrt{-8k-7}}{2},$

convine numai $t_1 = -k - \frac{-\sqrt{-8k-7}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

$0 \le -k - \frac{-\sqrt{-8k-7}}{2} < 1 \Rightarrow k \in \{-3,-2,-1\}$.

Pentru $k=-1 \Rightarrow t = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Pentru $k=-2 \Rightarrow t = 2 - \frac{\sqrt{-8k-7}}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Pentru $k=-3 \Rightarrow t = 3 - \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x_3 = -3 + 3 - \frac{\sqrt{17}}{2} = -\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Așadar, $x \in \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Horia Banea, Concursul „Laurențiu Duican", 2008

e) $40[x] = 4x^2 + 51 \le 40x \Rightarrow 4x^2 - 40x + 51 \le 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right]$

$\Rightarrow [x] \ge 1$.

Notăm $[x] = k \in \mathbb{N}^*$ și $\{x\} = t \in [0,1)$, iar ecuația devine:

$4(k+t)^2 - 40k + 51 = 0 \Rightarrow 4t^2 + 8kt + 4k^2 - 40k + 51 = 0$

și din $\Delta \ge 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și $t_1 = \frac{-k + \sqrt{160k - 204}}{4} \in (0,1)$ (1)

$\Rightarrow 4k \le \sqrt{160k - 204}$ (2)

și $\sqrt{160k-204} < 4k + 4 \Rightarrow 4k^2 - 40k + 51 \le 0$ și $4k^2 - 32k + 55 > 0$

$\Rightarrow k \in \{2,6,7,8\}$.

Pentru $k=2 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{29}}{2} - 2 \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Pentru $k=6 \Rightarrow t_2 = \frac{3\sqrt{21}}{2} - 6 \Rightarrow x_2 = \frac{3\sqrt{21}}{2}$.

Pentru $k=7 \Rightarrow t_3 = \frac{\sqrt{229}}{2} - 7 \Rightarrow x_3 = \frac{\sqrt{229}}{2}$.

Pentru $k=9 \Rightarrow t_4 = \frac{\sqrt{269}}{2} - 8 \Rightarrow x_4 = \frac{\sqrt{269}}{2}$.

Rezultă că $x \in \left\{\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}, \frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$.

Olimpiadă Canada

217**. a) Avem $x^2 = [x] + 2 \Rightarrow (k+t)^2 = k + 2 \ge 0 \Rightarrow k \ge -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow k + t = \pm\sqrt{k+2} \Rightarrow t = -k \pm \sqrt{k+2} \in [0,1)$.

Dacă $t = \sqrt{k+2} - k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ și pentru $k = 2 \Rightarrow$ $x = 2$.

Dacă $t = -\sqrt{k+2} - k \Rightarrow k = -1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru alte valori ale lui k nu rezultă $t \in [0,1)$. Prin urmare, $x \in \{-1,2,\sqrt{3}\}$.

b) Din $x-1<[x]\leq x \Rightarrow -8x \leq -8[x] < -8x+8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+7-8x \leq 0 < x^2-8x+5 \Rightarrow x \in [1,7]$ și $x \in (-\infty,3) \cup (5,\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [1,3) \cup [5,7] \Rightarrow [x] \in \{1,2,6,7\}$.
Pentru $[x]=1$ devine: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow x=1$.
Pentru $[x]=2$ devine: $x^2-9=0 \Rightarrow x \in \emptyset$.
Pentru $[x]=5$ devine: $x^2-41=0 \Rightarrow x=\sqrt{41}$.
Pentru $[x]=7$ devine: $x^2-49=0 \Rightarrow x=7$.
Prin urmare, $x \in \{1,\sqrt{41},7\}$.

c) În mod analog, rezultă $x \in \{1,\sqrt{61},\sqrt{71},9\}$.

d) $x \in \left\{-\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right\}$.

e) $[x] \in \{1,2,3,6,7,8\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{\sqrt{189}}{2},\frac{\sqrt{229}}{2},\frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$.

f) Rezultă $x^2+11=12[x] \Rightarrow x>0 \Rightarrow x \geq 1$.

$[x]=\frac{x^2+11}{12}=p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x^2=12p-11 \Rightarrow x=\sqrt{12p-11}$
$[\sqrt{12p-11}]=p, p \leq \sqrt{12p-11} < p+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow p^2-12p+11 \leq 0$ și $p^2-10p+12>0$
$\Rightarrow p \in [1,11] \cap \mathbb{N}^*$ și $p \in \left([1,5-\sqrt{13}] \cup [5+\sqrt{13},\infty)\right) \cap \mathbb{N}^*$
$p \in \{1,9,10,11\}$ și cum $x=\sqrt{12p-11} \Rightarrow x \in \{1,\sqrt{97},\sqrt{109},11\}$.

Gh. Achim, G.M. nr. 4/2000

218. $-2 \leq x^2-3x < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,1] \cup [2,\infty) \\ x^2-3x+1<0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right] \cup \left[2,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = S_1$.

$2 \leq x^2-4x+5<3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,1] \cup [3,\infty) \\ x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow x \in (2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}) \end{cases}$
$\Leftrightarrow x \in (2-\sqrt{2},1] \cup [3,2+\sqrt{2}) = S_2$.
$\Rightarrow x \in S_1 \cap S_2 = \left(2-\sqrt{2},1\right] \cup \left[3,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

219*. a) Din $[x^2]=x+2 \in \mathbb{Z}$. Fie $x=k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [k^2]=k+2 \Rightarrow$
$k^2-k-2=0 \Rightarrow k \in \{-1,2\} \Rightarrow x \in \{-1,2\}$.

b) $[x^2]=-x+6 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Fie $x=k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k^2-k+6 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2+k-6=0 \Rightarrow k \in \{2,-3\} \Rightarrow x \in \{2,-3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $[x^2]-3x+2=0 \Rightarrow [x^2]=3x-2=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{k+2}{3}(*)\Rightarrow\left[\left(\frac{k+2}{3}\right)^2\right]=k\Rightarrow k\le\left(\frac{k+2}{3}\right)^2<k+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}k^2-5k+4\ge 0\\ k^2-5k-5<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\in(-\infty,1]\cup[4,\infty)\\ \frac{5-3\sqrt{5}}{2}<k<\frac{5+3\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Rightarrow k\in\{0,1,3,4,5\}\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\{0,1,4,5\}$. Din $(*)\Rightarrow x\in\left\{\frac{2}{3},1,2,\frac{7}{3}\right\}$.

d) Din $[x^2]=5x-4=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{k+4}{5}$ $(*)$

$\Rightarrow\left[\left(\frac{k+4}{5}\right)^2\right]=k\Rightarrow k\le\frac{(k+4)^2}{25}<k+1\Rightarrow\begin{cases}k^2-17k+16\ge 0\\ k^2-17k-9<0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\{0,1,16,17\}$. Din $(*)\Rightarrow x\in\left\{\frac{4}{5},1,4,\frac{21}{5}\right\}$.

220*. a) Pentru $x\ge 0\Rightarrow[x^2]-3x+2=0$ și în baza unui exercițiu precedent rezultă $x\in\left\{1,2,\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right\}$ (1).

Pentru $x<0\Rightarrow[x]\le -1$ avem $[x^2]+3x+2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow[x^2]=-3x-2=k\Rightarrow x=-\frac{k+2}{3}<0\Rightarrow k\ge -1$ (2).

Ecuația devine:

$\left[\frac{(k+2)^2}{9}\right]=k\Rightarrow k\le\frac{(k+2)^2}{9}<k+1\begin{cases}k^2-5k+4\ge 0\\ k^2-5k-5<0\end{cases}\Rightarrow k\in\{0,1,4,5\}$

și din (2) rezultă $x\in\left\{-\frac{2}{3},-1,-2,-\frac{7}{3}\right\}$ (3).

Din (1) și (3) rezultă $x\in\left\{\pm 1,\pm 2,\pm\frac{2}{3},\pm\frac{7}{3}\right\}$.

Expresia din stânga este o funcție pară.

b) Deoarece funcția $[x^2]-5|x|+4=f(x)$ este o funcție pară, vom rezolva numai în cazul $x\ge 0$, adică $[x^2]-5x+4=0$ și dintr-un exercițiu precedent rezultă $x\in S=\left\{1,4,\frac{4}{5},\frac{21}{5}\right\}$.

Prin urmare, $x\in\left\{\pm 1,\pm 4,\pm\frac{4}{5},\pm\frac{21}{5}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

221*. a) Notăm $x = k + t, k = [x] \in \mathbb{Z}, t = \{x\} \in [0,1)$.

Ecuația devine: $3t^2 + kt - 2k^2 - 2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{25k^2 + 24}}{6} \in [0,1)$

$\Rightarrow t_1 = \dfrac{-k + \sqrt{25k^2 + 24}}{6} \in [0,1)$, rezultă numai $k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0 + t_1 = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Argument nr. 11

b) Notăm $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow$

$13t^2 - 1013(k + t) + 2013t = 0, 0 \leq 13t^2 + 1000t = 1013k < 1013 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq k < 1 \Rightarrow k = 0$, de unde rezultă $13t^2 + 1000t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow$

$x = 0$.

c) Avem $|x + 5| \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Fie $x = k$.

$|k + 5| - 1 < k^2 + k + 1 \leq |k + 5|$.

Pentru $k > -5 \Rightarrow k + 5 - 1 < k^2 + k + 1 \leq k + 5$ (*)

$k + 4 < k^2 + k + 1 \leq k + 5 \Rightarrow k \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$

și care verifică numai $k = \pm 2$. Pentru $k < -5$ inecuațiile (*) nu au soluție.

Așadar, $x \in \{\pm 2\}$.

Romeo Zamfir

d) Notăm $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:

$4t^2 + 4tk + k^2 - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{-k + 2}{2}, t_2 = \dfrac{-k - 2}{2}$

$t_1 = \dfrac{-k + 2}{2} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{1,2\} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \dfrac{3}{2}$ și

$t_2 = \dfrac{-k - 2}{2} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{-2, -3\} \Rightarrow x_3 = -2, x_4 = -\dfrac{5}{2}$.

Cătălin Cristea, G.M. nr. 6-7-8/2014, O.L. București, 2014

222*. a) $0 \leq \{x\}^2 + 22\{x\} \leq 23 \Rightarrow 0 \leq 10x - 9 < 23 \Rightarrow x \in \left[\dfrac{9}{10}, \dfrac{23}{9}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] \in \{0,1,2\}$.

Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

Dacă $[x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1) \Rightarrow t = \{x\} = x$, ecuația devine:

$t^2 + 12t + 9 = 0 \Rightarrow t \notin [0,1)$.

Dacă $[x] = 1 \Rightarrow t^2 + 12t - 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{37} - 6 \Rightarrow x = \sqrt{37} - 5$.

Dacă $[x] = 2 \Rightarrow t^2 + 12t - 11 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{47} - 6 \Rightarrow x = \sqrt{47} - 4$.

Așadar, $x \in S = \{\sqrt{37} - 5, \sqrt{47} - 4\}$.

Constantin Nicolau, G.M. nr. 6-7-8/2016

Scanned with OKEN Scanner

b) Notăm $y=\sqrt{3}x \Rightarrow y^2=[2y]\{2y\}+1 \Rightarrow (y-[2y])^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y\in\mathbb{Z}$ și $y=\pm 1 \Rightarrow x\in\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Nicușor Minculete, R.G., 26

223**. a) Notăm $[x]=k \Rightarrow k\le x<k+1$ (1).

Relația devine: $[x^2]=4[x]-3=4k-3\ge 0$, de unde rezultă $k\ge 1$.

Din $x^2-1<[x^2]\le x^2 \Rightarrow 4k-3\le x^2<4k-2$ (2)

și din (1) rezultă $k^2\le x^2<(k+1)^2$ (3).

Din (2) și (3) rezultă $k^2<4k-2 \Rightarrow k(k-4)+2<0 \Rightarrow k\in\{1,2,3\}$.

Pentru $k=1 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow [x^2]=1 \Rightarrow 1\le x^2<2 \Rightarrow x\in[1,\sqrt{2}]$.

Pentru $k=2 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow [x^2]=5 \Rightarrow 5\le x^2<6 \Rightarrow x\in[\sqrt{5},\sqrt{6})$ și din

$[x]=3 \Rightarrow 9\le x^2<10 \Rightarrow x\in[3,\sqrt{10})$ și prin urmare:

$x\in[1,\sqrt{2})\cup[\sqrt{5},\sqrt{6})\cup[3,\sqrt{10})$.

O.L. Mehedinți, 2014

b) Fie $x=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$ și relația devine:

$[k^2+2kt+t^2]=5k+2 \Rightarrow k^2+[2kt+t^2]=5k+2$

$[t^2+2kt]=-k^2+5k+2$ (*).

Observăm că k nu poate fi negativ și nici egal cu 0. Fie $k\ge 1$ și

$[t^2+2kt]\ge 0 \Rightarrow -k^2+5k+2\ge 0 \Rightarrow k^2-5k-2\le 0 \Rightarrow k\in\{1,2,3,4,5\}$.

Se constată că pentru $k\in\{1,23\}$ ecuația (1) nu are soluție.

Fie $k=4 \Rightarrow [t^2+8t]=6$. $\quad 6\le t^2+8t<7 \Rightarrow \begin{cases} t^2+8t-7<0 \\ t^2+8t-6\ge 0 \end{cases}$

$t\in[-4+\sqrt{22},-4+\sqrt{23}] \Rightarrow x=k+t\in[\sqrt{22},\sqrt{23})$.

Pentru $k=5 \Rightarrow t\in[-4+\sqrt{22},-4+\sqrt{23}) \Rightarrow x=k+t\in[3\sqrt{3},2\sqrt{7})$.

Prin urmare, $x\in[\sqrt{22},\sqrt{23})\cup[3\sqrt{3},2\sqrt{7})$.

Laura Molea, Gh. Molea, G.M. nr. 1/2005, Concursul „Cristian Calude", 2010

224**. a) Ecuația se mai scrie: $\left[\frac{(2x+1)^2+2(2x+1)}{4}\right]=2x+1\in\mathbb{Z}$.

Notăm $k=2x+1\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left[\frac{k^2+2k}{4}\right]=k \Rightarrow k\in\{-1,0,2,3\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+1\in\{-1,0,2,3\} \Rightarrow x\in\left\{\pm 1,\pm\frac{1}{2}\right\}$.

b) Avem $\left[x+\frac{1}{2}+1\right]-(x-[x])=x^2-x-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\left[x+\frac{1}{2}\right]-x+[x]=x^2-x-2$.

$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=x^2-3\in\mathbb{Z} \Rightarrow [2x]=x^2-3\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow 2x-1<x^2-3\leq 2x\Rightarrow 3<x^2-2x+1\leq 4\Rightarrow$
$\Rightarrow 3<(x-1)^2\leq 4\Rightarrow \sqrt{3}<|x-1|\leq 2\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in[-1,3]$ și $x\in(1+\sqrt{3},\infty)\cup(-\infty,1-\sqrt{3})\Rightarrow$
$x\in(1+\sqrt{3},3]\cup[-1,1-\sqrt{3})$ și cum $x^2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1,2\sqrt{2},3\}$.

c) Cu notația $y=x^2-2$ ecuația devine:
$y-0{,}5[y]=3[0{,}5y-2]\Rightarrow 2y-[y]=6[0{,}5y-2]\Rightarrow 2y\in\mathbb{Z}$.
Dacă $2y=4m, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2m-m=3m-2\Rightarrow m=3\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$.
Pentru $2y\in\{4m+1,4m+2,4m+3\}$ rezultă că ecuația nu are soluție.

225***. Observăm că toate numerele întregi verifică ecuația.
Fie $x=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$, atunci ecuația devine:
$[k^2+2kt+t^2-2k-2t]+2k=k^2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k^2=2k+[t^2+2t(k-1)]=k^2-2k\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [t^2+2t(k-1)]=0$. Dacă $t=0\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$.
Fie $t>0$ și atunci pentru $k=1\Rightarrow [t^2]=0\Rightarrow x=1+t\Rightarrow x\in[1,2)=S_1$.
Și pentru $k=2\Rightarrow 0\leq t^2+2t<1\Rightarrow 0\leq t<-1+\sqrt{2}\Rightarrow$
$\Rightarrow x=2+t<1+\sqrt{2}$
$\Rightarrow x\in[2,1+\sqrt{2})=S_2\Rightarrow x\in[1,1+\sqrt{2})=S=S_1\cup S_2$.
Fie $k\geq 2\Rightarrow t^2+2t(k-1)-1<0$. $t<-k+1+\sqrt{k^2-2k+2}\Rightarrow$
$\Rightarrow x=k+t<1+\sqrt{k^2-2k+2}\Rightarrow$

$$x\in\left[k,1+\sqrt{k^2-2k+2}\right)\Rightarrow\bigcup_{k=2}^{\infty}\left[k,1+\sqrt{k^2-2k+2}\right)=S_3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\mathbb{Z}_-\cup[1,1+\sqrt{2})\bigcup_{k=2}^{n}\left[k,1+\sqrt{k^2-2k+2}\right)\text{ (deoarece }\mathbb{N}\subset S_3).$$

Concurs Suedia, 2003

226***. Fie $m=[x]$ și $t=\{x\}\in[0,1)$. Atunci $x=m+t$ și ecuația se mai scrie: $(m+t)^2=[(m+t)^2]+t^2\Rightarrow m^2+2mt=[m^2+2mt+t^2]=$
$=[2mt+t^2]+m^2\Rightarrow 2mt=[2mt+t^2]\in\mathbb{Z}$, deci $2mt\in\mathbb{Z}$.
Prin urmare, $t=\dfrac{k}{2m}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,2m-1\}$.
Așadar, pentru fiecare dintre valorile lui $m=1,2,3,\ldots,n-1$ numărul t poate lua exact $2m$ valori, iar pentru $m=n$ rezultă $t=0$ (deoarece $x\leq n\Leftrightarrow m+t=nt-t\leq n$). Rezultă că numărul soluțiilor ecuației, situate în intervalul $[1,n]$, este

$$\sum_{m=1}^{n-1}(2m)+1=2(1+2+\cdots+n-1)+1=2\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1.$$

Concurs Elveția, 1982

Scanned with OKEN Scanner

227**. Evident $x = 0$ nu verifică.
Fie $x < 0 \Rightarrow k = [x] < 0 \Rightarrow 2x^2 - 3[x] = -x + x - [x] + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 = 2k + 3 > 0 \Rightarrow k > -\frac{3}{2}$ și cum $k < 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow$
$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Fie $x > 0$ și atunci ecuația devine $2x^2 - 3k = k = x + x - k + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 2k - 3 = 0$.
Dacă $x \in (0,1) \Rightarrow k = 0$ și $2x^2 - 2x - 3 = 0$ nu are rădăcinile în $(0,1)$.
Analog, dacă $x \in [1,2) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 5 = 0$, care nu are rădăcini în intervalul $[1,2)$.
Fie $k \geq 2$ și atunci $x = \frac{1+\sqrt{7+4k}}{2}, k \leq \frac{1+\sqrt{7+4k}}{2} < k + 1 \Rightarrow k = 2$,
iar ecuația devine $2x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{15}}{2} \in (2,3)$. Așadar, soluțiile sunt $x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right\}$.

Traian Covaciu, O.L. 2003

228**. Pentru $x \geq 2 \Rightarrow x^2 - x + 2 \leq x \Rightarrow x^2 - 2x + 2 \leq 0$, fals.
$x < 2 \Rightarrow [x] - x + 2 = x^2 \Rightarrow [x] = x^2 + x - 2$, deci $x - 1 < [x] \leq x \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 \leq x \Rightarrow 1 < x^2 \leq 2, 1 < |x| < \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.
Pentru $x \in (1, \sqrt{2}] \Rightarrow 1 = x^2 + x - 2 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \in (1, \sqrt{2}]$. Pentru $x \in (-\sqrt{2}, -1) \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow x^2 + x = 0$,
$x \in \emptyset$. Așadar, $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

Soluție alternativă

Pentru $x < 2 \Rightarrow [x] = x^2 + x - 2$, pentru $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 + t(2k + 1) + k^2 - 2 = 0$ și din $\Delta = 4x + 9 \geq 0 \Rightarrow k \geq -2$.
Pentru $k = -2, -1, 0$ nu rezultă $t \in (0,1)$.
$t = \frac{-2k-1+\sqrt{4k+9}}{2} \in (0,1)$.
Pentru $k \geq 2 \Rightarrow t < 0$ și pentru $k = 1 \Rightarrow 4 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

229**. a) Evident, $x = 0$ și $x = 1$ sunt soluții.
Din $\{x\} + \{x\}^2 \in [0,2) \Rightarrow x^2 - x \in [0,2) \Rightarrow x \in (-1,0] \cup [1,2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x \in (-1,0] \Rightarrow \{x\} = x - [x] = x + 1$ și ecuația devine:
$x^2 - x = x + 1 + (x+1)^2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.
Dacă $x \in [1,2) \Rightarrow \{x\} = x - [x] = x - 1$ și ecuația devine:
$x^2 - x = x - 1 + (x-1)^2$, care este adevărată pentru orice $x \in [1,2)$.
Așadar, $x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\} \cup [1,2)$.

Concursul „Sinus", 2005

b) Observăm că $\forall\, x \geq 1 \Rightarrow 0 \geq x^2(1-[x]) = 1 + \{x\} \geq 1$, contradicție.

Dacă $x \in [0,1) \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\} \cap [0,1) = \emptyset$.

Dacă $x \in [-1,0) \Rightarrow 2x^2 = x + 1 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \cap [-1,0) = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, deci $x = -\frac{1}{2}$ este soluție. Dacă $x < -1 \Rightarrow x^2(1-[x]) > 2$, în timp ce $1 + \{x\} < 2$. Prin urmare, unica soluție este $x = -\frac{1}{2}$.

Gh. Gherasim, Argument, nr. 13

230.** Soluția 1
Rezultă $x^2 \in \mathbb{N}^*$ și fie $x = \sqrt{x}, x \in \mathbb{N}^*$ și $\left[\sqrt{x}\right] = a \Leftrightarrow a^2 \leq n < (a+1)^2$
$\Rightarrow n = a^2 + b$, cu $b < 2a + 1$. Ecuația devine:
$a^2 + b - 13a + 11 = 0$, unde $a < 13$ și $b < 27$.
Avem $4a^2 - 52a + 169 = 125 - 4b \Leftrightarrow (2a-13)^2 = 125 - 4b$, unde $125 - 4b$ trebuie să fie pătrat perfect $\Rightarrow b \in \{1,11,19,25\}$ și $b < 2a + 1 \Rightarrow$
$(a,b) \in \{(1,1),(12,1),(11,11),(10,19)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{n} \in \{\sqrt{2}, \sqrt{119}, \sqrt{132}, \sqrt{145}\}$.

Concurs Serbia, 2013

Soluția 2
Se notează $x = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1) \Rightarrow (k+t)^2 = 13k - 11 \Rightarrow$
$\Rightarrow t^2 + 2kt + k^2 - 13k + 11 \Rightarrow \Delta = 13k - 11 \geq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}^*$.
Convine numai $t_1 = -k + \sqrt{13k - 11} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{1,3,5\}$.

§ 9. Ecuații în care sunt implicate trinoamele de gradul II (B)

231*. a) Evident că numerele întregi sunt soluții și, de asemenea, numerele $x \in [0,1)$.
Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in (0,1)$ și atunci ecuația devine:
$[(k+t)^2] = k^2 \Rightarrow [2kt + t^2] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq t^2 + 2kt < 1$ (*)
$\Rightarrow t(t + 2k) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$. Atunci din $t^2 + 2kt - 1 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq t < \sqrt{k^2 + 1} - k$ și, prin urmare, soluțiile sunt de forma

$x = k + t, t \in \left[0, \sqrt{k^2+1} - k\right)$, de unde $x \in \left[k, \sqrt{k^2+1}\right), k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[k, \sqrt{k^2+1}\right)$. Prin urmare, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[k, \sqrt{k^2+1}\right) \cup \mathbb{Z}_- = S$

și evident $\mathbb{Z} \subset S$.

Concursul „Gh. Mihoc", 2010, Concurs Bulgaria, 2003

b) Ținând seama că $x = [x] + \{x\}$, avem

$\{x^2\} = \{([x] + \{x\})^2\} = \{[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2\} = \{2[x]\{x\} + \{x\}^2\}$.

Conchidem că egalitatea $\{x^2\} = \{x\}^2$ este posibilă atunci și numai atunci când $2[x]\{x\}$ este număr întreg.

De aici rezultă că $0 \le x \le 1$ sau $x = m + \frac{l}{2m}$, cu m număr întreg pozitiv și $0 \le l < 2m$.

Ion Cucurezeanu, Gh. Andrei

232**. Evident $x^2 - 3x \in \mathbb{Z}$ și fie $x^2 - 3x = k \in \mathbb{Z}, x^2 - 3x - k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{4k+9}}{2}$ cu $k = \left[\sqrt{4k+9}\right] \Rightarrow k \ge 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \le \left[\sqrt{4k+9}\right] < k+1 \Leftrightarrow k^2 \le 4k+9 < k^2+2k+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4k - 9 \le 0 \\ k^2 - 2k - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{13} \le k \le 2 + \sqrt{13} \\ k \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty) \end{cases} \Rightarrow k = 5 \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$.

Dacă $x = \frac{3 + \sqrt{4k+9}}{2}$, ecuația devine: $k = \left[-\sqrt{4k+9}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow k < 1, k \le -\sqrt{4k+9} < k+1 \Rightarrow -k - 1 < \sqrt{4k+9} \le -k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 2k - 8 < 0 \\ k^2 - 4k - 9 < 0 \\ k \le -1 \end{cases} \Rightarrow k \in \emptyset$. Prin urmare, $S = \left\{\frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right\}$.

233***. a) Notăm $2x^2 - 4x = y \Rightarrow [y+3] = [-y+3] \Rightarrow [y] = [-y]$, care este adevărată dacă și numai dacă $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \in \{0,2\}$.

b) <u>Soluția 1</u>

$[a] = [b] \Rightarrow |a - b| < 1 \Rightarrow |x^2 - 2x - 2| < 1$

$x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right) = M_1 \cup M_2$.

Dacă $x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow [x] = -1$ și ecuația devine:

$[x^2 - x - 2] = -1 \Leftrightarrow -1 \le x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] = M_1$.

Așadar, toate numerele din M_1 verifică ecuația. Fie $x \in M_2$ și cum

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2} \in (2,3)$ rezultă că $\forall\, x \in M_2$, avem
$[x] = 2$ și ecuația devine:
$[x^2 - 2x - 2] = 2, \quad 2 \le x^2 - 2x - 2 < 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$, deci $\forall\, x \in M_2$
verifică ecuația. Soluțiile sunt $x \in M_1 \cup M_2$.

Soluția 2

Dacă $[a] = [b] \Rightarrow |a-b| < 1$ și din ecuație $\Rightarrow |x^2 - 2x - 2| < 1$,
$-1 \le x^2 - 2x - 2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, 3).$$

Considerăm situațiile:

I. $x \in (-1, 1-\sqrt{2}) \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow [x^2 - 2x - 2] = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le x^2 - 2x - 2 < 0 \\ x \in (-1, 1-\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in \left\{\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)\right\} \cap (-1, 1-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \quad (1).$$

II. $x \in (1+\sqrt{2}, 3) \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow [x^2 - 2x - 2] = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \le x^2 - 2x - 2 < 3 \\ x \in (1+\sqrt{2}, 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in \left\{\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\right\} \cap (1+\sqrt{2}, 3) \Rightarrow$$

$$x \in \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \quad (2).$$

Din (1) și (2) rezultă

$$S = \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right).$$

Vasile Pop, R.M.G.

c) Ecuația se mai scrie: $[(x-2)^2] = [-2(x-2)^2 + 2]$.

Notăm $y = (x-2)^2_{\ge 0} \Rightarrow [y] = [2-y] \quad (1)$.

Fie $y = k + t, k \ge 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$ și atunci (1) devine:

$k = [-2k + 2 - 2t] \Rightarrow 3k - 2 = [-2t] \le 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow [2 - 2t] = 0$

Scanned with OKEN Scanner

$0 \le 2-2t < 1 \Rightarrow t \in \left(\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow y = t \in \left(\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < (x-2)^2 < 1,\ x \in \left(1, \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}, 3\right).$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă

d) Fie $[-2x^2-x+1] = [x^2-x+1] = k \in \mathbb{Z}$ și

$f(x) = -2x^2-x+1, g(x) = x^2-x+1, \text{Im}f = \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$ și $\text{Im}f = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$

Așadar, singurele valori ale lui k sunt 0 și 1.

Pentru $k=0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x^2-x+1 < 1 \\ 0 \le -2x^2-x+1 < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$

Pentru $k=1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le x^2-x+1 < 2 \\ 2 \le -2x^2-x+1 < 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$

Deci, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$

Florian Pană, G.M. nr. 8/1989

e) Deoarece $x^2-x+\frac{1}{2} \ge \frac{1}{4}$ și $-x^2+x+\frac{1}{2} \ge \frac{3}{4}$ rezultă că

$\left[x^2-x+\frac{1}{2}\right] \ge 0$ și $\left[-x^2+x+\frac{1}{2}\right] \le 0.$

Prin urmare, egalitatea este posibilă numai dacă: $\left[x^2-x+\frac{1}{2}\right] =$

$= \left[-x^2+x+\frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow 0 \le x^2-x+\frac{1}{2} < 1, 0 \le -x^2+x+\frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$

Ilie Diaconu. G.M. nr. 3/2005

f) Avem $\left[x^2+\frac{1}{2}\right] = k \ge 0 \Rightarrow -x^2+3x \ge 0 \Rightarrow x \in [0,3].$

$0 \le -x^2+3x \le \frac{9}{4} \Rightarrow [-x^2+3x] \in \{0,1,2\}.$

Pentru $k=0 \Rightarrow 0 < x^2+\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = S_1$

și $[-x^2+3x] = 0 \Leftrightarrow 0 \le -x^2+3x < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right) = S_2 \Rightarrow x \in S_1^4 \cap S_2 = \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = S'.$

Pentru $k=1$ și $\left[x^2+\frac{1}{2}\right] = 1 \Rightarrow 1 < x^2+\frac{1}{2} < 2 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup$

Scanned with OKEN Scanner

$\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = S'$ deci $[-x^2+3x]=1 \Rightarrow 1 \le -x^2+3x < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right) \cup \left(2,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] = S'' \Rightarrow x \in S' \cap S'' = \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right) = S'''.$

Pentru $k=2$ rezultă analog $S''' = \left[\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ și, prin urmare,

$x \in S' \cup S'' \cup S''' = \left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right) \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$

Concurs Slovenia

234***. Din ipoteză rezultă că $-2020x \in \mathbb{Z}$ și putem scrie
$[x^2-2020x]+m=0 \Leftrightarrow [x(x-2020)]+m=0.$
Făcând substituția $y=x-1010$, ecuația se mai scrie:
$[y^2-1010^2]+m=0 \Rightarrow [y^2]-1010^2+m=0.$
Observăm că dacă ecuația are o soluție nenulă y, are și soluția $-y$, deci un număr par de soluții. Prin urmare, se impune soluția $y=0 \Rightarrow m=1010^2$.

Sankt-Petersburg, 2012, A. Hrabnov

235***. a) Notăm $[x^2]=p \in \mathbb{N} \Rightarrow [x]=2-p$. Utilizând inegalitățile
$[x]^2 \le [x^2] \le x^2 < ([x]+1)^2 \Rightarrow (2-p)^2 \le p < (3-p)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} p^2-5p+4 \le 0 \\ p^2-7p+9 \le 0 \end{cases} \Rightarrow p \in [1,4] \cap \mathbb{N} \Rightarrow p \in \{1,2,3,4\},$
dar numai $p=1$ verifică. Deci, $[x^2]=1 \Rightarrow 1 \le x < \sqrt{2}$.

Emil Vasile

b) Rezultă că $3[x] \ge 2 \Rightarrow [x] \ge 1$. Notăm $[x]=k \in \mathbb{N}^*$.
Considerăm cazurile:

1) $[x]=1 \Rightarrow x \in [1,2) \Rightarrow \begin{matrix} \text{a) } x \in [1,\sqrt{2}) \\ \text{b) } x \in [\sqrt{2},2) \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 \le x^2 < 2 \Rightarrow [x^2]=1 \text{ și ecuația este verificată} \Rightarrow S_1 = [1,\sqrt{2}) \\ 2 \le x^2 < 4 \Rightarrow [x^2] \in \{2,3\} \text{ și ecuația nu este verificată} \end{cases};$

2) $[x]=2 \Rightarrow x \in [2,3) \Rightarrow x^2 \in [4,9)$
a) $x^2 \in [4,5) \Rightarrow [x^2]=4$ și $x \in [2,\sqrt{5}) = S_2$
$x^2 \in [6,7)$,
$x^2 \in [7,8), x^2 \in [8,9) \Rightarrow x^2 \in \{5,6,7,8\}$ și ecuația nu este verificată;
3) $[x]=k \ge 3 \Rightarrow [x^2]-3[x] \ge k^2-3k=k(k-3) \ge 0$
și ecuația nu are soluție.
Prin urmare, $x \in S_1 \cup S_2 = [1,\sqrt{2}) \cup [2,\sqrt{5})$.

O.L. București, 2016

Scanned with OKEN Scanner

236**. Notăm $x = x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:
$(k+t)^2 + 2kt = 9 - 3t^2 \Rightarrow 4t^2 + 4kt + k^2 = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow (k+2t)^2 = 9 \Rightarrow k + 2t = \pm 3.$

I. $k + 2t = 3 \Rightarrow k = 2, t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ sau $k = 3, t = 0 \Rightarrow x = 3.$

II. $k + 2t = -3 \Rightarrow k = -4, t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$ sau $k = -3, t = 0 \Rightarrow x = -3.$

Deci, $x \in \left\{\pm 3, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$.

Tamara Butnaru, O.L. Suceava, 2016

237**. a) Observăm că $[x] \geq 0$. Fie $x = [x] + \{x\} = k + t$ și egalitatea devine:
$k = [(k+t)^2]$ (1) $\Rightarrow k = k^2 + [2kt + t^2] \Leftrightarrow k - k^2 = [2kt + t^2] \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 - k \leq 0 \Rightarrow k \in \{0,1\}$.
Pentru $k = 0$ relația (1) devine $0 = [t^2] \Rightarrow x \in [0,1)$, dar și $x = 1$ verifică, deci $x \in [0,1]$. Pentru $k = 1$ relația (1) devine
$1 = [t^2 + 1] = [1 + 2t + t^2] = 1 + [t^2 + 2t] \Rightarrow [2t + t^2] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq t^2 + 2t < 1 \Rightarrow t \in [0, -1 + \sqrt{2})$, deci $x = 1 + t < \sqrt{2} \Rightarrow x \in [0, \sqrt{2})$.

b) <u>Soluția 1</u>

Facem substituția $x = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{4} = [y] \Rightarrow y^2 = 4[y] \geq 0.$
Notăm $[y] = k \geq 0$, $(k+t)^2 = 4k \Rightarrow t^2 + 2kt + k^2 - 4k = 0$
$t = -k + 2\sqrt{k} \Rightarrow k \in \{0,2,3,4\}$.
Pentru $k = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$
Pentru $k = 2 \Rightarrow t = 2\sqrt{2} - 2 \Rightarrow y_2 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{2}.$
Pentru $k = 3 \Rightarrow t = 2\sqrt{3} - 3 \Rightarrow y_3 = 2\sqrt{3} \Rightarrow x_3 = \sqrt{3}.$
Pentru $k = 4 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 2$. Așadar, $S = \{0,2,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

<u>Soluția 2</u>

Evident că $x \geq 0$, unde $x = 0$ verifică.
Notăm $x^2 = k \Rightarrow x = \sqrt{k}$ și ecuația devine:
$[2\sqrt{k} = k] \Rightarrow k \leq 2\sqrt{k} < k + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} k^2 - 4k \leq 0 \\ (k-1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0,2,3,4\} \Rightarrow x \in \{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}.$

Concurs Belarus

c) Evident că $x \geq 0$ și $x \in [0,1)$ sunt soluții deoarece ambii membri sunt egali cu zero pentru $x \in [0,1)$ și cu unu dacă $x = 1$.
Dacă notăm $\sqrt{[x]} = k \in \mathbb{N}^*$, atunci $[x] = k^2 \Rightarrow x \in k^2 + t, t \in [0,1)$ și
$\sqrt{x} = \sqrt{k^2 + \alpha} \in [k, k+1) \Rightarrow [\sqrt{x}] = k.$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [k^2, k^2+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

d) Rezultă ușor că $x \geq 0$ și $x = 0$ este soluție.

Avem $\begin{cases} x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2 \\ 2x - 1 < [2x] \leq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < 2x \\ 2x - 1 < x^2 \end{cases} \Rightarrow x \in [0,1+\sqrt{2}) - \{1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x \in [0,2+2\sqrt{2}) - \{2\} \Rightarrow [2x] \in \{0,1,2,3,4\}, x \neq 1.$

Considerăm cazurile:

1) $[2x] = 0 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow [x^2] = 0 = [2x] \Rightarrow S_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$;

2) $[2x] = 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow [x^2] = 0 \neq [2x] \Rightarrow S_2 = \emptyset$;

3) $[2x] = 2 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow x \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$ și $[x^2] = 2 \Rightarrow x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \Rightarrow$

$S_3 = \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$;

4) $[2x] = 3 \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow [x^2] = 3 \Rightarrow x \in [\sqrt{3}, 2) \Rightarrow S_4 = [\sqrt{3}, 2)$;

5) $[2x] = 4 \Rightarrow x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow [x^2] = 4 \Rightarrow x \in [2, \sqrt{5}) \Rightarrow S_5 = [2, \sqrt{5})$.

Așadar, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right) \cup [\sqrt{3}, 2) \cup [2, \sqrt{5})$.

238***. Ecuația devine: $x^2 + x - 0{,}99 = [x^2] + [x] \in \mathbb{Z}$ și dacă $x = \frac{a}{b}$, $(a,b) = 1$, atunci $\frac{100a^2 + 100ab - 99b^2}{100b^2} \Rightarrow 100 | 99b^2$ și cum $(100,99) =$

$= 1 \Rightarrow 100 | b^2$ și $b^2 = 100a(a+b) \Rightarrow 100 | b^2 \Rightarrow b = 10$.

Atunci $100 | a^2 + 10a - 9 \Rightarrow 100 | a^2 + 10a - 299 = (a-13)(a+13)$ și cum a este impar, rezultă că $4 | (a-13)(a+13) \Rightarrow 25 | (a-13)(a+13) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 25k + 13$ sau $a = 25k + 2$ și deci a este de forma $50k + 13$,

$50k + 27$ și deci $x = \frac{a}{b} = 5k + \frac{13}{10}$ sau $5k + \frac{27}{10}, k \in \mathbb{Z}$.

Bogdan Enescu, Mathematical Reflection, 2006-2007

239**. a) Ecuația se mai scrie $x^2 - 2x - 6 = [-3x] = k$ (1),

$x^2 - 2x - 6 - k \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{k+7} \Rightarrow k \geq -7$. Pentru $x_1 = 1 + \sqrt{k+7}$, din (1) rezultă $k = [-3 - 3\sqrt{k+7}] \Rightarrow k + 3 = [-3\sqrt{k+7}]$ (2) $\Rightarrow$

$k \leq -3 \Rightarrow\Rightarrow k \in [-7,-3], k + 3 \leq -3\sqrt{k+7} < k + 4 \Rightarrow$

$-k - 4 < 3\sqrt{k+7} \leq -k - 3 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow x = 2$, care verifică.

Dacă $x = 1 - \sqrt{k+7}, k \geq 7$, atunci din (1) rezultă $k = [-3 + 3\sqrt{k+7}] \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow k+3=\left[3\sqrt{k+7}\right], k\geq -3 \Rightarrow k+3\leq 3\sqrt{k+7}<k+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k^2-3k-54\leq 0 \\ k^2-k-47>0 \end{cases} \Rightarrow k\in\{8,9\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2=1-\sqrt{15} \\ x_3=1-\sqrt{16}=-3 \end{matrix}$.

Rezultă că $x\in\{2,-3,1-\sqrt{15}\}$.

b) Pentru punctul b) se procedează analog sau dacă facem substituția $x\to x+1$ în a) rezultă b), deci ecuația din b) are soluțiile $x\in\{1,-4,-\sqrt{15}\}$.

Concurs Lituania, 1993

240**. Evident că expresiile de sub semnul radical sunt strict pozitive, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Notăm $y=x^2+2x+7\geq 6$ și egalitatea devine:

$[y+4]=\sqrt{y}+\frac{1}{2}=k\in\mathbb{Z}\ (*), k\geq 2 \Rightarrow y=k^2-k+\frac{1}{4}$ și relația $(*)$

devine: $\left[\sqrt{k^2-k+\frac{17}{4}}\right]=k \Rightarrow \sqrt{k^2-k+\frac{17}{4}}-1<k\leq\sqrt{k^2-k+\frac{17}{4}}$,

de unde rezultă $k\in\{2,3,4\} \Rightarrow y\in\left\{\frac{9}{4},\frac{25}{4},\frac{49}{9}\right\} \Rightarrow x\in\left\{-\frac{7}{2},-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right\}$.

Cristinel Mortici, G.M. nr. 1/2014

241***. a) Evident că $x\neq 0$ și $k>0$. Avem $[x^2]+1\geq x^2$ și $2[x]\leq 2x$, deci $x<2$. Evident $x\in(0,1)$ nu verifică și $x=1$ este soluție.

Fie $x\in\left(1,\sqrt{2}\right)$ care verifică ecuația.

Dacă $x\in\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow x^2\in[2,3)$, care nu verifică. Se obține $x\in\left[1,\sqrt{2}\right)$.

Laurențiu Panaitopol, Concurs „Matematica – modus vivendi", 2008

b) Notăm $[x]=k\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x^2]=3k-2\geq 0, k\geq\frac{2}{3} \Rightarrow k\in\mathbb{N}^*$, deci

$[x]\leq x \Rightarrow k^2\leq[x^2] \Rightarrow 3k-2\geq k^2 \Rightarrow k^2-3k+2\leq 0 \Rightarrow k\in\{1,2\}$.

Pentru $k=1 \Rightarrow [x^2]=1 \Rightarrow 1\leq x^2<2 \Rightarrow x\in\left[1,\sqrt{2}\right)$.

Pentru $k=2 \Rightarrow [x^2]=4 \Rightarrow x\in\left[2,\sqrt{5}\right) \Rightarrow x\in\left[1,\sqrt{2}\right)\cup\left[2,\sqrt{5}\right)$.

O.L. București, 2016

c) Notăm $[x]=k$ (1) $\Rightarrow [x^2]=3k+1 \Rightarrow k\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3k+1\leq x^2<3k+2 \Rightarrow \sqrt{3k+1}\leq x<\sqrt{3k+2}$ (2).

Avem $[x]\leq x \Rightarrow [x]^2\leq x^2 \Rightarrow [x]^2\leq[x^2]=3k+1 \Rightarrow k^2\leq 3k+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-3k-1\leq 0 \Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}$.

Pentru $k=0$, din (1) și (2) rezultă $x\in[0,1)$ și $x\in\left[1,\sqrt{2}\right) \Rightarrow x\in\emptyset$.

Pentru $k=1$, din (1) și (2) rezultă $x\in[1,2)$ și $x\in\left[2,\sqrt{5}\right) \Rightarrow x\in\emptyset$.

Pentru $k=2$, din (1) și (2) rezultă $x\in[2,3)$ și $x\in\left[\sqrt{7},\sqrt{8}\right) \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x \in [\sqrt{7}, \sqrt{8}) = S_1$.

Pentru $k = 3$, din (1) și (2) rezultă $x \in [3,4)$ și $x \in [\sqrt{10}, \sqrt{11}) \Rightarrow$ $x \in [\sqrt{10}, \sqrt{11}) = S_2 \Rightarrow x \in S_1 \cup S_2 = [\sqrt{7}, \sqrt{8}) \cup [\sqrt{10}, \sqrt{11})$.

242**. Ecuația se mai scrie:

$[-x^2 + 5x - 1] = [x^2 - 5x + 9] = k$

și cum $-x^2 + 5x - 1 \leq \frac{21}{4} \Rightarrow [-x^2 + 5x - 1] \leq 5$ (1),

iar din $x^2 - 5x + 9 \geq \frac{11}{4} \Rightarrow [x^2 - 5x + 9] \geq 2 \Rightarrow k \in \{2,3,4,5\}$ (2).

Prin urmare, se pot ivi cazurile:

1) $[-x^2 + 5x - 1] = [x^2 - 5x + 9] = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq -x^2 + 5x - 1 < 3 \\ 2 \leq x^2 - 5x + 9 < 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \leq 8 < 6$, fals.

2) $[-x^2 + 5x - 1] = [x^2 - 5x + 9] = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq -x^2 + 5x - 1 < 4 \\ 3 \leq x^2 - 5x + 9 < 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \leq 8 < 8$, fals.

3) $[-x^2 + 5x - 1] = [x^2 - 5x + 9] = 5 \Rightarrow \begin{cases} 5 \leq -x^2 + 5x - 1 < 6 \\ 5 \leq x^2 - 5x + 9 < 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \leq 8 < 12$, fals.

4) $[-x^2 + 5x - 1] = [x^2 - 5x + 9] = 4 \Rightarrow \begin{cases} 4 \leq -x^2 + 5x - 1 < 5 \\ 4 \leq x^2 - 5x + 9 < 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \leq 8 < 10$. Atunci $\begin{cases} x^2 - 5x + 5 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 5 = 0 \\ x \in (1,4) \\ \\ x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (1,2) \cup (3,4)$ și $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Rămân soluțiile $x = \left\{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

243*. Ecuația se mai scrie:

$[x] + 1 = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow x \leq (x^2 - 1)^2 \leq x + 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^4 - 2x^2 - k \leq 0$.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 2x^2 - k$, pentru care rădăcinile ecuației

$$f(x) = 0 \text{ sunt } -1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pe intervalul $(-\infty, -1)$ f este descrescătoare și $f(-2) = 10$, deci nu avem soluții pe intervalul $(-\infty, -2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe intervalul $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ f este crescătoare, cu $f(2)=6$, deci pe intervalul $[2, \infty)$ nu avem soluţii.

Aşadar, $[x] \in \{-2,-1,0,1\}$. Din ecuaţia $x^4-2x^2-k=0$, unde $k \in \{-2, \pm 1\}$.

Pe intervalul $[-2,-1)$ nu avem soluţii, dar pe $[-1,0)$ avem soluţia $x=-1$.

Pe intervalul $[1,2)$ avem soluţia $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Avem $S=\left\{-1,0,\sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$ şi suma pătratelor este $2+\sqrt{2}$.

A.S.E., 2002

244***. Evident, pentru $[x]=0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$ şi pentru $\{x\}=0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ ecuaţia este verificată. Pentru $[x]=-1 \Leftrightarrow x \in [-1,0) \Leftrightarrow [-x\{x\}]=$ $=0$ (deoarece $-x\{x\} \in (0,1)$). Prin urmare, avem soluţiile $x \in \mathbb{Z} \cup [-1,1]$. Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ şi cum pentru $t=0$ şi $k=0$, $k=-1$ rezultă soluţiile de mai sus, vom considera $k \in \mathbb{N}^*$ şi $k \leq -2$. Ecuaţia devine $[kt(k+t)]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq kt^2+tk^2<1$ şi pentru $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t^2k+tk^2-1<0 \quad (*)$, cu

$$\Delta = k^4+4k>0 \Rightarrow 0<t<\frac{-k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k} \Rightarrow x=k+t,$$

$$\text{cu } t \in \left(0, \frac{-k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[k, \frac{k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}\right) = I_k, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \in \bigcup_{k \geq 1} I_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[k, \frac{k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}\right) = S'. \text{ Pentru } k \leq -2 \text{ rezultă}$$

$$t>\frac{-k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}>1 \text{ sau } 0<t<\frac{-k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}<1 \Rightarrow k \leq -2 \text{ şi}$$

$$\text{mai avem soluţiile } x \in \left[k, \frac{k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}\right) = J_k, k \geq -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{k \leq -2} \left[k, \frac{k^2+\sqrt{k^4+4k}}{2k}\right) = \bigcup_{k \leq -2} J_k = S''.$$

Prin urmare, $x \in \mathbb{Z} \cup [-1,1] \cup S' \cup S''$.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

245**. Vom utiliza relația $[-x]=\begin{cases}-[x] & , \text{ dacă } x\in\mathbb{Z}\\ -1-[x], & \text{dacă } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

Avem $\Delta_1=[b]^2-4[a][c]$

$\Delta_2=[-b]-4[-a][-c]=(-1-[b])^2-4(-1-[a])(-1-[b])=$

$=[b]^2-4[a][c]+2[b]-4[c]-4[a]-3=\Delta_1+2[b]-4[c]-4[a]-3.$

Prin urmare, dacă $\Delta_1<0\Rightarrow\Delta_2<0$, iar dacă $\Delta_2\geq 0\Rightarrow\Delta_1\geq 0$.

Gh. Alexe, Brăila, Trident, 2007

246**. Utilizăm identitatea lui Hermite și obținem:

$$b[x]^2=a\left([2x]-\left[x+\frac{1}{2}\right]+b^2c-ac\right)\Rightarrow b[x]^2=a[x]+b^2c-ac\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b[x]^2=a[x]+b^2c-ac\Rightarrow b[x]^2-a[x]-b^2c+ac=0 \qquad (*).$$

Notăm $[x]=k\in\mathbb{Z}$ și atunci $(*)$ devine:

$$bk^2-ak-b^2c+ac=0, \text{ cu } \Delta=\frac{a\pm(a-2bc)}{2b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1=\frac{a}{b}-c, k_2=c\in\mathbb{N}^*.$$

Discuție α) Dacă $b|a\Rightarrow a=bd\Rightarrow y_1=d-c, y_2=c\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in[d-c,d-c+1)\cap[c,c+1).$

β) Dacă $b\nmid a\Rightarrow x\in[c,c+1)$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Arhimede nr. 11-12/2002

247*. Afirmațiile sunt echivalente.

Din $[a]\leq a, [c]\leq c\Rightarrow[a][c]\leq ac$ și $[b]\leq b<0\Rightarrow[b]^2\geq b^2\Rightarrow$

$\Rightarrow[b]^2-4[a][c]\geq b^2-4ac$, de unde rezultă a) și b).

Gh. Andrei, O.L., 1984

248***. a) Avem $\sigma_1=3, \sigma_2=13$, deci relația de recurență

$\sigma_{n+1}-3\tau_n-2\tau_{n-1}=0$

și prin inducție se deduce că σ_n este număr impar.

b) Evident că $x_2\in(-1,0)$. Pentru n par,

$[x_1^n]-n=[\sigma_n-x_2^n]-n=[\sigma_n-1+1-x_2^n]-n=$

$=\sigma_n-1+[1-x_2^n]-n=\sigma_n-n-1.$

Pentru n impar,

$[x_1^n]-n=[\sigma_n-x_2^n]-n=[\sigma_n+(-x_2^n)]-n=\sigma_n-n$

(deoarece $-x_2^n\in(0,1)$) $\Rightarrow[x_1^n]-n$ este par.

Maria Pop, Concursul „Argument", 2011

249**. Din $x-1<[x]\leq x\Rightarrow ax-a<a[x]\leq ax\Rightarrow$

$\Rightarrow ax-a<[a]x^2+\{a\}\leq ax\Rightarrow[a]x^2-ax+\{a\}\leq 0 \qquad (1).$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm situațiile:

1) $a \geq 1$, și atunci din (1) rezultă $x_1 = \frac{\{a\}}{[a]}$ și $x_2 = 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{\{a\}}{[a]}, 1\right] = S_1$.

Dacă $x = 1 \Rightarrow [x] = 1$ și ecuația devine $[a] - a + \{a\} = 0$, adevărată oricare ar fi $a \geq 1$.

Dacă $x \in \left[\frac{\{a\}}{[a]}, 1\right) \Rightarrow [x] = 0$ și ecuația devine $[a]x^2 + \{a\} = 0$,

din care rezultă cazurile: $\alpha)$ $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = 0$; $\beta)$ $a \notin \mathbb{N}^*$,

ecuația nu are soluții.

2) $a \in (0,1) \Rightarrow [a] = 0$ și $\{a\} = a$, iar ecuația devine: $-a[x] + a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x \in [1,2)$.

În final, avem soluțiile:

a) pentru $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = \{0,1\}$;

b) pentru $a \geq 1, a \notin \mathbb{N}^* \Rightarrow S = \{1\}$;

c) pentru $a \in (0,1) \Rightarrow S = [1,2)$.

Florin Bojor, Argument, 2005

250. Presupunem prin absurd că există $x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}^*$, cu $(n, m) = 1$,

astfel încât $\left\{\frac{m^2}{n^2}\right\} + \left\{\frac{m}{n}\right\} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} + \frac{m}{n} = \left[\frac{m^2}{n^2}\right] + \left[\frac{m}{n}\right] + 1 = p \in \mathbb{Z}$.

Avem $m^2 + m^n \equiv pn^2 \Leftrightarrow m^2 \equiv n(pn - m) \Rightarrow n|m$, fals.

(Evident, dacă $n = 1$, egalitatea din enunț nu poate avea loc.)

251***. Observăm că dacă $x \neq 0$ este soluție pentru A, atunci $-x$ este soluție. Pentru ca A să aibă trei elemente (A are cel mult 4 elemente), se impune ca $0 \in A$, deci $A = \{0, \pm p\}, p \neq 0$. Considerăm cazurile:

<u>Cazul I</u>

$|A| = 3 \Rightarrow A = \{0, \pm p\}$, cu $p > 0 \Rightarrow b = 0$ și cum $p^2 + ap = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -p$ (1). Dar cum $|A \cap B| = 3$ și $|A| = 3$ rezultă că $A \cap B = A \Rightarrow$

$\Rightarrow A \subset B$, adică $\{0, \pm p\} \subset B$ și numerele $0, [p], [-p]$ verifică ecuația

$y^2 + \alpha y + \beta = 0$, cu $[x] = y \Rightarrow \beta = 0$ ($[p] = 0$ sau $[-p] = [p] = k \in \mathbb{Z}$).

Dacă $[-p] = [p] \Rightarrow p = 0$, contrar alegerii lui $p > 0$, deci se impune ca $[p] = 0$

$\Rightarrow p \in (0,1)$ și atunci din (1) rezultă $a = -p \Rightarrow a \in (-1,0) \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$.

<u>Cazul II</u>

$|A| = 4 \Rightarrow A = \{\pm p, \pm q\}$ cu $q > 0, p \neq q, p > 0$.

Dar cum p și q sunt rădăcinile ecuației $x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow p + q = -a$ (2).

Scanned with OKEN Scanner

Remarcăm că orice submulțime cu 3 elemente opuse a lui A conține două elemente opuse, deci submulțimea $A \cap B$ a lui A conține 3 elemente $\Rightarrow p, -p \in A \cap B$. Deoarece $p, -p \in B$ rezultă că $[p]$ și $[-p]$ sunt soluții ale ecuației $y^2 + \alpha y + \beta = 0$ și cum ecuația de gradul doi nu mai are alte soluții rezultă că $B = \{x \in \mathbb{R} | [x] = [p] \text{ sau } [x] = [-p]\}$.

Distingem două subcazuri, după cum $p \in \mathbb{Z}$ sau $p \notin \mathbb{Z}$.

Subcazul 1

Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și atunci rezultă că $B = [-p, -p+1) \cup (p, p+1]$ și deducem că singurele numere întregi din B sunt $-p$ și p.

Să presupunem că $a \in \mathbb{Z}$. Atunci din (2) rezultă că $q \in \mathbb{N}^*$. Mulțimea $A \cap B$ fiind inclusă în A nu conține, pe lângă numerele p și $-p$, unul din numerele q sau $-q$ și întrucât $A \cap B \subset B$, rezultă că B conține unul din numerele q sau $-q$. Dacă $q \in B$, atunci $q = p$, contradicție. Așadar, când $p \in \mathbb{Z}$, rezultă că $a \notin \mathbb{Z}$.

Subcazul 2

$p \notin \mathbb{Z}$.

Fie $[p] = k \in \mathbb{N}$. Atunci $[-p] = -k - 1 \Rightarrow B = [-k-1, -k) \cup (k, k+1]$.

Să presupunem că $a \in \mathbb{Z}$. Din (2) rezultă că $q \notin \mathbb{Z}$, ca și în subcazul 1, unul din numerele q sau $-q$ este în B. Dacă $q \in B$ și $q \notin \mathbb{Z} \Rightarrow -q \notin B$, iar dacă $-q \in B$ și $q \notin \mathbb{Z} \Rightarrow q \in B$. Așadar, B conține ambele numere q și $-q$ și cum le conține și pe p și $-p$ (căci $A \cap B$ le conține) rezultă că $A = \{-p, -q, p, q\} \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ are 4 elemente, fals. Așadar, când $p \notin \mathbb{Z}$, rezultă că $a \notin \mathbb{Z}$.

Adrian Ghioca, O.N. 1997, G.M. nr. 4-5/1997

252***. a) Din $x - 1 < [x] \leq x, 2x - 1 < [2x] \leq 2x$ și $x^2 - 1 < [x^2] \leq x^2$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$ și $x^2 - 3x - 1 < 0 \Rightarrow x \in [0,1) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] \in \{0,2,3\}$.

I. Dacă $[x] = 0 \Rightarrow [x^2] = [2x] \Rightarrow S_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

II. Dacă $[x] = 2 \Rightarrow 2 + [2x] = x^2$.

$\alpha) x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow [x^2] = 6 \Rightarrow S_2' = \left[\sqrt{6}, \frac{5}{2}\right)$, iar dacă $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow [x^2] = 7 \Rightarrow S_2'' \in [\sqrt{7}, \sqrt{8}) \Rightarrow S_2 = S_2' \cup S_2'' = \left[\sqrt{6}, \frac{5}{2}\right) \cup [\sqrt{7}, \sqrt{8})$.

Scanned with OKEN Scanner

III. Dacă $[x]=3 \Rightarrow 3+[2x]=x^2$. Considerăm situaţiile:

$x \in \left[3, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow [x^2]=9 \Rightarrow x \in [3, \sqrt{10}) = S_3'$, iar dacă

$x \in \left[\frac{7}{2}, 4\right) \Rightarrow [x^2]=10 \Rightarrow x \in \emptyset = S_3''$.

Aşadar, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\sqrt{6}, \frac{5}{2}\right) \cup [\sqrt{7}, \sqrt{8}) \cup [3, \sqrt{10})$.

b) Dacă $[x]<0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow -x \leq -[x]$ şi $-2x \leq -[2x] \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 < [x][2x] = [x^2] \leq x^2 \Rightarrow x^2 \leq 0$, fals. Prin urmare, $x \geq 0$.
De remarcat că $x \in [0,1)$ verifică, deci $S_1 = [0,1)$. Evident că $x=1$ nu verifică. Dacă $x>1 \Rightarrow x-1<[x], 2x-1<[2x], [x^2] \leq x^2 \Rightarrow$
$(x-1)(2x-1)<x^2$

$$\Rightarrow x^2-3x+1<0 \Rightarrow x \in \left[1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow [x] \in \{1,2\}.$$

Cazul $[x]=1 \Rightarrow [2x]=[x^2]$, de unde rezultă situaţiile:

$\alpha)\ x \in \left[1, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow [x^2]=2 \Rightarrow x \in \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right) = S_2'$;

$\beta)\ x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow [x^2]=3 \Rightarrow x \in [\sqrt{3}, 2) = S_2'' \Rightarrow$

$\Rightarrow S_2' \cup S_2'' = \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right) \cup [\sqrt{3}, 2)$. Cazul $[x]=2 \Rightarrow 2[2x]=[x^2]$:

$\alpha)\ x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow [x^2]=8 \Rightarrow x \in \emptyset$;

$\beta)\ x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right) \Rightarrow [x^2]=10 \Rightarrow x \in \emptyset$.

Aşadar, $x \in S_1 \cup S_2 = [0,1) \cup \left[\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right) \cup [\sqrt{3}, 2)$.

Carmen Botea

253***. Cu notaţia $\{x\}=t \in [0,1)$ ecuaţia devine:

$$\left[t \cdot \frac{2-t}{1-t}\right] = \left[\frac{t}{1-t}\right] \Leftrightarrow \left[t\left[1+\frac{1}{1-t}\right]\right] = \left[\frac{1}{1-t}-1\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[t\left[1+\frac{1}{1-t}\right]\right] = -1+\left[\frac{t}{1-t}\right] \quad (1). \text{ Notăm } \left[\frac{t}{1-t}\right] = k \geq 1 \quad (2).$$

Relaţia (1) devine: $[t(1+k)] = k-1$ (3).

Din (2) rezultă $k \leq \frac{1}{1-t} < k+1 \Leftrightarrow k(1-t) \leq 1 \leq (1-t)(k+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k-kt \leq 1 < k+1-(k+1)t$ (4). Din partea stângă rezultă

$k-1 \leq kt \Rightarrow t+k-1 \leq t(k+1) \Rightarrow k-1 \leq t+k-1 \leq t(k+1)$ și din partea dreaptă (4) rezultă $t(k+1) < k$. Rezultă $k-1 < t(k+1) < k \Rightarrow$ $\Rightarrow [t(k+1)] = k-1$. Prin urmare, $x \in \mathbb{R}$.

Concurs Israel

254***. În baza identității (Cap. II, ex. 77) rezultă că membrul stâng este egal cu $\{nx\}$ și atunci ecuația devine $\{nx\} = x$. Pentru $n = 1 \Rightarrow x \in [0,1)$.

$n \geq 2 \Rightarrow nx - [nx] = x \Rightarrow (n-1)x - [nx] = k \Rightarrow x_k = \frac{k}{n-1}, k \in \mathbb{Z}$ (*).

Din $nx - 1 < [nx] \leq nx \Leftrightarrow \frac{nk}{n-1} - 1 < k \leq \frac{nk}{n-1} \Rightarrow k \geq 0$ și $k < n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{0,1,2,\ldots,n-2\}$. Din (*) rezultă $x_k = \frac{k}{n-1}, k \in \{0,1,2,\ldots,n-2\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 9

Ecuaţii cu parametri

$\oint$ 1. Nivel mediu-avansat

1. Să se rezolve ecuaţia: $x + [x] = a,\ a > 0$.

2. Să se rezolve ecuaţia: $[x + \{x\}] = a$.

3. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $[mx] = m[x]$, unde $m \in \mathbb{Z}^*$;

b) $[x + m]\{x + m\} = xm$, unde $m \in \mathbb{Z}^*$.

4. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2[x] = 3x$;

b) $m[x] = (m + 1)x,\ m \in \mathbb{N}^*$;

c) $m[x] = mx$;

d) $[3x] - [x] = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$.

5. Fie p un număr prim fixat. Să se rezolve ecuaţia: $p\{x\} = x + [x]$.

6.** Să se rezolve ecuaţiile următoare. Câte soluţii are fiecare?

a) $\{x\} - \{nx\} = x,\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\{nx\} - \{x\} = nx,\ n \in \mathbb{N}^*$.

7. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei: $[x] = \{x\}\sqrt{m}$, unde $m \in \mathbb{N}^*$.

8. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei: $x = \{nx\},\ n \in \mathbb{N}^*$.

9. Să se rezolve ecuaţia: $|x - n| + [x + n] = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fixat. Să se rezolve ecuaţia: $n[x] + (n + 1) = (n + 1)x$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\{x\sqrt{3}\} = \{x\sqrt{2}\}$;

b) $\{x\sqrt{p}\} = \{x\sqrt{q}\},\ p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q$ şi în care cel puţin unul nu este pătrat perfect.

12. Să se rezolve ecuaţia: $[x] \cdot \{x\} = nx,\ n \in \mathbb{N}^*$.

13*. Utilizând relaţia $\{m\{x\}\} = \{mx\}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, m \in \mathbb{Z}$, să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left\{4\left\{\frac{x}{2}\right\}\right\} = 2x + 1$;

b) $3\left\{2\left\{\frac{x}{3}\right\}\right\} = 2x - 6$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $5\left\{-3\left\{\frac{x}{5}\right\}\right\} = -3x - 20;$

d) $n\left\{-m\left\{\frac{x}{n}\right\}\right\} = -mx - pnm; m, n, p \in \mathbb{N}^*.$

14**. Să se rezolve ecuația: $\left\{\frac{p+x}{1+[x]}\right\} = x^3 - x^2 + x, \forall\, p \in \mathbb{Z}.$

15. Să se rezolve și să se discute mulțimea soluțiilor ecuației: $[x]\{x\} = a$, $a \geq 0$.

16. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*, a < b, a$ nu este divizor al lui b. Să se rezolve ecuația:

$$a[x] - b\{x\} = 0.$$

17**. Să se rezolve ecuația: $\{nx\} - \{(n+1)x\} = x,\ n \in \mathbb{N}^*.$

18. Să se rezolve ecuația: $[x] + n\{x\} = m,\ m, n \in \mathbb{N}^*, m > n.$

19**. Să se rezolve ecuația: $[|x - a|] + |[x - a]| = 1.$

20. Să se rezolve ecuația: $\alpha\{x\} = \{\alpha x\},$ unde $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$

21. Să se rezolve ecuația: $\left\{\frac{[x]+1}{n}\right\} = nx + \frac{1}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

22. Să se rezolve ecuația: $\left[2\sqrt{p}\cdot x\right]\left\{2\sqrt{p}\cdot x\right\} = px^2 - 1$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ nu este pătrat perfect.

23. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x}{n}\right] = [x - n]$, unde $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$, fixat.

24. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x-n}{n+1}\right] = \frac{x-n-1}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

25**. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve și să se discute ecuația: $[nx] = m\{nx\}$.

26***. Să se rezolve ecuația: $2\{x\} = p - [x + q]$, unde p și q sunt numere prime.

27. Să se arate că, dacă $a > 0$, ecuația: $\left[\frac{25}{x} + \frac{49}{a}\right] = \left[\frac{144}{x+a} - 1\right]$ nu are soluții strict pozitive.

28. Fie $a \in \mathbb{N}^*, a \geq 2$. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{ax+1}{x+a}\right] = \frac{(a+1)x+1}{x+a+1}.$

29**. Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și expresia $E_k(x) = [-kx] + [kx],\ x \in \mathbb{R}.$

a) Să se determine valorile lui $E_k(x)$.

b) Calculați $E_1(x) + E_2(x)$.

c) Să se rezolve $E_1(x) + E_2(x) + \cdots + E_n(x) = 0.$

30. Fie $b > a > 0$. Să se rezolve ecuația: $a[x] = b\{x\}$.
Câte soluții are ecuația?

31**. Să se rezolve ecuațiile următoare, unde $a < b$:

a) $[x - a]^2 + [x - b]^2 = 0;$

b) $\{x - a\}^2 + \{x - b\}^2 = 0.$

Scanned with OKEN Scanner

32**. Să se rezolve ecuația: $\{x\} = \frac{x + [x]}{p}, p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

33**. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$, fixate.

Să se rezolve ecuația $\left\{\frac{x}{n}\right\} = \left\{\frac{x}{n+m}\right\}, x \in (0, n(n+m))$.

Câte soluții are ecuația?

34. Fie ecuația: $\frac{[x]}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] = 1 - \frac{m}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

Să se rezolve ecuația și să se discute în funcție de parametrul $m \in \mathbb{N}^*$.

35**. Să se rezolve ecuația: $\frac{a}{\{x\}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]}$, unde $a \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$.

36. Să se determine soluțiile $x > 1$ ale ecuației: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = mx, m \in \mathbb{N}^*$.

37. Să se rezolve ecuația: $[x] + \frac{a}{[x]} = \{x\} + \frac{a}{\{x\}}$, unde $a > 0$.

38**. Să se rezolve ecuația: $a[x] + \frac{b}{[x]} = a\{x\} + \frac{b}{\{x\}}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*, a \geq b$.

39*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, fixate. Rezolvați ecuația: $n[x] + \frac{1}{[x]} = n\{x\} + \frac{1}{\{x\}}$.

40**. Să se rezolve ecuația: $n[x] + \frac{1}{[x]} = n\{x\} + \frac{1}{x}, n \in \mathbb{N}$.

41**. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se rezolve și să se discute ecuațiile:

a) $[x]^2 + \left[x + \frac{1}{2}\right] = a + [2x]$;

b) $[x]^2 + [2x] = a + \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

42*. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{3x^2 - x + 3}{2x^2 + 2x + 2}\right] - \left[\frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 2x + 2}\right] = m, m \text{ parametru real.}$$

43**. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuația: $[x - m] + |x - m| = mx$.

44. Se consideră ecuația: $\left[\frac{m^2x + m^2 - 1}{2}\right] = \frac{2x + 3}{5}, m \in \mathbb{Z}$.

Dacă $A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ este soluție a ecuației}\}$ și $B = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} A_m$,

să se determine B și $S = \sum_{x \in B} x$.

45. Fie ecuația: $\left[\frac{m^2x - 1}{2}\right] = \frac{2x + 1}{5}, m \in \mathbb{Z}^*$.

Să se determine suma S a rădăcinilor ecuației.

Scanned with OKEN Scanner

46**. Să se rezolve ecuația: $[nx] = x^{n^2} - 1$, pentru $x > 1$ și $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

47**. Să se rezolve ecuația: $[x^2 + a] = \frac{x+3}{2}$, unde a e un parametru real.

48. Fie ecuația: $\left[\frac{x+a}{2}\right] = \frac{x+1}{3}, a \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve ecuația pentru $a = 1$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că mulțimea soluțiilor este $S = \{-1,2\}$.

c) Există valori ale lui a pentru care ecuația are cel puțin 3 soluții?

49***. Pentru ce valori întregi ale lui m, ecuația: $\left[\frac{m^2x - 13}{1999}\right] = \frac{x-12}{2000}$ are 1999 soluții reale și distincte?

50**. Să se rezolve ecuațiile:

a) $m\left[\frac{3x-4}{4}\right] + \left[\frac{3x-10}{4}\right]^2 = m\left[\frac{3x-4}{2}\right] - m^2 - 8m - 10;$

b) $m\left[\frac{3x+8}{4}\right] + \left[\frac{3x-10}{4}\right]^2 = m\left[\frac{3x-4}{2}\right] - m^2 - 5m - 10,$

unde m este parametru real. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ ecuațiile au soluții?

51. Fie $m \in \mathbb{N}^*, m \geq 3$. Să se determine cea mai mică soluție pozitivă a ecuației: $\frac{1}{\{x^2\}} + \frac{1}{\{x\}^2} = m$.

52*. Fie $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, fixat. Să se determine cea mai mică soluție pozitivă a ecuației: $\{x^2\} - \{x\}^2 = \frac{1}{m}$.

∮ 2. Nivel avansat

53. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{8}\right];$

b) $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{m}\right], m < n.$

54. Să se rezolve ecuația: $[mx] = nx$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

55***. Dacă $n \in \mathbb{Z}^*$ este fixat, să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

56**. Să se determine numărul soluțiilor naturale ale ecuației:

$$\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{x}{m+1}\right], \text{unde } m \in \mathbb{N}^*.$$

57. Să se rezolve ecuația: $x - [x] + \left[\frac{x}{n}\right] = a, a \in \mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

58**. Să se rezolve ecuația: $\frac{x}{\{x+k\}} - k^2[x]\{x\} = 1$, unde $k \in \mathbb{N}$.

59. Determinați numerele reale a și b astfel încât: $\{ax\} + \{bx\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

60. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care: $\left|\left[\frac{x}{2}\right]\right| = \left|\left[\frac{x}{3}\right]\right| = \cdots = \left|\left[\frac{x}{n}\right]\right|$, unde $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

61. Să se rezolve și să se discute ecuațiile, unde $a \in \mathbb{R}^*$:

a) $ax + b = [a]x + [b]$;

b) $ax + b = \{a\}x + \{b\}$.

62. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, să se rezolve ecuația:

$$a\left[x + \frac{1}{2}\right] + b[x]^2 = a[2x] + b^2c - ac. \text{ (Discuții.)}$$

63***. Să se rezolve ecuația: $x + \frac{m^2}{x} = [x] + \frac{m^2}{[x]}, m \in \mathbb{N}^*$.

64**. Fie $a, b \in \mathbb{N}$, cu $a^2 > b$. Să se arate că ecuația:

$\left[\sqrt{x^2 + 2ax + b}\right] = x + a - 1$ are o infinitate de soluții.

65. Să se demonstreze că $(\forall)\, p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0$, pentru

$[x] + p\{x\} = q$ are $[|p|]$ sau $[|p|] + 1$ soluții.

66. Să se rezolve ecuația: $\left|x + \left[\frac{a+1}{2}\right]\right| + \left|x + \frac{a-1}{2}\right| = 20$.

Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația să admită exact două rădăcini.

67. Se consideră ecuația: $\left|x + \left[\frac{a+1}{2}\right] + \left|x + \frac{a-1}{2}\right|\right| = 20$.

68. Să se arate că există o infinitate de numere reale x, cu proprietatea că:

$$\left\{\frac{1}{x^n}\right\} = \{x\}^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

69. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(x^n - [x]^n)^2 = (x^2 - [x]^2)^n$;

b) $[x] + [x^n] = n$, unde $n \in \mathbb{N}^*, x > 0$.

70. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^{2n+1} - x = 2n + 1$;

b) $\left[x^n[x^{2n}]\right] = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$;

c) $x^n - 3[x] + 2 = 0, n \in \mathbb{N}^*$.

71. Să se rezolve ecuația: $\{x\}^n - [x]^n = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

72. Să se demonstreze că ecuațiile:

$$x^n - n[x] - 1 = 0 \text{ și } x^{2n} - n[x]x^n - n - 1 = 0$$

admit o singură rădăcină reală comună. Care este această soluție?

Scanned with OKEN Scanner

73. Pentru ce valori ale parametrului a ecuația $\left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{y}{1-a}\right]$ are soluții x, y numere naturale?

74. Să se rezolve ecuația: $[x]^n - \{x\}^n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

75. Fie $k \in \mathbb{N}^*, k$ fixat. Determinați $x \geq 0$, astfel încât $x^k - [x] = k$.

§ 3. Probleme de concurs

76. Să se arate că pentru orice număr natural $n \geq 2$, există un unic număr real nenul, astfel încât să aibă loc egalitatea: $nx = [x]\{x\}$.

77. Să se rezolve ecuația: $1 + [x] = [px]$, unde p este număr natural.

78. Să se rezolve ecuațiile:

a) $[mx] + \{(m+1)x\} = m + 1$;

b) $[mx] + \{(m+1)x\} = m, m \in \mathbb{N}^*$ fixat.

79. Să se rezolve ecuațiile următoare. Câte soluții au ecuațiile în intervalul $[0,1)$?

a) $x = \{px\}, p \in \mathbb{N}^*$;

b) $x = \{qx\}, q \in \mathbb{Z}^*$;

c) $px = \{qx\}, p, q \in \mathbb{N}^*$.

80. a) Să se rezolve și să se discute după valorile parametrilor $p, q \in \mathbb{Z}^*$ ecuația $px = \{qx\}$. Care este numărul soluțiilor ecuației?

b) Fie $p, q \in \mathbb{Z}$ numere date. Să se rezolve ecuația $[|x - p|] = 2\{2x + q\}$ și să se determine numărul soluțiilor.

81. Determinați $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}^*$, pentru care se verifică ecuația:

$$[x] + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1{,}005n.$$

82. Să se rezolve ecuația: $[x]\{x\} = px$, unde $p \in \mathbb{N}^*$.

83.** Să se rezolve ecuația: $|x - a| + sgn(x - b) = [x],\ a, b \in \mathbb{Z}$.

84. Să se rezolve ecuația: $[ax] + \{(a+1)x\} = a + 1$, unde $a \in \mathbb{N}^*$.

85. Să se rezolve ecuația: $2[x + a] + \{x + a\} + |x + a| = b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

86. Să se rezolve ecuația: $[mx] + \{(m+1)x\} = m,\ m \in \mathbb{Z}$.

87. Să se rezolve ecuația: $[x] \cdot \left(\sqrt[[x]]{x} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$, unde $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

88. Să se rezolve ecuația: $[x] + [x[x]] = n(n+1)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ este fixat.

89. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$, cu $m < n$. Să se determine numărul soluțiilor ecuației:

$$[x] = \frac{n}{n+m} x\{x\}.$$

90. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, n$ fixat. Să se rezolve ecuația: $\left[\sqrt[n]{x}\right] = 2\left\{\sqrt[n+1]{x}\right\}$.

91. Fie $a > 0$ și ecuația: $[x] + \{ax\} = 2$.

Să se arate că ecuația are soluție dacă și numai dacă $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

92. a) Să se rezolve ecuația: $\{x\} - \{mx\} = x$ și să se determine $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația să aibă 1000 de soluții.

b) Să se determine valorile reale pentru care ecuația $\{x^2 + a\} = \{x^2\} + a$ nu are soluție.

93. Să se rezolve ecuația: $[|x|] + |[x]| = n,\ n \in \mathbb{N}^*$ dat.

94. Să se arate că $\forall\, a \in \mathbb{R}$ și $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, există $n_k \in \mathbb{N}$, astfel încât ecuația: $x + \{nx\} = a$ are exact k soluții.

95. Să se rezolve ecuația: $[x]\{x\} = mx,\ m \in \mathbb{Z}^*$.

96*.** Să se rezolve ecuația: $[x] = mx + 1,\ m \in \mathbb{Z}$.

97.** Să se afle $k \in \mathbb{Z}$ dacă este adevărată egalitatea:

$$[2kx] = \left[2kx - x + \frac{1}{2}\right], \forall\, x \in [0,1).$$

98. Rezolvați ecuația: $[x]\{x\} = n([x] - \{x\}),\ n \in \mathbb{N}$.

99. Să se arate că ecuația: $[mx] - \left\{mx + \frac{p}{2}\right\} = q$ are soluție unică pentru orice $m \in \mathbb{R}^*, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{R}$.

100. Să se rezolve ecuația: $\frac{x}{\{x+k\}} - k^2[x]\{x\} = 1$, unde $k \in \mathbb{N}$.

101*. Fie $m \in \mathbb{R}$ și ecuația $x + \frac{\{x\}}{2} = m$.

a) Care este numărul maxim și respectiv numărul minim de soluții?

b) Câte soluții are ecuația, dacă $m \in [2004,2005]$?

102.** Să se rezolve $\{x\}^{[x]} = a,$ unde a este număr real fixat.

103. Se consideră ecuația: $x^{[x]} = a$, unde $a > 0$ este parametru și necunoscuta $x > 0$.

a) Arătați că pentru $a = 5$, ecuația are soluție.

b) Arătați că pentru $a = 10$, ecuația nu are soluție.

c) Determinați valorile lui $a > 0$, pentru care ecuația are soluție.

104.** Să se rezolve ecuația: $[x[x]] = n^2, n \in \mathbb{N}^*$, fixat.

105.** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{n^2}{x}\right] + \left[\frac{x^2}{n}\right] = \left[\frac{n}{x} + \frac{x}{n} + nx\right], n \in \mathbb{N}^*$.

106.** Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{x^n}\right] = n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

107.** a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{x}{m}\right] = \frac{x}{n}$.

b) Să se rezolve și să se discute ecuația: $[mx] = n[x]; m, n \in \mathbb{N}^*$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Ecuații în care apar sume (nivel mediu-avansat)

108**. Să se rezolve ecuația:

$$[x+1]+[x+2]+\cdots+[x+n]=\frac{n(n+1)}{2}, n\in\mathbb{N}^*.$$

109. Să se rezolve ecuația:

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+\left[\sqrt{n^2+2n}\right]=3723, \text{unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

110. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{2+3x}{2}\right]+\left[\frac{8+3x}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{2n^2+3x}{2}\right]=\frac{n(n-1)(2n+5)}{6},$$

$n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

111. Pentru ce valori ale lui $n\in\mathbb{N}^*$ avem $\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]=3$?

112. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\left[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right]=n$.

113. Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației:

$$\left[\frac{\sqrt{x}}{n+1}\right]=\left[\sqrt{\frac{2^2+1^2}{2\cdot 2\cdot 1}+\frac{3^2+2^2}{2\cdot 3\cdot 2}+\cdots\frac{(n+1)^2+n^2}{2\cdot n(n+1)}}-n\right].$$

114. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ știind că: $\left[\frac{1^2}{2}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n^2}{n+1}\right]=2080$.

115. Să se afle $n\in\mathbb{N}^*$ știind că: $[\sqrt{1\cdot 5}]+[\sqrt{2\cdot 6}]+\cdots+\left[\sqrt{n(n+4)}\right]=$
$=230$.

116. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{2x+1}{2}\right]+\left[\frac{4x+1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{2^nx+1}{2}\right]=2003$,
unde $n\geq 11, n\in\mathbb{N}^*$.

117. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^3}{\left[\sqrt{k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}}\right]+x}=\frac{n(2n^2+9n+13)}{6}.$$

118. Să se rezolve ecuația în $\mathbb{N}^*$:

$$\left[\frac{n^2-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-2}{2^2}\right]+\left[\frac{n^2-2^2}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n^2-2^{n-1}}{2^n}\right]=n^2-n-1.$$

119. Să se rezolve ecuația: $[x]^3+2\sum_{k=1}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]=2[nx]+3$.

Scanned with OKEN Scanner

120. Să se rezolve ecuația: $\sum_{k=1}^{n} |[x] + kx| = \frac{n^2+3n}{2}$.

121. Să se rezolve ecuația: $\sum_{k=1}^{2n} ([x] + [(-1)^k x + k]) = 2n(n+2)$.

§ 5. Ecuații în care apar sume (nivel avansat – concursuri și olimpiade)

122**. Să se rezolve ecuația: $[x] + [2x] + \cdots + [nx] = 1$.

123**. Să se rezolve ecuația:

$$2x + 2\left[\frac{x^2+x}{2}\right] + 2\left[\frac{x^2+3x+2}{2}\right] + \cdots + 2\left[\frac{x^2+(2n+1)x+n(n+1)}{2}\right] = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1).$$

124***. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[x] + [2x] + \cdots + [nx] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

125. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{[x+1]}{m}\right] + \left[\frac{[x+2]}{m}\right] + \cdots + \left[\frac{[x+m]}{m}\right] = x+1, \forall\, m \geq 4, m \in \mathbb{N}^*.$$

126. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n}\right] = 0, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

127. Să se rezolve ecuația: $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{x}{k(k+1)}\right] = n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

128***. Să se rezolve ecuația în numere naturale:

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + \left[\sqrt{x^2-2}\right] + \left[\sqrt{x^2-1}\right] = 5^3.$$

129. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care: $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \cdots = n$.

130. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x+1}{3}\right] + \left[\frac{x+3}{3^2}\right] + \left[\frac{x+3^2}{3^3}\right] + \cdots + \left[\frac{x+3^{2003}}{3^{2004}}\right] + \left[\frac{x+2\cdot 1}{3}\right] + \left[\frac{x+2\cdot 3}{3^2}\right] + \left[\frac{x+2\cdot 3^2}{3^3}\right] + \cdots + \left[\frac{x+2\cdot 3^{2003}}{3^{2004}}\right] = 1 - \left[\frac{x}{3^{2004}}\right].$$

131. Să se determine numărul soluțiilor ecuațiilor:

a) $|(x-1)(x-2) - \cdots - (x-p)| + \left\{\frac{x^2+p^2}{x^2}\right\} = 0, p \in \mathbb{N}^*$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $|(x-1)(x-2)-\cdots-(x-20)|+\left\{\frac{x^2+54000}{x^2}\right\}=0.$

132. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{x}\right]=\frac{n(n-1)}{2}$;

b) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^2}{x}\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^3}{x}\right]=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

133. Să se rezolve ecuația următoare, unde $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left[x+1-\frac{1}{n}\right]+\left[x+2-\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+n-\frac{1}{n}\right]=0$$

și să se precizeze numărul soluțiilor întregi.

134. Fie $n\geq 6$ număr natural. Să se determine numerele reale x care îndeplinesc condiția: $x=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{n}\right]$.

135*.** Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ notăm cu A_n mulțimea soluțiilor ecuației: $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, x=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{n}\right]$.

a) Determinați $A_2\cup A_3$.

b) Arătați că mulțimea $A=\bigcup_{x\geq 2}A_n$ este finită și determinați $\max A$.

136*.** Să se rezolve ecuația: $[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]=n^2$.

137*.** Să se rezolve ecuația:

$$\left\{x+\frac{1}{2n}\right\}+\left\{x+\frac{3}{2n}\right\}+\cdots+\left\{x+\frac{2n-1}{2n}\right\}=\frac{n(2x-1)}{2}.$$

138*.** Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și ecuația:

$$\left[\frac{x}{1\cdot 2}\right]+\left[\frac{x}{2\cdot 3}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{n(n+1)}\right]=n, \text{ unde } x\in\mathbb{N}^*.$$

Determinați-l pe n astfel încât ecuația să aibă n soluții în mulțimea numerelor naturale.

139*.** Să se rezolve ecuația, știind că $x=bm, m\in\mathbb{N}^*$:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k(k+1)(k+2)}\right]=n^2+3n.$$

Scanned with OKEN Scanner

140. Fie x un număr real. Să se arate că x este întreg dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]=\frac{(n+1)[nx]}{2},\forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

141. Fie x un număr real. Arătaţi că x este număr întreg dacă şi numai dacă relaţia:

$[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]=\dfrac{n([x]+[nx])}{2}$ are loc pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

142. Să se rezolve ecuaţia în mulţimea numerelor pozitive

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{x+k+1}{x+k}\right]=m,\quad m,n\in\mathbb{N}^*.$$

143. Fie $n\geq 1, n\in\mathbb{N}^*$. Să se rezolve ecuaţia:

$$[x+1]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\cdots+\left[x+\frac{1}{n}\right]=n+1.$$

144.** Fie m şi n numere naturale, $n\geq 1$. Să se determine numerele reale x pentru care: $[x+1]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]+\left[x+\dfrac{1}{3}\right]+\cdots+\left[x+\dfrac{1}{n}\right]=m.$

145*.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left\{\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n}\right\}+\left\{\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n}\right\}^2+\cdots+\left\{\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n}\right\}^n=1.$$

146*.** Să se rezolve ecuaţia:

$$[x]+\left[\frac{x}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{n}\right]=[x-1]+[x-2]+\cdots+[x-n],\text{ unde } n\in\mathbb{N}.$$

147*.** Să se rezolve ecuaţia: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[x]^{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}[x^{2k}]=2n.$

148*.** Să se rezolve ecuaţia: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[kx]^3=\left(\frac{[nx]([nx]+[x])}{2}\right)^2.$

149*.** Să se rezolve ecuaţia:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{x+(-1)^k}\right]=1;$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{x+(-1)^k\cdot k}\right\}=1.$

150*.** Să se rezolve ecuaţia:

$$n\{x\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{x+\frac{1}{k}\right\}=1+\sum_{k=1}^{n}\{kx\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţii 9

Ecuaţii cu parametri

♦ 1. Nivel mediu-avansat

1. $a = x + [x] \leq 2x > 0$. Notăm $[x] = p \in \mathbb{N}$.

$x = a - p,\ p \leq x < p + 1 \Rightarrow p \leq a - p < p + 1 \Rightarrow 2p \leq a < 2p + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p \leq \frac{a}{2} < p + \frac{1}{2} < p + 1 \Rightarrow \left[\frac{a}{2}\right] = p \Rightarrow x = a - [x] = a - p = a - \left[\frac{a}{2}\right]$.

Aşadar, soluţia ecuaţiei este $x = a - \left[\frac{a}{2}\right]$.

2. Din relaţia dată rezultă că $a \in \mathbb{Z}$. Aşadar, pentru $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ecuaţia nu are soluţii. Ecuaţia se mai scrie: $[[x] + 2\{x\}] = a \Rightarrow [x] + [2\{x\}] = a$

şi cum $0 \leq 2\{x\} < 2 \Rightarrow [2\{x\}] \in \{0,1\}$.

a) Dacă $[2\{x\}] = 0 \Rightarrow [x] = a$ şi $\{x\} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x \in \left[a, a + \frac{1}{2}\right)$.

b) Dacă $[2\{x\}] = 1 \Rightarrow [x] = a - 1$ şi $\{x\} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow x \in \left[a - \frac{1}{2}, a\right)$.

În concluzie, dacă $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$.

Petru Vlad, R.M.T. nr. 4/2016

3. a) $x = [x] + \{x\} = [x] + t = a + t, t \in [0,1), a \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow mx = m[x] + mt \Rightarrow [mx] = [m[x] + mt] = m[x] + [mt] \Rightarrow$

$\Rightarrow [mt] = 0 \Rightarrow 0 \leq mt < 1$.

Dacă $t = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, deci orice număr întreg x verifică ecuaţia.

Dacă $t \in (0,1)$, atunci $m > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{N}^*$ şi $t \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$, deci orice număr $x = a + t$, cu $a \in \mathbb{Z}$ şi $0 < t < \frac{1}{m}$ verifică ecuaţia, $x \in \left[a, a + \frac{1}{m}\right), a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Utilizând identităţile $[x + k] = [x] + k$ şi $\{x + k\} = \{x\}, \forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Obţinem $[x]\{x\} = m[x] \Rightarrow [x](\{x\} - k) = 0$.

Dacă $m = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \cup [0,1)$, iar dacă $m \neq 0 \Rightarrow x \in [0,1)$.

Gigel Buth, R.M.T. 2014

Scanned with OKEN Scanner

4. a) Avem $3x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{3} \Rightarrow 2\left[\frac{k}{3}\right] = k \Rightarrow \left[\frac{k}{3}\right] = \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 2p, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\frac{2p}{3}\right] = p \Rightarrow p \leq \frac{2p}{3} < p+1 \Rightarrow p \in \{-2,-1,0\}$

și cum $x = \frac{2p}{3} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right\}$.

Observație: Se poate porni cu $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ ș. a. m. d.

b) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow mt + k + t = 0 \Rightarrow t = \frac{-k}{m+1} \Rightarrow k \leq 0 \Rightarrow k \in \{0,-1,-2,\ldots,-m\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = k - \frac{k}{m+1} = \frac{mk}{m+1}$ cu $k \in \{0,-1,-2,\ldots,-m\}$.

c) Dacă $n = m \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Fie $n > m$ și atunci ecuația devine:

$mk = (k+t)n \Rightarrow t = \frac{-k(n-m)}{n} \in [0,1) \Rightarrow k \leq 0$ și $k > \frac{n}{m-n} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \left\{0,-1,-2,\ldots,\left[\frac{n}{m-n}\right]\right\}, \left(\text{unde } \frac{n}{m-n} < 0\right)$.

Test clasa a IX-a, Gh. Andrei

d) Notând $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, ecuația devine:

$[3t] = 2m - 2k + 1 \quad (*)$.

Dacă $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow [3t] = 0$, contradicție cu $(*)$.

Dacă $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow [3t] = 1 \Rightarrow k = m \Rightarrow x \in \left[m + \frac{1}{3}, m + \frac{2}{3}\right)$.

Dacă $t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow [3t] = 2$, contradicție cu $(*)$.

O.L., 2014

5. Cu notația $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in [0,1)$ ecuația devine:

$pt = 2k + t \Rightarrow t(p-1) = 2k \Rightarrow t = \frac{2k}{p-1} \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k < \frac{p-1}{2} \Rightarrow k \in \left\{0,1,\ldots,\frac{p-3}{2}\right\}$ (p prim, $p > 2$).

Așadar, $x = k + \frac{2k}{p-1}, k \in \left\{0,1,2,\ldots,\frac{p-3}{2}\right\}$. Dacă $p = 2$, atunci ecuația devine: $t = 2k \in (0,1) \Rightarrow t = 0, k = 0 \Rightarrow x = 0$.

Daniel Cojocaru, (L.S.) O.N., 2003

6.** a) $-\{nx\} = x - \{x\} = [x] \in (-1,0] \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1)$

și ecuația devine: $\{nx\} = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{n}, k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Prin urmare, ecuația are n soluții.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $-\{x\} = nx - \{nx\} = [nx] \in (-1,0] \Rightarrow [nx] = 0 \quad (1)$
și ecuația devine: $\{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
Din (1), rezultă $0 \leq nx < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{n}$ și cum $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0$.

Gh. Andrei

7. Fie $[x] = k \geq 0$ și $\{x\} = t \Rightarrow t = \frac{k}{\sqrt{m}} \in [0,1)$, $0 \leq k < [\sqrt{m}]$,
deci există $k \in \{0,1,2,\ldots,[\sqrt{m}]\}$. Avem un număr de $[\sqrt{m}] + 1$ soluții.
8. Pentru $n = 1 \Rightarrow x = \{x\} \Rightarrow x \in [0,1)$.
Fie $n \geq 2 \Rightarrow x \in [0,1)$ și $x = nx - [nx] \Rightarrow [nx] = x(n-1) = p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{p}{n-1}, p \in \{0,1,2,\ldots,n-2\}$.
Prin urmare, avem $n-1$ soluții $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
9. $|x-n| = 2n - [x+n] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
Dacă $x \geq n \Rightarrow x - n = 2n - x - n \Rightarrow x \equiv n$.
Dacă $x < n \Rightarrow n - x = 2n - x - n \Rightarrow x \in \{k | k < n, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \{k | k \in \mathbb{Z}, k \leq n\}$.
10. Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, $n[x] = (n+1)(x-1) \Rightarrow$
$nk = (n+1)(k+t-1) \Rightarrow t = 1 - \frac{k}{n+1} \in [0,1), k \in \{1,2,\ldots,n,n+1\} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_k = k + t = k + 1 - \frac{k}{n+1}, k \in \{1,2,\ldots,n,n+1\}$.

Daniel Cojocaru, G.M. nr. 10-11/1997

11. a) Avem $x\sqrt{3} - [x\sqrt{3}] = x\sqrt{2} - [x\sqrt{2}] \Rightarrow x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = [x\sqrt{3}] -$
$- [x\sqrt{2}] \in \mathbb{Z}$.
Introducând în ecuația dată, rezultă: $x_k = k(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, verifică ecuația
$\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
b) Avem $x\sqrt{p} - [x\sqrt{p}] = x\sqrt{q} - [x\sqrt{q}] \Rightarrow x(\sqrt{p} - \sqrt{q}) =$
$= [x\sqrt{p}] - [x\sqrt{q}]$, unde $\sqrt{p} - \sqrt{q} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, deci
$x_k = \frac{k(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{p - q}$, $k \in \mathbb{Z}$, care verifică ecuația.
12. Evident, $x = 0$ verifică ecuația.
Dacă $[x] > 0 \Rightarrow 0 < [x] \leq x$ și $n > \{x\} \Rightarrow nx > [x]\{x\}$.
Dacă $[x] < 0$, adică $[x] = -k, k \in \mathbb{N}^*$ și $\{x\} = t \in (0,1)$ (evident, $t \neq 0$).
Ecuația devine: $-kt = n(t-k) \Rightarrow t = \frac{kn}{k+n} < 1 \Rightarrow k = 1$ sau $n = 1$.
Dacă $n = 1 \Rightarrow t = \frac{k}{k+1} \Rightarrow x = -k + \frac{k}{k+1} = \frac{-k^2}{k+1}, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$, iar dacă

Scanned with OKEN Scanner

$n \neq 1 \Rightarrow k = 1$ și $t = \frac{n}{n+1} \Rightarrow x = -\frac{1}{n+1}$.

Maria Chircui, R.M.T., 2009

13*. a) Ecuația devine:

$\{2x\} = 2x + 1 \Rightarrow -1 = 2x - \{2x\} = [2x] \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Avem: $\left\{2\left\{\frac{x}{3}\right\}\right\} = \frac{2x}{3} - 2 \Rightarrow 2 = \frac{2x}{3} - \left\{\frac{2x}{3}\right\} = \left[\frac{2x}{3}\right] \Rightarrow x \in [3; 4{,}5)$.

c) Avem:

$\left\{-\frac{3x}{5}\right\} = \frac{-3x}{5} - 4 \Rightarrow 4 = \frac{-3x}{5} - \left\{\frac{-3x}{5}\right\} = \left[\frac{-3x}{5}\right] \Rightarrow x \in \left(\frac{-25}{3}, \frac{-20}{3}\right]$.

d) $\left\{-\frac{mx}{n}\right\} = -\frac{mx}{n} - pm \Rightarrow pm = \left[-\frac{mx}{n}\right] - \left\{-\frac{mx}{n}\right\} = \left[-\frac{mx}{n}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow pm \leq -\frac{mx}{n} < pm + 1 \left| -\frac{n}{m}, -np \geq x > -pn - \frac{n}{m} \right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(-pn - \frac{n}{m}, -np\right]$.

14.** Avem $0 \leq x^3 - x^2 + x < 1 \Rightarrow x \in [0,1)$ și ecuația devine:

$\{p + x\} = x^3 - x^2 + x \Rightarrow \{x\} = x^3 - x^2 + x \Rightarrow x = x^3 - x^2 + x \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{0, \pm 1\} \Rightarrow x = 0$.

15. Dacă $a = 0 \Rightarrow x \in [0,1) \cup \mathbb{Z}$.

Fie $a \in [0,1)$ și $[x] = k \Rightarrow \{x\} = \frac{a}{k}, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_k = k + \frac{a}{k}, k \in \mathbb{N}^*$.

Evident, pentru $a > 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}, a \notin (0,1)$.

Fie $a \in [1,2) \Rightarrow \{x\} = \frac{a}{k}, k \geq 2 \Rightarrow x_k = k + \frac{a}{k}, k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$.

Dacă $a \in [m, m+1)$, atunci $\{x\} = \frac{a}{k}, k \geq m + 1 \Rightarrow x_k = k + \frac{a}{k}, k \in \mathbb{N}^*$,

$k \geq m + 1$.

Lucian Tuțescu

16. Evident că $x = 0$ este soluție, $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$. Din $a[x] = b\{x\} \Rightarrow [x] \geq 0 \Rightarrow$ $x \geq 0$. Dacă $x \in [0,1)$ rezultă $x = 0$ și dacă $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$. Prin urmare, $x \in [1, \infty) - \mathbb{N}^*$.

Notăm $[x] = k, \{x\} = t$. Avem $ak = bt < b \Rightarrow k < \frac{b}{a} \Rightarrow k \leq \left[\frac{b}{a}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{b}{a}\right]\right\}$ $(*)$ și $t = \frac{a}{b}k \Rightarrow x = k + \frac{a}{b}k = k\left(1 + \frac{a}{b}\right)$, unde k satisface $(*)$ la care se adaugă soluția $x = 0$.

Prin urmare, sunt $\left[\frac{b}{a}\right] + 1$ soluții.

Ioan Ucu, L.S., 2006

Scanned with OKEN Scanner

17**. Din relația $z=[z]+\{z\}$ rezultă $[(n+1)x]=[nx]+2x \Rightarrow 2x\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $x=\frac{k}{2}$. Ecuația devine: $\left[(n+1)\frac{k}{2}\right]=\left[\frac{nk}{2}\right]+k \Rightarrow \left[\frac{nk}{2}+\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{nk}{2}\right]=k.$

Evident, $k=0$ verifică $\Rightarrow x_1=0, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Fie n par $\Rightarrow \left[\frac{k}{2}\right]=k \Rightarrow k=-1 \Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}$.

Pentru n impar $\Rightarrow \left[\frac{k}{2}\right]=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow x_3=\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left\{0,\pm\frac{1}{2}\right\}$.

Petre Năchilă, O.L. Prahova, 2008

18. $[x]=k, \{x\}=t\in[0,1), nt=m-k \Rightarrow t=\frac{m-k}{n}\in[0,1)$,

$m\geq k$ și $k>m-n \Rightarrow k\in(m-n,m] \Rightarrow$

$\Rightarrow x=k+t$, unde $k\in(m-n,m]$ și $t\in[0,1)$.

19**. Notăm $x-a=y$ și atunci avem $[|y|]+|[y]|=1$.

Dacă $y\geq 0 \Rightarrow 2[y]=1$, fals.

Fie $y<0$ și atunci avem $[-y]-[y]=1 \Rightarrow [-y]=[y]+1 \quad (1)$.

(Se știe că $[-x]=-[x]-1, x\notin\mathbb{Z}$ (2). Dacă $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [-x]=-x=-[x]$.)

Evident că y nu poate fi întreg. Utilizând (2) în (1) avem:

$-[y]-1=[y]+1 \Rightarrow [y]=-1 \Rightarrow -1\leq y<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1\leq x-a<0 \Rightarrow a-1<x<a \Rightarrow x\in(a-1,a)$.

Octavian Purcărea, O.L. Prahova, 2006

20. Evident $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$,

$\alpha(x-k)=\alpha x-[\alpha x] \Rightarrow [\alpha x]=\alpha k$

și care nu poate avea loc decât pentru $k=0 \Rightarrow [\alpha x]=0 \Rightarrow \begin{cases}0\leq \alpha x<1\\ 0\leq x<1\end{cases}$.

Pentru $\alpha<0 \Rightarrow x=0$. Pentru $0<\alpha<1 \Rightarrow x\in[0,1)$.

Pentru $\alpha>1 \Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{\alpha}\right)$.

Concurs Turcia, 1993

21. Din $0\leq nx+\frac{1}{x}<1 \Rightarrow -\frac{1}{n^2}\leq x<\frac{n-1}{n^2} \Rightarrow [x]\in\{0,-1\}$.

Dacă $[x]=0$, din ecuația inițială rezultă $x_1=0$.

Dacă $[x]=-1 \Rightarrow x_2=-\frac{1}{n^2}$. Prin urmare, $x\in\left\{0,-\frac{1}{n^2}\right\}$.

22. Notăm $\sqrt{p}x=y$ și ecuația devine:

$[2y](2y-[2y])=y^2-1 \Rightarrow (y-[2y])^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y-[2y]=1$ sau $y-[2y]=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [2y]=y-1$ sau $[2y]=y+1 \Rightarrow y\in\{-1,1\}$

$\sqrt{p}x=\pm 1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{p}}=\pm\frac{p}{\sqrt{p}}$.

Scanned with OKEN Scanner

23. Notăm $\left[\frac{x}{n}\right] = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \leq \frac{x}{n} < k+1 \Rightarrow nk \leq x < nk+n.$

Pentru $x \in [nk+p, nk+p+1), p = 0,1,\ldots,n-1$, ecuația devine:

$k = nk+p-n \Rightarrow k = \frac{n-p}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = 1 \Rightarrow k = 1$, deci $x \in [n+1, n+2)$.

Concursul „Trident", 2006, G.M. nr. 11/2005

24. Notăm $\frac{x-n-1}{n} = k \Rightarrow x = nk+n+1$ și ecuația devine:

$\left[\frac{nk+1}{n+1}\right] = k \Rightarrow k \leq \frac{nk+1}{n+1} < k+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow nk+k \leq nk+1 < nk+n+k+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k > -n, k \leq 1 \Rightarrow k \in \{-n+1, -n+2, -2, -1, 0, 1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k = nk+n+1$, unde $k \in \{-n+1, -n+2, \ldots, -2, -1, 0, 1\}$.

O.L. Timiș, 2013

25.** Evident, $\{nx\} \in [0,1)$ și $[nx] \in \{0,1,\ldots,m-1\}$.

Fie $[nx] = k \in \{0,1,\ldots,m-1\} \Rightarrow m\{nx\} = k \Leftrightarrow \{nx\} = \frac{k}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow nx - [nx] = \frac{k}{n} \Rightarrow nx = k + \frac{k}{n} \Rightarrow x_k = \frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{m}\right)$.

Așadar, $S = \left\{\frac{k}{n}\left(1+\frac{1}{m}\right), k = \overline{0, m-1}\right\}$.

26*.** Evident, $p - [x+q] \geq 0 \Rightarrow p - [x] - q \geq 0 \Rightarrow [x] \leq p-q$.

Ecuația devine: $[x] = 2x - p + q$ (1). Din $x - 1 < [x] \leq x \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 < 2x - p + q \leq x \Rightarrow p - q - 1 < x \leq p - q$ (2)

și din $2x - p + q \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x - p + q = k \Rightarrow x = \frac{p-q+k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (3).

Înlocuind (3) în (2) avem

$p - q - 2 < k \leq p - q \Rightarrow p - q - 1 \leq k \leq p - q \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{p-q-1, p-q\} \Rightarrow x_1 = p-q, x_2 = p-q-\frac{1}{2}$.

Daniel Cojocaru, G.M. nr. 1/2001

27. Presupunem prin absurd că există $x > 0$ care verifică ecuația și atunci rezultă că: $\left|\frac{25}{x} + \frac{49}{a} - \frac{144}{x+a} + 1\right| < 1$ $\left(\text{se știe că } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}\right)$,

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ și $\forall a, b > 0$.

Prin urmare, $\frac{25}{x} + \frac{49}{a} \geq \frac{12^2}{x+a} \Rightarrow \frac{25}{x} + \frac{49}{a} = \frac{144}{x+a} + 1 > 1$, contradicție.

Ilie Roman, O.L. Galați

Scanned with OKEN Scanner

28. Evident, $\frac{(a+1)x+1}{x+a+1}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{ka+k-1}{a+1-k}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\frac{\frac{a(ka+k-1)}{a+1-k}+1}{\frac{ka+k-1}{a+1-k}+a}\right]=k\Leftrightarrow\left[\frac{ka^2+ka+1-k}{a^2+a+k-1}\right]=k.$$

$$k\le\frac{ka^2+ka+1-k}{a^2+a+k-1}<k+1\Rightarrow k\in\{0,\pm1\}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{1}{a+1},\pm1\right\}.$$

29.** a) Utilizând relația $[a]+[-a]=\begin{cases}-1, a\notin\mathbb{Z}\\ 0, a\in\mathbb{Z}\end{cases}$, deci $E_k(x)\in\{0,-1\}$.

b) Din $E_1(x)=\begin{cases}-1, x\notin\mathbb{Z}\\ 0, x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ și $E_2(x)=\begin{cases}-1, 2x\notin\mathbb{Z}\\ 0, 2x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$$\Rightarrow E_1(x)+E_2(x)=\begin{cases}-2, & x\notin\mathbb{Z}, & 2x\notin\mathbb{Z}\\ -1, & x\notin\mathbb{Z}, & 2x\in\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\mathbb{Z}, & 2x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}-2, & x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{k}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}\\ -1, & x\in\left\{\frac{2k+1}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}\\ 0, & x\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

c) Evident, suma este mai mică sau egală cu 0, fiind zero dacă $E_k(x)=0,\forall\, k\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, pentru $x\in\mathbb{Z}$.

30. Rezultă că $[x]\ge 0$. Fie $k=[x]\ge 0\Rightarrow ak=b(x-k)\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{(a+b)k}{b}\ (1)\Rightarrow k\le\frac{(a+b)k}{b}<k+1\Rightarrow k<\frac{b}{a}\ (2).$$

Cazul 1

$\frac{b}{a}\notin\mathbb{N}$ și atunci din (2) rezultă $k\in\left\{0,1,2,\dots,\left[\frac{b}{a}\right]\right\}$, deci ecuația are $\left[\frac{b}{a}\right]+1$ soluții de forma (1).

Cazul 2

$\frac{b}{a}\in\mathbb{N}$ și atunci din (2) rezultă $k\in\left\{0,1,2,\dots,\frac{b}{a}-1\right\}$, deci ecuația are $\frac{b}{a}$ soluții tot de forma (1).

Viorel Tudoranu, Ioan Crișan, G.M. nr. 10/2008, Concursul „N. Teodorescu", 2008

31.** a) Evident, se impune ca $0\le x-a<1$ și $0\le x-b<1$, $a\le x<a+1$ și $b\le x<b+1$.

Fie $b-a>1\Rightarrow b>a+1$. Atunci $a<a+1<b<b+1$ și ecuația nu are soluție.

Dacă $0<b-a<1$, atunci avem $a<b<a+1<b+1$ și $x\in[b,a+1)$.

Dacă $b-a=1$, este evident că ecuația nu are soluție.

Scanned with OKEN Scanner

b) Suma este nulă dacă $x-a, x-b \in \mathbb{Z}$, adică $x-a=n, x-b=$ $=m \Rightarrow x=a+n, x=b+m \Rightarrow a+n=b+m \Rightarrow b-a=n-m \in \mathbb{N}$.
Aşadar, ecuaţia are soluţie numai dacă $b-a \in \mathbb{N}$.
Atunci $x \in \{a+n, n \in \mathbb{Z}\}, x \in \{a+n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{b+m, m \in \mathbb{Z}\}$.

Gh. Andrei

32**. Rezultă $\{x\}(p-1)=2[x] \Rightarrow [x]=\frac{p-1}{2}\{x\}$.
Cazul p impar, $p=2k+1 \Rightarrow [x]=k\{x\} \in [0,k) \Rightarrow$ Notăm $m=[x]$,
$m=[x] \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}=\left\{0,1,2,\ldots,\frac{p-3}{2}\right\} \Rightarrow \{x\}=\frac{2m}{p-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x=[x]+\{x\}=m+\frac{2m}{p-1}=\frac{m(p+1)}{p-1}, m \in \left\{0,1,2,\ldots,\frac{p-3}{2}\right\}$.
Cazul p par, $p=2k \Rightarrow [x]=\frac{2k-1}{2}\{x\}$ ş. a. m. d.

33**. Rezultă că:
$\frac{x}{n}-\frac{x}{n+m}=\frac{mx}{n(n+m)}=k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x=\frac{nk(n+m)}{m} \in \big(0, n(n+m)\big) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq k \leq m-1$, deci $x \in \left\{\frac{n(n+m)}{m}, \frac{2n(n+m)}{m}, \ldots, \frac{(m-1)n(n+m)}{m}\right\}$.
Avem $m-1$ soluţii (evident, fără $x=0$, vezi condiţia).

Marin Chirciu, O.L., 2006

34. Dacă $n=1 \Rightarrow [x]-[x]=1-m$ (are soluţie $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m=1$).
Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Se ştie identitatea $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right], \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ şi ecuaţia devine:
$\frac{[x]}{n}-\left[\frac{[x]}{n}\right]=1-\frac{m}{n} \Rightarrow \left\{\frac{[x]}{n}\right\}=1-\frac{m}{n} \in [0,1) \Rightarrow m \in \{1,2,3,\ldots,n-1,n\}$.
Avem $\frac{[x]}{n}=k+1-\frac{m}{n} \Rightarrow [x]=nk+n-m \Rightarrow$
$x \in [nk+n-m, nk+n-m+1), \forall k \in \mathbb{Z}$ şi $m=\overline{1,n}$.
Evident, dacă $m \geq n+1$, ecuaţia nu are soluţie.

R.M.T. nr. 2/1981

35**. Evident, $x \notin \mathbb{Z}, x \notin [0,1)$ şi x nu poate fi negativ. Fie $x>1$, adică $x \in [1,\infty)-\mathbb{N}^*$. Notăm $[x]=n \in \mathbb{N}^*$ şi atunci, cu $\{x\}=x-n$, ecuaţia devine:
$x^2-nax-n^2=0 \Rightarrow x=\frac{na+n\sqrt{a^2+n}}{2}$ şi $n \leq x < n+1 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow n+1>x>\frac{n(\sqrt{5}+1)}{2}\Rightarrow n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Rightarrow n=1$, deci

$x=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, iar pentru $a\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$, $x=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ verifică ecuația.

Ioan Popa, O.L. Cluj, 2008

36. Evident $x\notin\mathbb{Z}$ și $x\notin[0,1)$. Avem: $\frac{[x]+\{x\}}{[x]\{x\}}=mx\Rightarrow[x]\{x\}=\frac{1}{m}$.

Fie $[x]=k\geq 1\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{mk}\Rightarrow x_k=k+\frac{1}{mk},\forall\, k\in\mathbb{N}^*$.

Gh. Szöllösy, G.M. nr. 11/2011

37. Evident $x\notin\mathbb{Z}$ și $x\notin[0,1)$. Ecuația se mai scrie:

$([x]-\{x\})\left(1-\frac{a}{[x]\{x\}}\right)=0$, unde $[x]-\{x\}\neq 0$ și

$[x]\{x\}=a\Rightarrow\{x\}=\frac{a}{k}$, unde $k=[x]\in\mathbb{N}^*, k>a$.

Așadar, $x_k=k+\frac{a}{k}, k\in\mathbb{N}^*$ și unde $k>[a]\Rightarrow k\geq[a]+1$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Recreații matematice, 2003

38.** Evident $x\notin\mathbb{Z}\cup[0,1)$. Ecuația se mai scrie:

$a(2[x]-x)=b\ \frac{2[x]-x}{[x]\{x\}}$ (1)

(Evident, $2[x]-x\neq 0$, pentru că altfel rezultă $x=0$, care nu convine) $\Rightarrow$

$[x]\{x\}=\frac{b}{a}$ (2).

Considerăm cazul $b<a$ și din (2) rezultă $x\geq 1\Rightarrow k=[x]\geq 1$. Atunci

$t=\{x\}=\frac{b}{ak}\leq 1\Rightarrow x_k=k+\frac{b}{ak}$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ (3).

Dacă $b=a$, atunci ecuația (2) devine $[x]\{x\}=1\Rightarrow k=[x]\geq 2\Rightarrow$

$\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{k}, k\geq 2\Rightarrow x_k=k+\frac{1}{k},\forall\, k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$,

adică este inclus în (3) $(a=b)$ cu condiția $k\geq 2$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 7-8/2003

39*. Evident, $x\notin\mathbb{Z}$ și $x\notin[0,1)$. Ecuația se mai scrie:

$n([x]-\{x\})+\frac{\{x\}-[x]}{\{x\}[x]}=0\Rightarrow([x]-\{x\})\left(n-\frac{1}{\{x\}[x]}\right)=0$.

Din $[x]-\{x\}=0\Rightarrow x=0$, care nu convine și se impune prin urmare ca

$[x]\{x\}=\frac{1}{n}\Rightarrow x\in\mathbb{R}_+^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $[x]=k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{nk}\Rightarrow x_k=k+\frac{1}{nk}$, unde $k\in\mathbb{N}^*$ și $n\geq 2$.

Pentru $n=1\Rightarrow x_k=k+\frac{1}{k}, k\geq 2$.

Marin Chirciu, R.M.T., 2010

40**. Observăm că $n=0\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}^*$. Fie $n\in\mathbb{N}^*$.
Evident că $x\notin[0,1)$. Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}^*, t\in[0,1)$.
Ecuația se mai scrie: $nk+\frac{1}{k}=nt+\frac{1}{k+t}$ (1) $\Rightarrow$
$n(k-t)=\frac{-t}{k(k+t)}<0$ (2)
$\left(\text{Se constată că } k(k+t)=x[x]>0, (\forall)\, x\in\mathbb{R}-[0,1)\right)$,
deci $n(k-t)<0\Rightarrow k-t\leq 0k\leq t\Rightarrow k\leq 0$ și $k\neq 0\Rightarrow k<0\Rightarrow$
$\Rightarrow k\in\{-1,-2,\ldots\}$. Din (2) avem: $nt=t\left[n-\frac{1}{(t+k)k}\right]$.
Dacă $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow(t+k)k=x[x]>1\Rightarrow n-\frac{1}{(t+k)k}>0\Rightarrow nk>0$,
absurd. Dacă $x\in(-1,0)\Rightarrow[x]=k=-1$, iar ecuația (1) devine:
$-n-1=nt+\frac{1}{t-1}\Rightarrow nt^2+t-n=0\Rightarrow t=\frac{\sqrt{1+4n^2}-1}{2n}\in(0,1)$,
deci $x=k+t=-1+\frac{\sqrt{4n^2+1}-1}{2n}$.
Observație: Dacă $x=-1\Rightarrow k=-1$ și $t=0$, atunci ecuația devine
$-n-1=-1\Rightarrow n=0$, caz tratat.

41**. În ambele cazuri rezultă că $a\in\mathbb{Z}$ și aplicând identitatea lui Hermite, ecuațiile devin:
a') $[x]^2=a+[x]$;
b') $[x]^2+[x]=a$.
Pentru că a') rezultă dacă $[x]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\Delta=1+4a\geq 0\Rightarrow a\geq 0\Rightarrow a\in\mathbb{N}$.
Avem $\Delta=(2p+1)^2\Rightarrow a=p(p+1), p\in\mathbb{N}$ și din a') rezultă
$[x]=k\in\{-p,p+1\}\Rightarrow x\in[-p,-p+1)\cup[p+1,p+2), p\in\mathbb{N}^*$.
Ecuația nu are soluție dacă $a\neq p(p+1), p\in\mathbb{N}^*$ și nici dacă $a\leq -1$.
c') Din ecuația $[x]^2+[x]-a=0$, unde dacă $[x]=k\Rightarrow k^2+k-a=0$
$\Rightarrow 1+4a\geq 0\Rightarrow a\geq 0\Rightarrow a\in\mathbb{N}$.
Din $1+4a=(2p+1)^2\Rightarrow a=p(p+1), p\in\mathbb{N}\Rightarrow k=[x]\in\{p,-p-1\}\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in[p,p+1)\cup[-p-1,-p), p\in\mathbb{N}$.
Ecuația nu are soluție dacă $a\neq p(p+1), p\in\mathbb{N}$ și nici dacă $a<-\frac{1}{4}$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, G.M.(S) nr. 11/2013

Scanned with OKEN Scanner

42*. Relația se mai scrie:

$$\left[\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right]-\left[\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\right]=m.$$

Utilizând identitatea $\left[a+\frac{1}{2}\right]-\left[a-\frac{1}{2}\right]=1, \forall\, a\in\mathbb{R}$, rezultă că dacă $m=1$, atunci $x\in\mathbb{R}$, iar dacă $m\in\mathbb{R}-\{1\}$, ecuația nu are soluție.

Tudorel Lupu

43**. Vom considera cazurile $x\geq m$ și $x<m$.

Fie $x\geq m\Rightarrow [x-m]=x(m-1)+m-k\Rightarrow \frac{k-m}{m-1}\geq m, m\geq 3$ (pentru $m\in\{1,2\}$ se tratează separat) $\Rightarrow k\geq m^2$. Avem $\left[\frac{k-m}{m-1}-m\right]=k\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{k-m^2}{m-1}\right|=k \quad (*)\Rightarrow k\in\left(\frac{-m^2}{m-2}-\frac{m-1}{m-2}, -m^2\right]$, dar $k\geq m^2$.

Prin urmare, ecuația nu are soluții.

Fie $x\leq m\Rightarrow [x-m]=x(m+1)-m=k\Rightarrow x=\frac{m+k}{m+1}\leq m\Rightarrow k\leq m^2$.

Obținem $\left[\frac{m-k}{m+1}-m\right]=k\Rightarrow\left[\frac{k-m^2}{m+1}\right]=k, k\in\left(-m-1-\frac{1}{m}, -m\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\{-m-1,-m\}\Rightarrow x_1=0, x_2=-\frac{1}{m+1}$ care verifică.

Pentru $m=1\Rightarrow x\in\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$ și pentru $m=2\Rightarrow x\in\left\{0,-\frac{1}{3}\right\}$.

Gh. Andrei

44. Pentru $m=0\Rightarrow \frac{2x+3}{5}=-1\Rightarrow x=-4\Rightarrow A_0=\{-4\}$.

Pentru $m=\pm 1\Rightarrow m^2=1$ și ecuația devine:

$$\left[\frac{x}{2}\right]=\frac{2x+3}{5}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{5k-3}{2} \qquad (1)$$

$\Rightarrow k\in\{3,4,5,6\}\Rightarrow x\in\left\{6,\frac{17}{2},11,\frac{27}{2}\right\}=A_{-1}=A_1$.

Fie $m\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}$ și atunci ecuația devine $\left(\text{cu } x=\frac{5k-3}{2}\right)$:

$$\left[\frac{5km^2-m^2-2}{4}\right]=k\Leftrightarrow 0<\frac{m^2+2}{5m^2-4}\leq k<\frac{m^2+6}{5m^2-4} \qquad (2).$$

Scanned with OKEN Scanner

(Evident $5m^2-4\geq 1$. Dar cum $\frac{m^2+6}{5m^2-4}<1$, rezultă că (2)nu poate avea loc, deci ecuaţia nu are soluţie şi $A_m=\emptyset, \forall\, m\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}$.)

Avem $B=A_0\cup A_1\cup A_{-1}=\left\{-4,6,\frac{17}{2},11,\frac{27}{2}\right\}$.

$S=-4+6+11+\frac{17}{2}+\frac{27}{2}=35$.

A.S.E., 2001

45. Notăm $k=\frac{2x+1}{5}\Rightarrow x=\frac{5k-1}{2}$, iar ecuaţia devine:

$\left[\frac{5km^2-m^2-2}{4}\right]=k$ (1).

Pentru $m=\pm 1$ ecuaţia (1)devine $\left[\frac{5k-3}{4}\right]=k\Rightarrow k\in\{3,4,5,6\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left\{7,12,\frac{19}{2},\frac{29}{2}\right\}$ (2). Fie $m\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}$ şi atunci din (1) rezultă:

$k\leq\frac{5km^2-m^2-2}{4}<k+1\Rightarrow 0<\frac{m^2+2}{5m^2-4}\leq k<\frac{m^2+6}{5m^2-4}$,

deoarece $5m^2-4\geq 1, \forall\, m\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}$ şi $\frac{m^2+6}{5m^2-4}<1\Rightarrow k=\emptyset$ şi prin urmare singurele soluţii sunt cele din (2). $S=43$.

A.S.E., 2001, O.L. Bacău, 2006

46.** Rezultă că $x^{n^2}\in\mathbb{N}^*$ şi $x^{n^2}-1\leq nx<x^{n^2}$. Pentru a doua inegalitate avem $n<x^{n^2-1}\Rightarrow x>\sqrt[n^2-1]{n}>\sqrt[n^2]{n}\Rightarrow x^{n^2}>n>1, \forall\, x>1$.

Prima inegalitate se mai scrie $x^{n^2}\leq 1+nx$ (1),

dar $x^{n^2}\geq 1+n^2(x-1)$ (2)

(inegalitatea Bernoulli). Din (1) şi (2) rezultă $1+nx>1+n^2(x-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow x>n(x-1)\Rightarrow x(n-1)<n\Rightarrow nx<\frac{n^2}{n-1}\leq n+2, \forall\, n\geq 2$.

Din $nx<n+2\Rightarrow 1+nx<n+3\Rightarrow x^{n^2}\leq 1+nx<n+3\Rightarrow$

$x^{n^2}\in(n,n+3)$ (unde $x^{n^2}\in\mathbb{N}^*$). Apar situaţiile $x^{n^2}=n+1$ sau $x^{n^2}=n+2$.

Dacă $x^{n^2}=n+1\Rightarrow x=\sqrt[n^2]{n+1}\Rightarrow nx=n\sqrt[n^2]{n+1}\Rightarrow$

$[nx]=\left[n\sqrt[n^2]{n+1}\right]=n$.

Dacă $x^{n^2}=n+2\Rightarrow x=\sqrt[n^2]{n+2}\Rightarrow nx=n\sqrt[n^2]{n+2}\Rightarrow nx=n\sqrt[n^2]{n+2}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow [nx] = \left[n\sqrt[n^2]{n+2}\right] = n$, dar $x^{n^2} - 1 = n + 1$. Prin urmare, unica soluție este $x \equiv \sqrt[n^2]{n+1}$.

Nelu Chichirim

47.** Notăm $k = [x^2 + a] \Rightarrow \frac{x+3}{2} = k \Rightarrow x = 2k - 3$ și ecuația se scrie: $[(2k-3)^2 + a] = k$ (1) $k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$. Dar $a = [a] + \{a\} = p + t, p \in \mathbb{Z}$, $t \in [0,1)$. Relația (1) devine: $[(2k-3)^2 + p + t] = k \Rightarrow$
$\Rightarrow (2k-3)^2 + p = k \Rightarrow 4k^2 - 13t + 9 + p = 0$ (2),
care admite soluții întregi dacă $\Delta = 25 - 16p$ este pătrat perfect, adică dacă există $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m^2 = 25 - 16p$, de unde rezultă $m = 8q + 3$ sau $m = 8q + 5, q \in \mathbb{Z}$, deci:

1) Dacă $m = 8q + 3 \Rightarrow p = -4q^2 - 3q + 1, q \in \mathbb{Z}$ și ecuația (2) admite soluția $k = q + 2 \Rightarrow x = 2(q+1) - 3 = 2q + 1, q \in \mathbb{Z}$.

2) $m = 8q + 5 \Rightarrow p = -4q^2 - 5q, q \in \mathbb{Z}$ și ecuația (2) admite soluția $k = 1 - q \Rightarrow x = -2q - 1$.

În concluzie, dacă $[m] = -4q^2 - 3q + 1, s \in \mathbb{Z}$, atunci ecuația are soluția $x = 2q + 1$, iar dacă $p = [m] = -4q^2 - 5q, q \in \mathbb{Z}$, atunci ecuația are soluția $x = -2q - 1$, altfel ecuația nu are soluții.

Dragomir Costea, R.M.T. nr. 1/1986

48. a) Fie $\left[\frac{x+a}{2}\right] = k \Rightarrow \frac{x+1}{3} = k \Rightarrow x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$.

Ecuația devine: $\left[\frac{3k}{2}\right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{3k}{2} < k + 1 \Rightarrow k \in \{0,1\} \Rightarrow x \in \{-1,2\}$.

b) Dacă $x \in \{-1,2\} \Rightarrow k \in \{0,1\} \Leftrightarrow [1-a, 3-a] \cap \mathbb{Z} = \{0,1\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - a \leq 0; 1 < 3 - a$ (cum intervalul $[1-a, 3-a]$ are lungimea 2, nu poate conține alte numere întregi) $\Leftrightarrow a \in [1,2)$.

c) Intervalul $[1, a, 3-a)$ are lungimea 2, nu poate conține 3 numere întregi, deci răspunsul este negativ.

Adrian Ghioca, G.M. nr. 3/2001, O.N., 2001

49*.** Evident, $\frac{x-12}{2000} \in \mathbb{Z}$. Notăm $\frac{x-12}{2000} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2000k + 12$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$$\left[\frac{m^2(2000k+12) - 13}{1999}\right] = k \Rightarrow 1999k \leq 2000m^2t + 12m^2 - 13 <$$
$$< 1999(k+1), k \in \mathbb{Z} \quad (1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $m = 0$, inegalitățile (1) au doar soluția $k = -1$. Ecuația dată are 1999 de soluții, distincte, dacă și numai dacă sistemul (1) în k are 1999 de soluții întregi distincte, unde $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $m \neq 0$, sistemul (1) este echivalent cu următoarea condiție:

$$k \in \left[\frac{13-12m^2}{2000m^2-1999}, \frac{2012-12m^2}{2000m^2-1999}\right], k \in \mathbb{Z} \qquad (2).$$

Acest interval are lungimea $\frac{1999}{2000m^2-1999}$.

Pentru $m^2 = 1$, intervalul conține 1999 de numere întregi $\{1,2,3,\ldots,1999\}$.

Dar pentru $m^2 > 1$ intervalul conține cel mult un număr întreg.

Prin urmare, pentru $m = \pm 1$ ecuația are 1999 de soluții distincte.

Olimpiadă R. Moldova, 1999

50**. Pentru ambele ecuații notăm $\frac{3x-2}{4} = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3x-10}{4} = y-2, \quad \frac{3x-4}{4} = y-\frac{1}{2}, \quad \frac{3x-4}{2} = 2y-1.$$

a) Avem $m\left[y-\frac{1}{2}\right] + [y-2]^2 = m[2y-1] - m^2 - 8m - 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\left(\left[y+\frac{1}{2}\right]-1\right) - m([2y]-1) + 8m + m^2 + ([y]-2)^2 = 0$$

$$m^2 + m(-[y]+8) + ([y]-2)^2 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - m([y]-8) + [y]^2 - 4[y] + 14 = 0 \quad (1)$$

și din $\Delta = -3[y]^2 + 8 \geq 0 \Rightarrow [y]^2 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow [y] \in \{0, \pm 1\}$.

Utilizând ecuația (1) avem:

Dacă $[y] = -1 \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $m = \frac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Dacă $[y] = 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right)$ și $m = -4 \pm \sqrt{2}$.

Dacă $[y] = 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ și $m = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Pentru alte valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, ecuația nu are soluții.

b) Ecuația devine (cu aceeași substituție):

$$\frac{3x+8}{4} = y+\frac{5}{2}, \quad \frac{3x-10}{4} = y-2, \quad \frac{3x-4}{2} = 2y-1$$

$$m\left[y+\frac{5}{2}\right] + [y-2]^2 = m([2y-1]) - m^2 - 5m - 10 \Rightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow m^2 + m\left[2 + \left[y + \frac{1}{2}\right] - [2y] + 1 + 5\right] + ([y] - 2)^2 + 10$

$m^2 + m(8 - [y]) + [y]^2 - 4[y] + 14 = 0 \qquad (2)$

și impunând ca $\Delta \geq 0 \Rightarrow 3[y]^2 - 8 \leq 8,\ [y]^2 \leq \frac{8}{3} \Rightarrow [y] \in \{0, \pm 1\}$.

Utilizând ecuația (2), avem:

Dacă $[y] = -1 \Rightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $m = \frac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Dacă $[y] = 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right)$ și $m = -4 \pm \sqrt{2}$.

Dacă $[y] = 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ și $m = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Pentru alte valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, ecuațiile nu au soluții.

51. Avem $x = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:

$\frac{1}{\{(k+t)^2\}} + \frac{1}{t^2} = m \Rightarrow \frac{1}{\{2kt + t^2\}} + \frac{1}{t^2} = m \qquad (*)$.

Pentru a găsi cea mai mică soluție pozitivă, trebuie găsită cea mai mică valoare a lui k și evident a lui t.

Pentru $k = 0$, ecuația devine:

$\frac{2}{t^2} = m \Rightarrow t^2 = \frac{2}{m} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{m}} \Rightarrow \min m, x_m = 0 + \sqrt{\frac{2}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m}}$.

52*. Fie $x = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$ și evident $x \not\equiv 0$.

Trebuie să luăm cea mai mică valoare a lui k și a lui t.

Avem $\{(k+t)^2\} - t^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow \{2kt + t^2\} - t^2 = \frac{1}{m}$ $(*)$.

Pentru $k = 0$, ecuația $(*)$ este imposibilă.

Fie $k = 1$. Atunci $(*)$ devine $\{t^2 + 2t\} - t^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow 0 \leq t^2 + 2t < 3$.

Așadar, $t^2 + 2t \in [0,1)$ sau $t^2 + 2t \in [1,2)$ sau $t^2 + 2t \in [2,3)$, deci

$0 \leq t^2 + 2t < 1$. Atunci $\{t^2 + 2t\} - t^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2 + 2t - t^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow t = \frac{1}{2m} \Rightarrow x_{min} = 1 + \frac{1}{2m}$.

Scanned with OKEN Scanner

ϕ 2. Nivel avansat

53. a) Notăm $\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{8}\right] = p \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \leq \frac{x}{10} < p+1 \Leftrightarrow 10p \leq x <$
$< 10p+10, p \leq \frac{x}{8} < p+1 \Leftrightarrow 8p \leq x < 8p+8.$
Fie $p \geq 0$ și $10p < 8p+8 \Rightarrow p \leq 3 \Rightarrow p \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow x \in [10p, 8p+8)$
$\Rightarrow x \in [0,8) \cup [10,16) \cup [20,24) \cup [30,32) = S_1.$
Fie $p < 0, 10p < 8p < 10p+10 \leq 8p+8 \Rightarrow p \leq -1, p > -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow p \in \{-1,-2,-3,-4\} \Rightarrow x \in [8p, 10p+10).$
$x \in [-8,0) \cup [-16,-10) \cup [-24,-20) \cup [-32,-30) = S_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in S_1 \cup S_2.$

b) $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{m}\right] = p \in \mathbb{Z}.$

Dacă $p = 0 \Rightarrow 0 \leq x < n, 0 \leq x < m \Rightarrow x \in [0, m).$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și atunci avem: $\begin{cases} pn \leq x < n(p+1) \\ pm \leq x < m(p+1) \end{cases}.$

Deoarece $pm < pn < m(p+1) < m(p+1)$ rezultă că avem soluția
$x \in [pn, m(p+1))$ dacă $pn < m(p+1) \Rightarrow p(n-m) < m \Rightarrow$
$\Rightarrow p < \frac{m}{n-m} \Rightarrow p \leq \left[\frac{m}{n-m}\right] = q \Rightarrow p = \overline{1,q}.$
Așadar, $x \in [pn, m(p+1))$ cu $p = \overline{1,q}$, adică
$x \in [n, 2m] \cup [2n, 3m) \cup \ldots \cup [qp, m(q+1)).$
Dacă $p \leq -1 \Rightarrow pn < pm < n(p+1) < m(p+1)$, deci avem soluție dacă
$pm < n(p+1) \Rightarrow -p(n-1) < n \Rightarrow p > -\frac{n}{n-m} \Rightarrow$
$\Rightarrow p \geq \left[-\frac{n}{n-m}\right] + 1 = -r \Rightarrow p = \overline{-r,-1}, x \in [pm, n(p+1)).$
$x \in [-rm, -(r+1)n) \cup [-(r+1)m - (r+2)n) \cup \ldots \cup [-2m, -n) \cup$
$\cup [-m, 0).$
(Pentru $p = -1$ avem $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{m}\right] = -1 \Rightarrow x \in [-m, 0).$)

54. Dacă $m = n \Rightarrow [nx] = nx = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}$ (evident, $x = 0$
este soluție oricare $m, n \in \mathbb{N}^*$).
Din $[mx] = nx = k \Rightarrow x = \frac{k}{n} \Rightarrow \left[\frac{mk}{n}\right] = k \Rightarrow nk < mk < nk + n \quad (1).$
Dacă $x > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}^*$ și prin urmare ecuația are soluții strict pozitive dacă
$n < m$ și $k < \frac{n}{m-n} \Rightarrow k \leq \left[\frac{n}{m-n}\right] = q \in \mathbb{N}^*.$

Scanned with OKEN Scanner

În final, avem $\left[\frac{n}{m-n}\right] = q$ soluții strict pozitive $x_k = \frac{k}{n}, k = \overline{1,q}$.

Dacă $x < 0 \Rightarrow k \leq -1$ și din (1) rezultă că ecuația are soluții strict negative

dacă $n > m$ și $k > \frac{n}{m-n} < 0 \Rightarrow k \geq \left[\frac{n}{m-n}\right] + 1 = -r \leq -1$ $(r \geq 1)$.

În final, avem r soluții negative $x_k = \frac{k}{n}, k \in \{-r, -r+1, \ldots, -2, -1\}$.

Gh. Andrei

55***. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci ecuația este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (este o identitate bine cunoscută, vezi cap. I).

Într-adevăr, notând $\left[\frac{[x]}{n}\right] = k \Rightarrow \frac{x}{n} = 1 < k \leq \frac{x}{n}, kn \leq x < (k+1)n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow kn \leq [x] < (k+1)n \Leftrightarrow k \leq \frac{[x]}{n} < k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{[x]}{n}\right] = k.$

Fie $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$. Atunci există și sunt unice numerele $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $x = nq + r \Rightarrow 0 \leq r_1 < |n| \Rightarrow x = [x] + \{x\} = nq + r_1 + t = nq + r$, unde $0 \leq r < |n|$ cu $r \in \mathbb{R}_+$. Avem: $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{nq+r}{n}\right] = \left[q + \frac{r}{n}\right] = q + \left[\frac{r}{n}\right]$

și $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{[nq+r]}{n}\right] = \left[\frac{nq+[r]}{n}\right] = q + \left[\frac{[r]}{n}\right]$.

Dacă $r = 0$, din $\frac{r}{n} \in \left(-\frac{1}{|n|}, 0\right) \Rightarrow \left[\frac{r}{n}\right] = -1$ și $\left[\frac{[r]}{n}\right] = 0$.

Dacă $r \in [1, |n|) \Rightarrow \frac{r}{n}, \frac{[r]}{n} \in \left(-1, -\frac{1}{|n|}\right) \Rightarrow \left[\frac{r}{n}\right] = \left[\frac{[r]}{n}\right] = -1$, deci pentru $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*$ mulțimea soluțiilor este $x \in \mathbb{R} - \bigcup (nq, nq+1)$.

Dumitru Mihalache, Gabi Ghindoveanu, R.M., 2010

56**. Fie $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{x}{m+1}\right] = k \in \mathbb{N}$.

Rezultă $\begin{cases} k \leq \frac{x}{m} < k+1 \\ k \leq \frac{x}{m+1} < k+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} km \leq x < m(k+1) \\ k(m+1) \leq x < (k+1)(m+1) \end{cases}$.

Dar, întrucât $km < k(m+1) < (k+1)m < (k+1)(m+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow k(m+1) \leq x < (k+1)m$ și cum $k(m+1) < (k+1)m$ implică $0 \leq k < m$ rezultă $k(m+1) < x < (k+1)m$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k = 0 \Rightarrow 0 \leq x < m \Rightarrow m$ soluții.
Pentru $k = 1 \Rightarrow m + 1 \leq x < 2m \Rightarrow m - 1$ soluții.
Pentru $k = 2 \Rightarrow 2(m + 1) \leq x < 3m \Rightarrow m - 2$ soluții.
... ...
Pentru $k = m - 2 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) \leq x < (m - 1)m \Rightarrow 2$ soluții.
Pentru $k = m - 1 \Rightarrow (m - 1)(m + 1) \leq x < m^2 \Rightarrow 1$ soluție.

Prin urmare, avem $1 + 2 + 3 - (m - 1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$ soluții.

Concurs Germania, 2006-2007

57. Soluția 1

Fie $a = a_0 + t_0$, unde $a_0 \in \mathbb{Z}$ și $t_0 \in [0,1)$ și $x = [x] + t, t \in [0,1)$.

Din ecuația $x - a = [x] - \left[\frac{x}{n}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = t_0 \Rightarrow x = [x] + t_0 \Rightarrow \left[\frac{x}{n}\right] = a_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 \leq \frac{x}{n} < a_0 + 1 \Rightarrow na_0 \leq x < na_0 + n.$

Deci, soluțiile ecuației sunt:

$x_0 = na_0 + t_0, x_1 = na_0 + 1 + t_0, \ldots, x_{n-1} = na_0 + n - 1 + t_0.$

Soluția 2

Considerăm cazurile $a \in \mathbb{Z}$ și $a \notin \mathbb{Z}$. Dacă $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} + \left[\frac{x}{n}\right] = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x = k \in \mathbb{Z}$ și ecuația devine: $\left[\frac{k}{n}\right] = a \Rightarrow a \leq \frac{k}{n} < a + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = k \in [na, na + a)$. Dacă $a \notin \mathbb{Z}$, fie $a = [a] + \{a\} = m + t, m \in \mathbb{Z}$, $t \in [0,1)$.

Ecuația se mai scrie $\{x\} - \{a\} = [a] - \left[\frac{k}{n}\right]$, dar cum $|\{x\} - \{a\}| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|[a] - \left[\frac{x}{n}\right]\right| < 1 \Rightarrow -1 < \left[\frac{x}{n}\right] - [a] < 1 \Rightarrow [a] - 1 < \left[\frac{x}{n}\right] < [a] + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x}{n}\right] = [a] = m \Rightarrow x \in [mn, mn + n) \Rightarrow x \in [[a]n, [a]n + n).$

58.** Avem $\frac{x}{\{x\}} - k^2[x]\{x\} = 1 \Rightarrow x \neq 0, x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] + \{x\} - k^2[x]\{x\}^2 = \{x\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x](1 - k^2\{x\}^2) = 0.$

Pentru $k = 0, k = 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in (0,1) = S_1.$

Pentru $k \geq 2, k = 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in (0,1)$ sau $\{x\} = \frac{1}{k} \Rightarrow x = m + \frac{1}{k}$, $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Așadar, pentru $k = 0$ sau $k = 1 \Rightarrow S = (0,1)$ și pentru

Scanned with OKEN Scanner

$k \geq 2 \Rightarrow x \in (0,1) \cup \left\{m + \frac{1}{k}\right\}$, unde $m \in \mathbb{Z}$ și $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Paul Cosmin, Radian Dumitru Bălan, Concursul „Cristian Calude", 2009

59. Pentru $x = 1 \Rightarrow \{a\} + \{b\} = 0 \Rightarrow a, b \in \mathbb{Z}$. Presupunând $a \neq 0$ și $b \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $a\alpha, b\alpha \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \begin{matrix} \{a\alpha\} + \{b\alpha\} = \{\alpha\} \\ \{-a\alpha\} + \{-b\alpha\} = \{-\alpha\} \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 = 1$, fals, deci $a = 0$ sau $b = 0$.

Dacă $b = 0 \Rightarrow \{ax\} = \{x\}$ (1), $\forall x \in \mathbb{R}$ (care se verifică pentru $a = 1$).

Pentru $a = -1 \Rightarrow \{-x\} = \{x\}$ (fals).

Presupunând că $|a| > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{|a|} < 1$, atunci pentru $x = \frac{1}{|a|} \Rightarrow$

$0 = \left\{\frac{1}{|a|}\right\}$, fals. La fel, pentru $0 < |a| < 1$, se obține o contradicție.

Așadar, $a = 1$ și $b = 0$ sau $a = 0$ și $b = 1$.

Concursul „Gh. Dumitrescu", 1999

60. Fie $x \geq 0$ și atunci ecuația devine: $\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{x}{3}\right] = \cdots = \left[\frac{x}{n}\right]$.

Dacă $x \in [0,1)$, toți termenii sunt nuli. Dacă $x \in [1,2)$, toți termenii sunt nuli. Prin urmare, $x \in [0,2) = S_1$. Analog dacă $x < 0 \Rightarrow x \in [-2,0) = S_2 \Rightarrow x \in S_1 \cup S_2$. Dacă $x \geq 3$, egalitățile nu pot avea loc; la fel dacă $x \leq 3$.

Daniel Lesnic, G.M. nr. 8-9/1990

61. a) Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $b \notin \mathbb{Z}$, ecuația nu are soluție.

Dacă $a \in \mathbb{Z}^*$ și $b \in \mathbb{Z}$, atunci $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $a \notin \mathbb{Z}$, atunci ecuația devine:

$$x(a - [a]) = [b] - b \Rightarrow x\{a\} = -\{b\} \Rightarrow x = \frac{-\{b\}}{\{a\}}.$$

b) Dacă $a \in (0,1)$ și $b \notin [0,1)$, ecuația nu are soluție.

Dacă $a \in (0,1)$ și $b \in (0,1)$, atunci $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $a \notin (0,1)$, atunci ecuația devine: $[a]x = -[b] \Rightarrow x = \frac{-[b]}{[a]}$.

Gh. Andrei, Test grup de excelență

62. Din identitatea lui Hermite rezultă:

$a[2x] - a[x] + b[x]^2 = a[2x] + bc^2 - ac \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b[x]^2 - a[x] - bc^2 + ac = 0 \quad (1)$.

Cu notația $[x] = y \Rightarrow by^2 - ay - bc^2 + ac = 0$

Scanned with OKEN Scanner

$y_{1,2} = \frac{a \pm (a-2bc)}{2b} \Rightarrow y_1 = \frac{a}{b} - c, y_2 = c.$

Discuție:

a) Dacă $b|a \Rightarrow a = bd \Rightarrow y_1 = d - c, y_2 = c \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [d-c, d-c+1) \cup [c, c+1).$

b) Dacă b nu divide a, atunci $[x] = y_2 = c \Rightarrow x \in [c, c+1).$

D.M. Bătinețu-Giurgiu, Arhimede nr. 11-12/2002

63***. Evident, $x \notin [0,1)$ și ecuația devine:

$\{x\} = \frac{m^2\{x\}}{x[x]} \Leftrightarrow \{x\}(x[x] - m^2) = 0 \Rightarrow \{x\} = 0, x \in \mathbb{Z}^* = S_1 \qquad (1)$

sau $x[x] = m^2$. Dacă $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow t = \frac{m^2 - k^2}{k} \in [0,1).$

Dacă $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} m^2 - k^2 \geq 0 \\ k^2 + k - m^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in \{1,2,\ldots,m\}$, dar numai $k = m$ verifică $k^2 + k - m^2 > 0 \Rightarrow x \in [m, m+1) = s_2$.

Dacă $k \leq -1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2 - k^2 \leq 0 \Rightarrow k \leq -m, k \in \mathbb{Z}, k^2 + k - m^2 < 0,$

$m \in \left(\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2}\right)$

rezultă că numai $k = -m$ verifică, deci $x \in [-m, -m+1) = S_3$.

Așadar, soluțiile sunt $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-m, -m+1) \cup [m, m+1) \cup \mathbb{Z}^*$.

Gh. Andrei

64**. Evident că $x \in \mathbb{Z}$. Fie $x = n \in \mathbb{N}$ și ecuația devine:

$\left[\sqrt{n^2 + 2an + b}\right] = n + a - 1.$

$n + a - 1 \leq \sqrt{n^2 + 2an + b} < n + a \Rightarrow a - 1 \leq \sqrt{n^2 + 2an + b} - n < a,$

deci inecuația a doua:

$\sqrt{n^2 + 2an + b} < n + a \Leftrightarrow n^2 + 2an + b < n^2 + an + a^2$

este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, iar prima inecuație devine:

$n + a - \sqrt{n^2 + 2an + b} \leq 1 \Rightarrow \frac{a^2 - b}{n + a + \sqrt{n^2 + 2an + b}} \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n + a + \sqrt{n^2 + 2an + b}} \leq \frac{1}{a^2 - b} \Leftrightarrow$

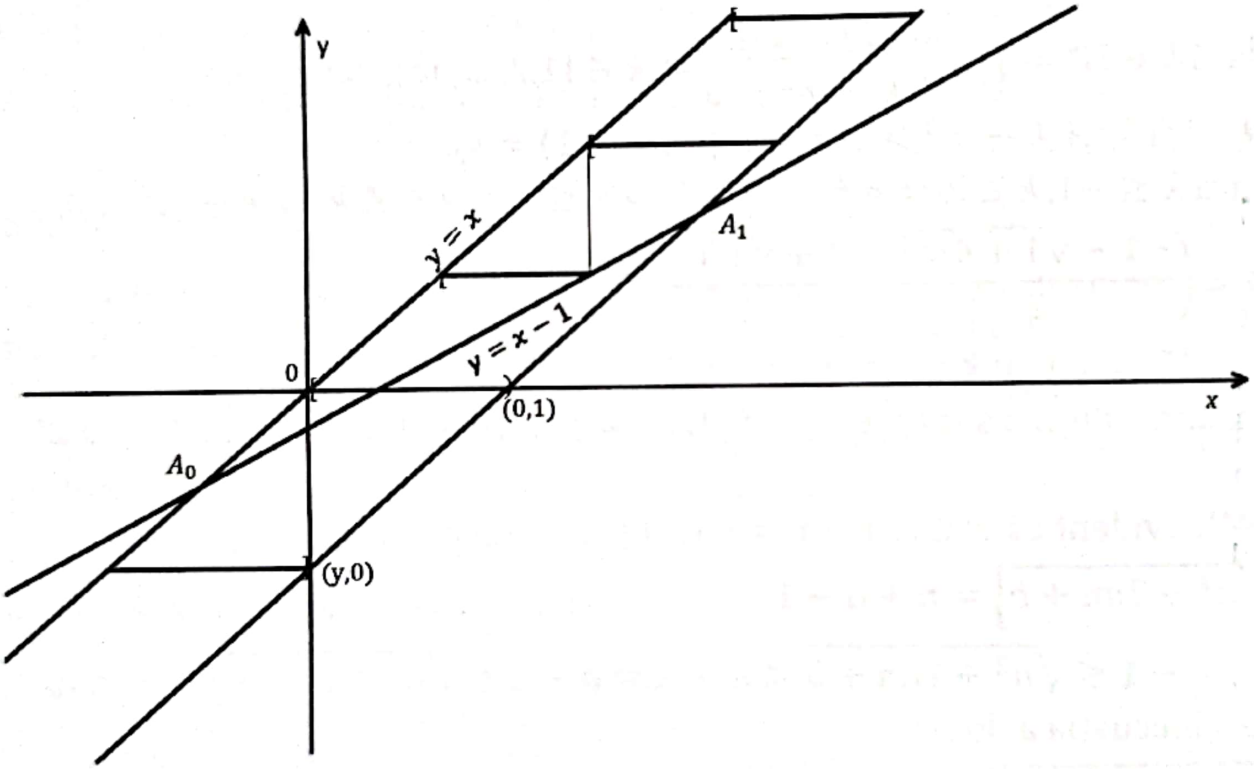
$\Leftrightarrow 2(n+a) > n + a + \sqrt{(n+a)^2 + b - a^2} \geq a^2 - b.$ Deci, există o infinitate de numere naturale $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $2(n+a) \geq a^2 - b.$

Scanned with OKEN Scanner

65. Fie $p \neq 1$ (cazul $p = 1$ este evident). Ecuația din enunț este echivalentă cu:

$$[x] + px - p[x] = q \Rightarrow [x] = \frac{px - q}{p - 1} \qquad (1).$$

Dreapta $y = \frac{px - q}{p - 1}$ intersectează marginile benzii limitate de dreptele $y = x$ și $y = x - 1$, care cuprinde graficul funcției $y = [x]$ în punctele $A_0(q - p + 1, q - p)$. Așadar, numărul soluțiilor ecuației (1), adică numărul dreptelor orizontale $y = h$ ($h \in \mathbb{Z}$) care intersectează segmentul A_0A_1 (fără punctul A_0) este egal cu numărul numerelor întregi q și $q - p$ (inclusiv q dacă este întreg, dar fără $q - p$), adică $[|p|]$ sau $[|p|] + 1$ (vezi în figura de mai jos).



Kvant, 1984

66. $\frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2} - 1 < \left[\frac{a+1}{2}\right] \Rightarrow -\left[\frac{a+1}{2}\right] < -\frac{a-1}{2}$.

Cazul I: $x \leq -\left[\frac{a+1}{2}\right] \Rightarrow$

$x = \left(-20 - \left[\frac{a+1}{2}\right] - \frac{a-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$, care va fi soluție

când $-20 - \left[\frac{a+1}{2}\right] - \frac{a-1}{2} \leq -2\left[\frac{a+1}{2}\right] \Leftrightarrow$

$\left[\frac{a+1}{2}\right] \leq \frac{a+39}{2}$ (1).

Cazul II: $x \geq -\frac{a-1}{2} \Rightarrow$

$x = \left(20 - \left[\frac{a+1}{2}\right] - \frac{a-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$, care va fi soluție când

$20 - \left[\frac{a+1}{2}\right] - \frac{a-1}{2} \geq -2\left(\frac{a-1}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\frac{a+1}{2}\right] \leq \frac{a+39}{2}$ (2).

Din (1) și (2) rămânem cu $\left[\frac{a+1}{2}\right] \leq \frac{a+39}{2}$, relație valabilă pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Observație:

Pentru $x \in \left(-\left[\frac{a+1}{2}\right], -\frac{a-1}{2}\right)$ ecuația devine $\left[\frac{a+1}{2}\right] = \frac{a+39}{2}$, fals.

Deci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ ecuația are soluțiile:

$x_1 = \left(-20 - \left[\frac{a+1}{2}\right] - \frac{a-1}{2}\right)$ și $x_2 = \left(20 - \left[\frac{a+1}{2}\right] - \frac{a-1}{2}\right)$.

67. Ecuația se mai scrie: $\left|x + 1 + \left[\frac{a-1}{2}\right] + \left|x + \frac{a-1}{2}\right|\right| = 20$ (1).

Notând $\frac{a-1}{2} = b \Rightarrow |x + 1 + [b] + |x + b|| = 20$. (2).

Dacă $x \leq -b$, (2) devine: $|x + 1 + [b] - x - b| = 20 \Rightarrow [b] - b \in$
$\in \{19,21\} \Rightarrow$ imposibil. Dacă $x > -b$, relația (2) devine:
$|2x + 1 + [b] + b| = 20$ (3) $\Rightarrow 2x \in \{19 - [b] - b, -21 - [b] - b\}$,
dar din $x > -b \Rightarrow 2x > -2b$ și dacă: $\frac{19 - [b] - b}{2} = x$,
$2x = 19 - [b] - b > -2b \Rightarrow 19 + \{b\} > 0$, adevărat,
deci $x_1 = \frac{19 - [b] - b}{2}$ (4) este soluție.

Dacă $x_2 = \frac{-21 - [b] - b}{2} \Rightarrow 2x_2 = -21 - [b] - b > -2b$.

Din (3) $\Rightarrow -21 + \{b\} > 0$, fals.

Dacă $[b] + b = 0 \Rightarrow [b] = -b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \frac{a-1}{2} = 0 \Rightarrow a = 1$ și atunci (3) devine $|2x + 1| = 20 \Rightarrow x \in \left\{\frac{19}{2}, -\frac{21}{2}\right\}$. Așadar, pentru $a = 1$ ecuația are două soluții. În celelalte cazuri, ecuația are o soluție (4).

Gh. Tutulan, G.M. nr. 2/1990

68. Fie perechea $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ o soluție a ecuației:

$2b^2 - a^2 = 1$ (*) și fie $x = b\sqrt{2} - a$,

Scanned with OKEN Scanner

$y = b\sqrt{2} + a$ cu $xy = 1$ și $y + 1, x \in (0,1) \Rightarrow \{x\} = x$.
Deoarece $y^n = q_n\sqrt{2} + p_n$ și $x^n = q_n\sqrt{2} - p_n$, cu $p_n, q_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $y^n - x^n = 2A_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x^n\} = \{y^n\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ și $\{x\}^n = x^n =$
$= \{x^n\} = \{y^n\} = \left\{\frac{1}{x^n}\right\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.
Relația $(*)$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Francisc Bogdan, G.M. nr. 7-8-9/2009, propusă la O.N.

69. a) Observăm că orice $x \in \mathbb{Z}$ este soluție.
Să arătăm că $\forall\, x \notin \mathbb{Z}$ nu este soluție. Fie $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in (0,1)$. Atunci:
$((k+t)^n - k^n)^2 = ((k+t)^2 - k^2)^n = (t^2 + 2kt)^n$.

b) Evident, $x \notin [0,1)$, pentru că $n \geq 1$.
Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}^*$ și $[x] \leq x \Rightarrow k^n \leq x^n \Rightarrow k^n \leq [x^n]$.
$n = k + [x^n] \geq k + k^n > k + (k-1)^n \geq k + 1 + n(k-1)$
$\Rightarrow k = 1$, deci $n \geq 2 \Rightarrow x \in [1,2)$, dar $[x^n] = n - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n-1} \leq x < \sqrt[n]{n} < 2 \Rightarrow x \in \left[\sqrt[n]{n-1}, \sqrt[n]{n}\right)$.

Dorin Dumitrică, G.M. nr. 5/2016

70. Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.

a) Dacă $x \geq 2 \Rightarrow x^{2n+1} = x^{2n}x \geq x^{2n}k \geq 2^{2n}k > 2^{2n-1}k + k >$
$> 2^{2n} + k > k + 2n + 1 \Rightarrow [x] + 2n + 1$, ecuație imposibilă
(întrucât $2^{2n} > 2n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$).
Dacă $x < 1 \Rightarrow x^{2n+1} < x^{2n}(1 + k) < k + 1 < k + 2n + 1 \Rightarrow x^{2n+1} <$
$< [x] + 2n + 1$, ecuație imposibilă (evident, nici $x = 1$ nu verifică).
Dacă $x \in (1,2) \Rightarrow [x] = k = 1$ și ecuația devine $x^{2n+1} = 2n + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt[2n+1]{2n+2}$.

b) Notăm $x^n = y \Rightarrow [y[y^2]] = 1\ (*) \Rightarrow 1 \leq y[y^2] < 2$, dacă
$y \in (0,1) \Rightarrow [y^2] = 0$, ecuația $(*)$ imposibilă. Dacă $y \in (1,2)$, atunci pentru
$y \in \left[\sqrt{2}, 2\right) \Rightarrow 2 \leq y^2 < 4 \Rightarrow [y^2] \geq 2$, ecuația $(*)$ imposibilă.
Dacă $y \in \left[1, \sqrt{2}\right) \Rightarrow [y^2] = 1 \Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow y \in \left[1, \sqrt{2}\right) \Rightarrow x \in \left[1, \sqrt[2n]{2}\right)$.
Dacă $y \geq 2 \Rightarrow y^2 \geq 4 \Rightarrow [y^2] \geq 4$, ecuație imposibilă.

c) Pentru $n = 1 \Rightarrow x - 3[x] + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.
Pentru $n = 2 \Rightarrow x^2 - 3[x] + 2 = 0 \Rightarrow x \in \{1,2\}$.
Pentru $n \geq 3$ se consideră cazurile: $x \in [-1,0), x \in [0,1), x \in [1,2)$, din care rezultă numai soluția $x = 1$.
Pentru $n \geq 3$, considerăm cazul $k = [x] \geq 2 \Rightarrow x^n = 3k - 2$ și pentru $k \leq x \Rightarrow$
$\Rightarrow k^n \leq x^n = 3k - 2 \Rightarrow k^3 - 3k + 2 \leq 0$, fals, oricare ar fi $n \geq 3$ și $k \geq 2$.
Pentru $n \geq 3$ și $x < -1 \Rightarrow k = [x] \leq -2$, deci ecuația $x^n = 3k - 2$ nu are soluție pentru n par. Pentru n impar $\Rightarrow k^n - 3k + 2 \leq x^n - 3k + 2 = 0 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow k^3 \leq 3k-2$. Pentru $n=3$ și $k \leq -2 \Rightarrow x^3-3k+2=0$, din care pentru
$k=-2 \Rightarrow x=-2$. Pentru n impar și $n \geq 5$ și $k<-2 \Rightarrow k^n-3k+2<$
$<x^n-3k+2=0 \Rightarrow k^n<3k-2$ și $k<-2$, fals.

Concursul „Recreații matematice", 2002

71. Notăm $[x]=k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\}=\alpha \in [0,1)$. Ecuația devine:
$1>\alpha^n=(k+\alpha)^n+k^n$, deci $k=0$ și se obține soluția $x \in [0,1)$.
Pentru $k<0 \Rightarrow k+\alpha<0$ și atunci pentru n par nu avem soluție, întrucât $a^n-k^n<0$ și $(\alpha+k)^n>0$.
Dacă n impar, atunci $(k+\alpha)^n<0<\alpha^n-k^n$, deci nu avem soluție.
Prin urmare, ecuația are soluție $x \in [0,1)$ numai dacă $[x]=0$.

Concursul „Vasile Dumitrache", 2009

72. Fie x o soluție comună. Atunci din prima ecuație rezultă $x^n-n[x]=1$ și din ecuația a doua avem:
$x^n(x^n-n[x])=n+1$ și $x^n=n+1 \Rightarrow x=\sqrt[n]{n+1}$.
Cum funcția $f(x)=x^n-n(x-\{x\})-1=0, f(x)=x^n-nx+n\{x\}-1$ este strict crescătoare deci injectivă. Așadar, soluția găsită este unică.

73. Dacă $a<0$ sau $a>1$, atunci partea dreaptă și partea stângă au semne diferite pentru x și y numere naturale.
Fie $0<a<1$. Atunci dacă notăm $\alpha=\frac{1}{a}$ și $\beta=\frac{1}{1-a} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1 \quad (*)$.
Conform teoremei lui Betty nu există valori naturale pentru x și y astfel încât $[\alpha x]=[\beta y]$, pentru α și β iraționale și care satisfac $(*)$.
Cum a, α, β sunt iraționale în același timp rezultă că nu există valori iraționale în intervalul $(0,1)$ pentru care să fie verificată egalitatea. Prin urmare, considerăm $a \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, fie $a=\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*, 0<p<q \Rightarrow$
$1-a=\frac{p-q}{q}$ și ecuația capătă aspectul:
$\left[\frac{qx}{p}\right]=\left[\frac{qy}{q-p}\right]$, deci una dintre soluții este $(p, q-p)$. Așadar, pentru orice $a \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ ecuația are soluții x, y numere naturale.

74. Fie $x=[x]+\{x\}=m+t, m \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Ecuația devine:

$$m^n-t^n=(-1)^n.$$

Deosebim două situații:

1) Dacă n par, atunci $m^n=1+t^n \in \mathbb{N}$ și $1 \leq 1+t^n<2$, deci $1+t^n=1 \Rightarrow t=0$ și $m^n=1 \Rightarrow m=\pm 1$, așadar $x=\pm 1$, care verifică ecuația.

Scanned with OKEN Scanner

2) Dacă n impar, atunci ecuația devine $m^n = t^n - 1 \in \mathbb{Z}$ și cum $t^n \in [0,1)$ rezultă $t^n - 1 \in [0,1)$, deci $t^n - 1 = -1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow m^n = -1 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = -1$, deci $x = -1$.

Alexandru Constantinescu, G.M. nr. 5/1991

Soluție alternativă

$\{x\}^n = [x]^n - (-1)^n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine $[x]^n = (-1)^n$. Pentru n par $\Rightarrow [x] \in \{\pm 1\} \Rightarrow x = \pm 1$ $(x \in \mathbb{Z})$ și pentru n impar $[x]^n = (-1)^n \Rightarrow x = -1$.

75. Aplicând inegalitatea lui Bernoulli obținem:

$k + [x] = x^k \geq 1 + k(x-1)$ și cum $x \geq [x] \Rightarrow$

$\Rightarrow k + x \geq 1 + kx - k \Rightarrow 2k - 1 \geq (k-1)x$.

a) Pentru $k = 1 \Rightarrow x - [x] = 1 \Leftrightarrow \{x\} = 1$, contradicție.

b) Dacă $k \geq 2 \Rightarrow x \leq \dfrac{2k-1}{k-1} = 2 + \dfrac{1}{k-1} \Rightarrow [x] \in \{0,1,2\}$.

Considerăm cazurile:

α) $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$ și ecuația devine: $x^k = k \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{k} \notin [0,1)$, deci nu sunt soluții.

β) $[x] = 1 \Leftrightarrow x \in [1,2)$ și ecuația devine:

$x^k = k + 1$, cu soluție $x = \sqrt[k]{k+1} \in [1,2)$.

γ) $[x] = 2 \Leftrightarrow x \in [2,3)$ și ecuația devine:

$x^k = k + 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[k]{k+2} \in [2,3)$,

doar pentru $k = 2$ $(k + 2 < 2^k, \forall\, k \geq 3)$.

Prin urmare, pentru $k = 1$ nu avem soluție, pentru $k = 2$, ecuația are soluțiile $\sqrt{3}$ și 2, iar pentru $k \geq 3$ ecuația are soluție $\sqrt[k]{k+1}$.

G.M. nr. 1/2001

§ 3. Probleme de concurs

76. Vom arăta că ecuația dată are soluție unică pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, $x = -\dfrac{1}{n+1}$ care verifică.

Evident, $x < 0$, dacă $x > 0$, atunci $[x]\{x\} \leq [x] \leq x \Rightarrow \dfrac{[x]\{x\}}{x} \leq 1 \Rightarrow n \leq 1$ contrazice ipoteza.

Evident, $x = [x] + \{x\} = k + t$, $k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și din ecuație rezultă

$t = -\dfrac{nk}{n-k} \in [0,1)$ $(1) \Rightarrow 0 \leq -\dfrac{nk}{n-k} < 1 \Rightarrow k > -\dfrac{n}{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow k > -1 - \dfrac{1}{n-1} \geq -2 \Rightarrow k = -1$.

Atunci din (1) avem: $t=\frac{n}{n+1}\Rightarrow x=k+t=-1+\frac{n}{n+1}=-\frac{1}{n+1}$.

Marius Burtea

77. Pentru $p=0\Rightarrow x\in[-1,0)=S_1$. Pentru $p=1$ ecuația nu are soluție.

Pentru $p=2\Rightarrow 1+[x]=[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=1\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=S_2$.

Pentru $p=3\Rightarrow 1+[x]=[3x]$ (1).

Dacă $x=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$ ecuația devine $[3t]=1-2k\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow k\leq\frac{1}{2}\Rightarrow k\leq 0$ și pentru $k=0\Rightarrow t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=S_3$.

Dar pentru $k\leq -1\Rightarrow 1-2k\geq 3\Rightarrow[3t]\geq 3$, fals.

Fie $p\geq 4$. Atunci din $x<1+[x]=[px]\leq px\Rightarrow x>0$ și $px-1<[px]=$

$=1+[x]\leq 1+x\Rightarrow x\leq\frac{2}{p-1}\Rightarrow x\in\left(0,\frac{2}{p-1}\right)$

$\left(\text{unde }\frac{2}{p-1}<1\text{ pentru }p\geq 4\right)\Rightarrow[x]=0$.

Ecuația devine: $[px]=1\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right)$, dar $x\in\left(0,\frac{2}{p-1}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right)\cap\left(0,\frac{2}{p-1}\right)\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{p},\frac{2}{p}\right)=S_4, \forall\, p\geq 4$.

Observăm că pentru $p=3\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, deci S_4 este soluție pentru $p\geq 3$.

Nicolae Popescu, Concursul „Grigore Moisil", 2009

78. a) Avem $\{(m+1)x\}=m+1-[mx]\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{(m+1)x\}=0\Rightarrow$

$x=\frac{k}{m+1}, k\in\mathbb{Z}^*$ ($x=0$ nu verifică). Ecuația se mai scrie:

$\left[\frac{mk}{m+1}\right]=m+1\Rightarrow\frac{(m+1)^2}{m}\leq k<\frac{(m+1)(m+2)}{m}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m+2+\frac{1}{m}\leq k<m+3+\frac{2}{m}, m\in\mathbb{N}^*\Rightarrow k=m+3$, deci $x=\frac{m+3}{m+1}$.

b) Analog avem $\{(m+1)x\}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{(m+1)x\}=0\Rightarrow x=\frac{k}{m+1}$,

$k\in\mathbb{Z}^*$ și ecuația devine $\left[\frac{mk}{m+1}\right]=m\Rightarrow m+1\leq k<m+2+\frac{1}{m}\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\{m+1,m+2\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{m+1}{m+1},\frac{m+2}{m+1}\right\}=\left\{1,1+\frac{1}{m+1}\right\}, m\in\mathbb{N}^*$.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

79. a) Evident, pentru $p = 1 \Rightarrow x \in [0,1)$ și ecuația are o infinitate de soluții. Fie $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ și atunci $\{px\} = \{x\} \Rightarrow \{px - x\} = 0 \Rightarrow x(p-1) = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_m = \frac{m}{p-1}$, dar pentru $x_m \in [0,1)$ rezultă $m \in \{0,1,\dots,p-2\}$ și ecuația are $p-1$ soluții.

b) Dacă $q \in \mathbb{N}^*$, vezi pct. a). Fie $q \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}^*$ și atunci din $\{x\} = \{qx\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x - qx\} = 0 \Rightarrow x(1-q) = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_m = \frac{m}{1-q}$

și pentru $m \in \{1,2,\dots,q\}$ ecuația are $-q+1$ soluții în intervalul $[0,1)$.

c) Evident, dacă $p = q \Rightarrow px = \{px\} \Rightarrow px \in [0,1) \Rightarrow$

$x \in \left[0, \frac{1}{p}\right)$ și ecuația are o infinitate de soluții. Fie $p \neq q$. Considerăm cazurile $p > q$ și $p < q$.

Dacă $p > q \Rightarrow \{px\} = \{qx\} \Rightarrow \{px - qx\} = 0 \Rightarrow x(p-q) = m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_m = \frac{m}{p-q} \in [0,1) \Rightarrow m \in \{0,1,\dots,p-q-1\}$ deci ecuația are $p-q$ soluții.

Dacă $p < q \Rightarrow \{qx\} = \{px\} \Rightarrow \{x(q-p)\} = 0 \Rightarrow x(q-p) = m \Rightarrow$

$x_m = \frac{m}{q-p}$, $m \in \mathbb{Z}$, dar pentru $m \in \{0,1,2,\dots,q-p-1\}$, ecuația are $q-p$ soluții în $[0,1)$.

Gh. Andrei

80. a) Dacă $q = p \Rightarrow px = \{px\} \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{p}\right)$ dacă $p \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \left(\frac{1}{p}, 0\right]$ pentru $p \in \mathbb{Z}_-$, deci ecuația are o infinitate de soluții.

Fie $p \neq q$. Considerăm cazurile:

I. $p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}^*$ și $p > q$. Atunci avem: $x \in \left[0, \frac{1}{p}\right)$ și $\{px\} = \{qx\}$

$\{x(p-q)\} = 0 \Rightarrow x(p-q) = m \Rightarrow x_m = \frac{m}{p-q}$, dacă $p > q$

$0 \leq \frac{m}{p-q} < \frac{1}{p}$ $(p > q)$, $\quad 0 \leq m < \frac{p-q}{p}$

$m \in \left\{0,1,2,\dots,\left[\frac{p-q}{p}\right]\right\}$, ecuația are $\left[\frac{p-q}{p}\right] + 1$ soluții,

și dacă $p < q \Rightarrow 0 \leq \frac{m}{p-q} < \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{p-q}{p} < m \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \in \left\{\left[\frac{p-q}{p}\right] + 1, \dots, -2, -1, 0\right\}$, deci sunt $-\left[\frac{p-q}{p}\right]$ soluții.

Scanned with OKEN Scanner

II. $p<0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{p}, 0\right]$, deci $\{px\}=\{qx\} \Rightarrow \{(q-p)x\}=0$.

$(q-p)x=m \Rightarrow x_m=\frac{m}{q-p}$ și distingem subcazurile:

1) $q-p>0$ și atunci $\frac{1}{p}<\frac{m}{q-p}\leq 0 \Rightarrow \frac{q-p}{p}<m\leq 0 \Rightarrow$

$m \in \left\{\left[\frac{q-p}{p}\right]+1, \left[\frac{q-p}{p}\right]+2, \ldots, -2, -1, 0\right\}$, deci sunt $-\left[\frac{q-p}{p}\right]$ soluții.

2) $q-p<0 \Rightarrow \frac{1}{p}<\frac{m}{q-p}\leq 0 \Rightarrow 0\leq m\leq \frac{q-p}{p}$ deci

$x_m=\frac{m}{q-p}$ cu $m \in \left\{0,1,2, \ldots, \left[\frac{q-p}{p}\right]\right\}$, prin urmare sunt $\left[\frac{q-p}{p}\right]+1$ soluții.

b) Membrul drept se mai scrie: $2\{2x+q\}=2\{2x\}-2\{2(x-p)\}$, deci soluțiile nu depind de q. Cu notația $x-p=y \Rightarrow$

$x=p+y$ $(*)$ ecuația devine

$[|y|]=2\{2y\} \in \mathbb{N}$ (1) $\{2y\}=0$ (2) sau $\{2y\}=\frac{1}{2} \Rightarrow 2y=k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{k}{2}$ (3) sau $2y=k+\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$ (4).

Introducând în (1) rezultă

$\left[\left|\frac{k}{2}\right|\right]=0 \Rightarrow k \in \{0, \pm 1\} \Rightarrow y \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow x \in \left\{p, p\pm\frac{1}{2}\right\}$ și din (4)rezultă

$\left[\left|\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right|\right]=1 \Rightarrow 1\leq\left|\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right|<2 \Rightarrow k \in \{2, \pm 3, -4\}$ deci

$y \in \left\{1+\frac{1}{4}, \frac{3}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}+\frac{1}{4}, -2+\frac{1}{4}\right\}=\left\{\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}\right\}, x \in \left\{p\pm\frac{5}{4}, p\pm\frac{7}{4}\right\}$.

Ecuația are 7 soluții.

Gh. Andrei

81. Ecuația se mai scrie $[x]+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{201}{200}n=n+\frac{n}{200}$.

Fie q și r câtul și restul împărțirii lui n la 200. Rezultă că $n=200q+r, 0\leq r<200$.

$[x]+\left\{\frac{1}{x}\right\}=n+q+\frac{r}{200} \Rightarrow [x]=n+q \Rightarrow [x]=201q+r$ și

$\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{r}{200}$ (1).

Dacă $0<x<1 \Rightarrow [x]+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\left\{\frac{1}{x}\right\}<1<1{,}005n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $x=1 \Rightarrow 1=1{,}005n$, fals.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{r}{200}$, cu $r \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{200}{r}, r \in \{1,2,\ldots,199\}$.

Din inegalitățile $[x] \leq x < [x] + 1$ și din (1) rezultă $201q + r \leq \frac{200}{r} <$

$< 201q + r + 1 \Rightarrow 201qr + r^2 \leq 200 < 201qr + r(r+1)$.

Dar cum $r, q \in \mathbb{N}$ rezultă că inegalitățile de mai sus nu pot avea loc pentru $qr \geq 1$, deci $qr = 0$ și cum $r \neq 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow r^2 \leq 200 < r(r+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 14, n = 14$ și $x = \frac{200}{14} = \frac{100}{7}$.

O.N., 2013

82. Evident, $x = 0$ verifică, iar $x \in \mathbb{Z}^*$ și $x \in (0,1)$ nu verifică.

Pentru $x > 1$ rezultă: $\{x\} = p\frac{x}{[x]} \geq p$, fals și analog pentru $x < -1$ nu avem soluții. Rezultă numai cazul $x \in (-1,0) \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -\{x\} =$

$= p(-1 + \{x\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} = \frac{p}{p+1} \Rightarrow x = -\frac{1}{p+1} \in (-1,0)$. Așadar, $x \in \left\{0, -\frac{1}{p+1}\right\}$.

Olimpiadă 1991, Țările Baltice

83**. Avem situațiile: $b \leq a$ sau $b > a$.

I. Pentru $b \leq a$ avem subcazurile:

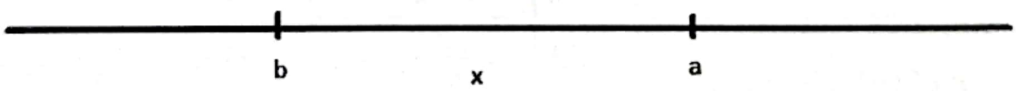
a) Dacă $b \leq a \leq x$, atunci ecuația devine: $x - a + 1 = [x] \Rightarrow x -$ $-[x] = a - 1 \Rightarrow \{x\} = a - 1$, care are soluție doar dacă $a = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Dacă $a \neq 1$ ecuația nu are soluție.

b) Dacă $x \leq b \leq a$, atunci ecuația devine: $-x + a - 1 = [x] \Rightarrow$

$\Rightarrow a - 1 = x + [x] = 2[x] + \{x\} = 2k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow x = [x] \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{a-1}{2}$, a impar.

c)



$-1 + a + 1 = [x] \Rightarrow a + 1 = x + [x] \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{a+1}{2}$, a impar.

II. Situația $b > a$ se tratează analog.

„Test tabăra națională", 1986

84. Avem $[ax] + ax + x - [ax + x] = a + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [ax] - [ax + x] = a + 1 - x(a+1)$ (1).

Notăm $[ax] = p \in \mathbb{Z}$ și $[ax + r] = q \in \mathbb{Z}$ și atunci (1) devine:

$p - q = a + 1 - (a+1)x \Rightarrow (a+1)x = a + 1 - p + q$ (2).

Dar cum $[(a+1)x] \leq (a+1)x < [(a+1)x] + 1 \Rightarrow 0 \leq a + 1 - p < 1 \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow p = a+1$ și din (2) rezultă $x = \frac{q}{a+1}$, însă din $[ax] = a+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a+1 \le ax < a+2 \Rightarrow \frac{a+1}{a} \le x = \frac{q}{a+1} < \frac{a+2}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(a+1)^2}{a} \le q < \frac{(a+1)(a+2)}{a} \Rightarrow a+2+\frac{1}{a} \le q < a+3+\frac{2}{a}$ (3).

Dacă $a \ge 3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < 1$ și $0 \le \frac{2}{a} < 1$ și $q = a+3$.

Prin urmare, pentru $a \ge 3, a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = \frac{a+3}{a+1}$. Pentru $a = 1$, din (3) rezultă $4 \le q < 6 \Rightarrow q \in \{4,5\}$ și ecuația are soluțiile $x \in \left\{2, \frac{5}{2}\right\}$.

Pentru $a = 2$, din (3) rezultă $q = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$.

Dumitru Acu, Concursul „Matematica cu drag", 2007

85. Ecuația se mai scrie:

$[x+a] + [x+a] + \{x+a\} + |x+a| = [x+a] + x + a + |x+a| = b$.

Pentru $x + a \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -a] \Rightarrow [x+a] = b$, care nu are soluție, deoarece $[x+a] \le 0$. Pentru $x + a > 0 \Rightarrow x \in (-a, \infty)$, deci $[x+a] \ge 0$.

$[x+a] + 2(x+a) = b \Rightarrow [x+a] = b - 2a - 2x$ (*)

$\Rightarrow b - 2a - 2x \ge 0 \Rightarrow x \le \frac{b-2a}{2} = \frac{b}{2} - a \Rightarrow x \in \left(-a, \frac{b}{2} - a\right]$.

Pentru $b - 2a - 2x = k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{b-2a-k}{2}$ și ecuația (*) devine:

$\left[\frac{b-k}{2}\right] = k \Rightarrow k \le \frac{b-k}{2} < k+1 \Rightarrow 2k \le b-k < 2k+2 \Rightarrow$

$k \in \left(\frac{b-2}{3}, \frac{b}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$.

Considerăm situațiile:

I. $b = 3p \Rightarrow k \in \left(p - \frac{2}{3}, p\right] \Rightarrow k = p = \frac{b}{3}$;

II. $b = 3p+1 \Rightarrow k \in \left(p - \frac{1}{3}, p + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow k = p = \frac{b-1}{3}$;

III. $b = 3p+2 \Rightarrow k \in \left(p, p + \frac{2}{3}\right] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ și în acest caz ecuația nu are soluție.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

86. Considerăm cazurile:

I. $m = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$;

II. $m = -1 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow x \in (0,1]$;

III. Fie $m \geq 1 \Rightarrow \{(m+1)x\} = m - [mx] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{(m+1)x\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{k}{m+1}$, iar ecuația dată devine: $\left[\dfrac{mk}{m+1}\right] = m \Rightarrow$

$\dfrac{mk}{m+1} - 1 < m \leq \dfrac{mk}{m+1}, mk - (m+1) < m(m+1) \leq mk \Rightarrow$

$\Rightarrow m+1 \leq k < \dfrac{(m+1)^2}{m} \Rightarrow m+1 \leq k < m+2+\dfrac{1}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{m+1, m+2\} \Rightarrow x \in \left\{1, \dfrac{m+2}{m+1}\right\}$;

IV. Fie $m \leq -2, m \in \mathbb{Z}$. Atunci, analog, $x = \dfrac{k}{m+1}$ și ecuația devine:

$\left[\dfrac{mk}{m+1}\right] = m \Rightarrow \dfrac{mk}{m+1} - 1 < m \leq \dfrac{mk}{m+1} \Big| m+1 < 0$

$mk - (m+1) > m(m+1) \geq mk \Rightarrow m+1 \leq k < m+2+\dfrac{1}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = m+1$ (evident, $k = m+2$ nu convine) $\Rightarrow x = 1$ care verifică ecuația.

Gh. Andrei

87. Fie $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ și $a \in (0,\infty) - \{1\}$, astfel încât $m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ și se deduce ușor că $m = n$.

Dacă $m > n \Rightarrow p \geq n+1$ și din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots 1}_{(m-n)\text{ori}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n\text{ ori}}} < \frac{m - n + n\sqrt[n]{a}}{m} = 1 + \frac{n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)}{m} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right) < n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$, fals.

Analog, dacă $m < n$ se obține o contradicție. Deci, $m = n$.

Dacă x este o soluție, atunci $x \geq 2$ și din cele de mai sus rezultă că $x \in [n, n+1)$.

Cum orice număr din $[n, n+1)$ este soluție, rezultă că mulțimea soluțiilor este intervalul $[n, n+1)$.

Gh. Necșuleu, Ion Necșuleu, G.M. nr. 10/2005

88. Considerăm cazurile:

I. Dacă $[x] = k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} \Rightarrow [x] + [x[x]] < n + n^2 = n(n+1)$,

deci nu există soluție pentru $x \in [0, n)$ și analog pentru $k \geq n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x] + [x[x]] > n(n+1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k = n \Rightarrow n + [nx] = n + n^2 \Rightarrow [nx] = n^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 \leq nx < n^2 + 1 \Rightarrow x \in \left[n, n + \frac{1}{n}\right) = S_1.$

II. Dacă $[x] = k \in \{-n, -n+1, \ldots, -2, -1\} \Rightarrow -n \leq x < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 > [x] \geq -n \Rightarrow x[x] \leq n^2 \Rightarrow [x] + [x[x]] < 0 + n^2 < n + n^2,$
deci nu există soluție.

III. Analog, dacă $[x] = k \leq -n - 2 \Rightarrow x \in [k, k+1) \Rightarrow$
$x[x] > k(k+1) \Rightarrow [x] + [x[x]] \geq k(k+2) \geq (n+2)n > n(n+1).$

IV. Dacă $[x] = -n - 1 \Rightarrow x = -n - 1.$
Pentru $x \in (-n-1, -n) \Rightarrow -n - 1 + [-(n+1)n] = n^2 + n \Rightarrow$
$\Rightarrow [-(n+1)x] = (n+1)^2 \Rightarrow (n+1)^2 \leq -(n+1)x < (n+1)^2 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leq -n - 1$, fals. Prin urmare, singura soluție este $x = -n - 1$, deci
$S = \{-n-1\} \cup \left[n, n + \frac{1}{n}\right).$

Gh. Szöllösy, R.M.T. nr. 2/2016

89. Evident, $x = 0$ este soluție.
Fie $x \neq 0$. Atunci cu $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ ecuația devine:
$nt^2 + nkt - (n+m)k = 0 \Rightarrow k(m + n - nt) = nt^2 \Rightarrow k \geq 1$ și pentru ca ecuația să aibă cel puțin o soluție $t \in [0,1)$ se impune ca
$\Delta > 0$, dar cum $t_1 + t_2 = -k < 0$ și $t_1 t_2 = -\left(\frac{n+m}{n}\right)k < 0$
rezultă că are două rădăcini distincte. Dar cum $f(0) = -(n+m)k < 0$ și $f(1) = n + nk - nk - mk = n - mk > 0,$
atunci ecuația are o rădăcină $t \in (0,1) \Rightarrow k < \frac{n}{m} \Rightarrow k \leq \left[\frac{n}{m}\right].$
Pentru fiecare $k \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{m}\right]\right\}$ există un singur $t_k \in (0,1)$, adică
$x_k = k + t_k$, dar și soluția $x = 0$.
Prin urmare, ecuația are $\left[\frac{n}{m}\right] + 1$ soluții.

Gh. Andrei (prelucrare)

90. Soluția 1
$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \cdots > \sqrt[n]{n}.$
Șirul $\sqrt[n]{n}, n \geq 2$ cu $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$ și cum $\sqrt[n]{n} \to 1 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{n}\right] = 1, \forall x \in \mathbb{N}^* - \{1\}.$
Dacă $2\left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$
Dacă $\left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} = 0 \Rightarrow x = 0$, care este soluție.
Dacă $\left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[n+1]{x} - \left[\sqrt[n+1]{x}\right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[n+1]{x} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (*).

Scanned with OKEN Scanner

$\left(\text{Dacă } n < x < n+1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{n+1} \Rightarrow \left[\sqrt[n]{x}\right] = 1 \text{ și } 1 < \sqrt[n+1]{x} < \sqrt[n]{x} \Rightarrow \left[\sqrt[n+1]{x}\right] = 1.\right)$

Din (*) rezultă $x = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$. $S = \left\{0, \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right\}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Daniel Jinga, Concursul „Dan Barbilian", 2004

Soluția 2

Evident, $x = 0$ este soluție. Din ecuație rezultă $2\left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \left\{\sqrt[n+1]{x}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[n+1]{x} = p + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \left(p + \frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (*).

Dar cum $\left[\sqrt[n]{x}\right] = 1 \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{x} < 2, 1 < x < 2^n \Rightarrow 1 < \left(p + \frac{1}{2}\right)^{n+1} < 2^n,$

$1 < p + \frac{1}{2} < 2^{\frac{n}{n+1}} < 2 \Rightarrow p = 1$, din (*) rezultă $x = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left\{0, \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right\}$.

91. Considerăm implicația „$\Leftarrow$".

Dacă $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 2 < \frac{1}{a} < 3$, deci $x = \frac{1}{a}$ este soluție.

Dacă $a \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$, atunci $1 < \frac{1}{a} < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 < \frac{2}{a} < 3 \Rightarrow x = \frac{2}{a}$ este soluție.

Dacă $a \in [1, \infty)$, iar $3a - 2a > 1$ rezultă că există $k \in [2a, 3a)$ natural, deci $x = \frac{k}{a}$ este soluție.

Reciproc, arătăm că dacă $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ ecuația nu are soluție. Fie x o soluție și atunci $\{ax\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{ax\} = 0$ și $[x] = 2 \Rightarrow x = \frac{k}{a}$ cu $x \in [2,3)$,

$k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2 \leq \frac{k}{a} < 3 \Rightarrow a \in \left(\frac{k}{3}, \frac{k}{2}\right], k \in \mathbb{N}^*$, contradicție.

Cezar Apostolescu, O.L. Prahova, 2016

92. a) Avem $-\{mx\} = x - \{x\} = [x] \in (-1,0] \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow \{mx\} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k = \frac{k}{m}, k \in \mathbb{Z}$. Introducând în ecuație rezultă:

$\left\{\frac{k}{m}\right\} - \left\{m\frac{k}{m}\right\} = \frac{k}{m} \Rightarrow \left\{\frac{k}{m}\right\} = \frac{k}{m} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{0,1,2, \ldots, m-1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m \in \mathbb{Z}^* - \mathbb{N}$, atunci din $x_k = \frac{k}{m} \in [0,1) \Rightarrow k \in \{0,1,2,\ldots,-(m-1)\}$.
Pentru ca ecuația să aibă 1000 de soluții trebuie ca $m = 1000$.

b) Evident, din relația $\{f(x)\} = f(\{x\})$ rezultă că $0 \leq f(\{x\}) < 1$ și pentru $0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1$.

Atunci, pentru $f(x) = x^2 + a \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 + a < 1 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leq x^2 < 1 - a \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$.

Pentru $a \geq 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a \in [0,1)$.

Pentru $a < 0$ se impune condiția $\sqrt{-a} < 1$ și deci $a \in (-1,0)$. Prin urmare, ecuația nu are soluție pentru $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

93. Evident, $x = 0$ nu verifică.

Dacă $x > 0$ ecuația devine $2[x] = n$, care are soluție numai dacă n este par.

Atunci $[x] = \frac{n}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right), \forall\, n \in 2\mathbb{N}^*$.

Dacă $x < 0$ și n întreg, atunci $[-x] + |x| = n \Rightarrow 2x = -n \Rightarrow x = -\frac{n}{2}$, dacă $n \in 2\mathbb{N}^*$.

Dacă $x < 0$ și $x \notin \mathbb{Z}$, atunci din $[-x] + [x] = -1 \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$ și din ecuația dată rezultă:

$$[-x] - [x] = n \Rightarrow -2[x] - 1 = n \Rightarrow [x] = -\frac{n+1}{2} \Rightarrow$$

$$x \in \left[-\frac{n+1}{2}, -\frac{n-1}{2}\right),$$

evident că n este impar (altfel ecuația nu are soluție).

Laurențiu Panaitopol, Concursul „Unirea", 2001

94. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că ecuația $x + \{(k-1)x\} = a$ are exact k soluții.

Dacă $y = (k-1)x$, atunci pentru $k = 1 \Rightarrow x = a$, iar pentru $k \geq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{k-1}$$

și ecuația devine: $\frac{y}{k-1} + \{y\} = a \Rightarrow y + (k-1)\{y\} = a(k-1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [y] + k\{y\} = a(k-1) \Leftrightarrow \{y\} = \frac{a(k-1) - [y]}{k} \text{ cu } \{y\} \in [0,1)$$

$$\Rightarrow [y] \leq a(k-1) \text{ și } [y] > a(k-1) - k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [y] \in \big(a(k-1) - k, a(k-1)\big) \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$\{[a(k-1)] - k + 1 \approx [a(k-1)]\}$, deci mulțimea are exact k soluții.

$$[y_i] = [a(k-1)] - k + i, i = \overline{1,k} \Rightarrow \{y_i\} = \frac{a(k-1) - [a(k-1)] + k - 1}{k}$$

$$\Rightarrow \{y_i\} = 1 - \frac{i - \{a(k-1)\}}{k} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_i = [a(k-1)] - k + i + 1 - \dfrac{i - \{a(k-1)\}}{k} \Rightarrow x_i = \dfrac{1}{k-1} y_i, i = \sqrt{k}.$

Olimpiadă Bulgaria

95. Vom face discuții în raport cu $m \in \mathbb{N}$.

Ecuația are soluția $x = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Pentru $m = 0 \Rightarrow [x]\{x\} = 0 \Rightarrow x \in [0,1) \cup \mathbb{Z}$.

Pentru $m = 1 \Rightarrow [x]\{x\} = x \Rightarrow kt = k + t \Rightarrow k \neq 1, t(k-1) = k \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{k}{k-1} \in [0,1) \Rightarrow k \leq 0$, deci $x_k = k + \dfrac{k}{k-1} = \dfrac{k^2}{k-1}, k \leq 0, k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $m \geq 2 \Rightarrow kt = m(k+t) \Rightarrow t(k-m) = mk$ (pentru $k \neq m$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{mk}{k-m} \in [0,1) \Leftrightarrow \dfrac{mk}{k-m} \geq 0$ și $\dfrac{k(m-1)+m}{k-m} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = 0$ și $k \in \left[-\dfrac{m}{m-1}, 0\right) \Rightarrow k \in \{0, -1\} \Rightarrow x_1 = 0.$

Pentru $k = -1 \Rightarrow t = \dfrac{m}{m+1} \Rightarrow x_2 = -1 + \dfrac{m}{m+1} = -\dfrac{1}{m+1}$.

Dar dacă $k = m$, atunci ecuația devine

$[x]\{x\} = [x]x \Rightarrow [x](x - \{x\}) = 0 \Rightarrow x \in [0,1)$.

Pentru $m \leq -1$ rezultă ca mai sus $t = \dfrac{mk}{k-m}$ (evident, $k \neq m$),

$0 \leq \dfrac{mk}{k-m} < 1 \Rightarrow \dfrac{k}{k-m} \geq 0 \Rightarrow k \in (m, 0]$ (1)

și $\dfrac{k(m-1)+m}{k-m} < 0 \Rightarrow k \in \left(m, \dfrac{-m}{m-1}\right) = \left(m, -1 + \dfrac{1}{m}\right)$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $k \in (m, -1], m \leq -2$, de unde rezultă

$x_k = k + \dfrac{mk}{k-m} = \dfrac{k^2}{k-m}, k \in (m, -1]$. Pentru $m = -1$ ecuația devine:

$[x]\{x\} = -x \Rightarrow kt = -k - t \Rightarrow t = \dfrac{-k}{k+1} \in [0,1) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ este singura soluție. Numărul soluțiilor pentru $m \leq -2$ este $m + 1$.

(Extindere) Gh. Andrei

96*.** Pentru $m = 0, x \in [1,2)$.

Pentru $m = \pm 1$ ecuațiile nu au soluții.

Pentru $m = 2$ rezultă $[x] = 2x + 1$ și pentru $[x] = k \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} = t \in$

$\in [0,1) \Rightarrow t = -\dfrac{k-1}{2}$.

Pentru $k = -1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow x = -1$ și pentru $k = -2 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x = -2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x \in \left\{-1, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația dată rezultă $x = \frac{[x]-1}{m} \Rightarrow k \leq \frac{k-1}{m} < k+1$.

Considerăm cazurile:

I. $m \geq 2 \Rightarrow mk \leq k-1 < m(k+1) \Rightarrow -\frac{m+1}{m-1} < k < -\frac{1}{m-1}$.

Rezultă $k \in \{-2,-1\}$ dacă $m = 2$, ceea ce s-a rezolvat și pentru $k = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \geq 3$, deci pentru $m \geq 3 \Rightarrow k = -1$, adică $x = \frac{-2}{m}$.

II. Dacă $m \leq -2$ rezultă $\frac{m+1}{1-m} < k \leq \frac{1}{1-m}$,

de unde rezultă $k = 0$,

deci $x = -\frac{1}{m}$.

Concurs Estonia, 1998-1999

97**. Pentru $k \geq 2$, dacă $x = \frac{2k-1}{2k} \in [0,1)$ și $\frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{2} \Rightarrow k > 1$,

adevărat. Înlocuind obținem:

$2k-1 = \left[2k-1-\frac{2k-1}{2k}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 = \left[\frac{1}{2}-\frac{2k-1}{2k}\right] \Rightarrow 0 = -1$, fals.

Pentru $k = 0 \Rightarrow 0 = \left[-x+\frac{1}{2}\right], \forall x \in (0,1)$, fals.

Pentru $k = -1 \Rightarrow [-2x] = \left[-3x+\frac{1}{2}\right]$ și pentru $x = \frac{1}{6} \Rightarrow \left[-\frac{1}{3}\right] = 0$, fals.

Pentru $k \leq -2$, luând $x = \frac{2k+1}{2k} \in \left(\frac{1}{2},1\right)$, rezultă

$2k+1 = \left[2k+1-\frac{2k+1}{2k}+\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0 = -1$, fals.

Pentru $k = 1 \Rightarrow [2x] = \left[x+\frac{1}{2}\right]$, care este adevărată oricare $x \in [0,1)$.

Așadar, $k = 1$.

Vasile Pop, Concursul „Cristian Calude"

98. Pentru $n = 0 \Rightarrow [x]\{x\} = 0 \Rightarrow x \in [0,1) \cup \mathbb{Z}$.

Pentru $n = 1$, ecuația devine: $[x] = \frac{\{x\}}{1-\{x\}} \geq 0 \Rightarrow [x] = k \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} = \frac{k}{k+1} \in [0,1) \Rightarrow x = k + \frac{k}{k+1}$, care verifică ecuația.

Pentru $n \geq 2 \Rightarrow [x]\{x\} = n[x] - \{x\} \Leftrightarrow [x] = n\big[[x]-\{x\}\big] = \frac{n\{x\}}{n-\{x\}}$,

$\frac{n\{x\}}{n-\{x\}} = k \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \{x\} = \frac{nk}{n+k} \in [0,1) \Rightarrow 0 \leq \frac{nk}{n+k} < 1 \Rightarrow k \in \{0,1\}.$

Pentru $k = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$

Pentru $k = 1 \Rightarrow \{x\} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}.$

Prin urmare, pentru $n \geq 2 \Rightarrow x \in S = \left\{0, \frac{2n+1}{n+1}\right\}.$

Marin Chirciu, R.M.T., 2012

99. Notând $y = mx$, ecuația devine: $[y] - \left\{y + \frac{p}{2}\right\} = q \quad (1).$

Distingem cazurile:

I. p par $\Rightarrow [y] - \{y\} = q$. Dacă $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{y\} = 0$ și $y = q \Rightarrow x = \frac{q}{m}.$

Dacă $q = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1) \Rightarrow [y] - \{y\} = k + t \Rightarrow [y] = k + \{y\} + t \Rightarrow$

$\Rightarrow \{y\} + t = 1 \Rightarrow [y] = k + 1$. Rezultă $y = k + 2 - t \Rightarrow x = \frac{k+2-t}{m}.$

II. p impar $\Rightarrow [y] - \left\{y - \frac{1}{2}\right\} = q$. Dacă $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{y - \frac{1}{2}\right\} = 0$ și

$[y] = q \Rightarrow$

$\Rightarrow y = q + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{q + \frac{1}{2}}{m}.$

Dacă $q = k + \alpha, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1)$, atunci luând $y = n + \beta, n \in \mathbb{Z}, \beta \in [0,1)$

$\Rightarrow n - \left\{\beta - \frac{1}{2}\right\} = k + \alpha \Leftrightarrow n = k + 1$ și $\left\{\beta - \frac{1}{2}\right\} = 1 - \alpha.$

Rezultă că $\beta - \frac{1}{2} - \varepsilon = 1 - \alpha$, unde $\varepsilon = \left[\beta - \frac{1}{2}\right].$

Dacă $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \beta = \frac{3}{2} - \alpha + \varepsilon = \frac{1}{2} - \alpha + 1 + \varepsilon \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} - \alpha, \varepsilon = -1.$

Rezultă $y = k + \frac{3}{2} - \alpha$, deci $x = \frac{k + \frac{3}{2} - \alpha}{m}.$

Dacă $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right); \beta = \frac{3}{2} - \alpha + \varepsilon$, de unde rezultă $\beta = \frac{3}{2} - \alpha$ și $\varepsilon = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = k + \frac{5}{2} - \alpha$, deci $x = \frac{k + \frac{5}{2} - \alpha}{m}.$

Gina Livia Tănase, R.G.M. nr. 32

Scanned with OKEN Scanner

100. Evident, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ și cum $\{x+k\} = \{x\}$, ecuația devine:
$\frac{x}{\{x\}} - 1 = k^2[x]\{x\} \Rightarrow [x] = k^2[x]\{x\}^2$, de unde rezultă că $x \in [0,1) = S_1$ verifică ecuația. Fie $x \notin [0,1)$ și atunci:

$$\{x\}^2 = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \{x\} = \frac{1}{k} \Rightarrow x = m + \frac{1}{k}, \forall\, m \in \mathbb{Z}^*.$$

Prin urmare, $x \in [0,1) \cup \left\{m + \frac{1}{k}, m \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

Concursul „Cristian Calude", 2010, R.M.G. nr. 36

101*. a) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Ecuația se mai scrie:

$$x = \frac{k+2m}{3} \text{ și din } [x] \le x < [x] + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \le \frac{k+2m}{3} < k + 1 \Rightarrow m - 1{,}5 < k \le m \qquad (1).$$

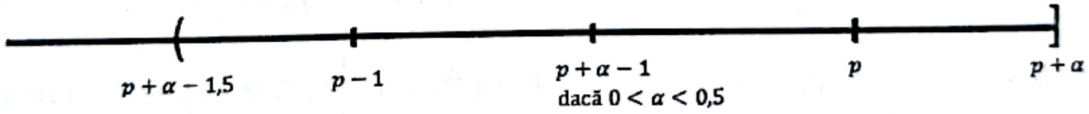
Vom avea atâtea soluții câte numere întregi satisfac (1), dar cum intervalul $\left(m - \frac{3}{2}, m\right]$ are lungimea 1,5 unități, rezultă că ecuația are cel mult două soluții. Adică maxim două soluții și minim o soluție.

1. Dacă m este întreg, atunci din reprezentarea

rezultă că $k \in \{m-1, m\}$, două soluții.

2. Dacă m nu este întreg, fie $m = p + \alpha, p \in \mathbb{Z}, \alpha \in [0,1)$, atunci avem două reprezentări:

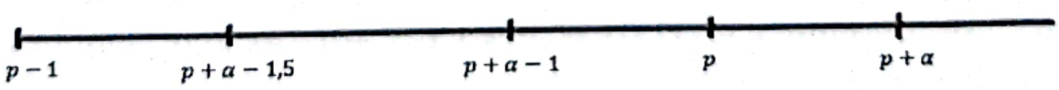
(2)



de unde rezultă că în intervalul $(p + \alpha - 1{,}5, p + \alpha]$ sunt două numere întregi $\{p-1, p\}$.

3. Dacă $0{,}5 \le \alpha < 1$, atunci din reprezentarea (3)

(3)



rezultă că intervalul $(p + \alpha - 1{,}5, p + \alpha]$ conține un singur număr întreg p.

b) Dacă $m \in [2004,2005]$ se aplică punctul a), adică:

– dacă $m \in [2004,2004{,}5)$ rezultă două soluții;

– dacă $m \in [2004{,}5,2005)$ rezultă o singură soluție;

Scanned with OKEN Scanner

– dacă $m = 2005$ rezultă două soluții $x \in \{2004,2005\}$.

Olimpiadă Rusia, 2004-2005, enunț extins

102**. Observăm că $\{x\}^{[x]} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$.

Aşadar, pentru $a < 0$ ecuația nu are soluție.

Pentru $a = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{N}^*$ (evident, $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ nu verifică).

Pentru $a \in (0,1) \Rightarrow [x] > 0 \Rightarrow [x] = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \{x\}^n = a \Rightarrow \{x\} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = n + \sqrt[n]{a}$. Pentru $a = 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x^0 = 1 \Rightarrow x \in (0,1) = S$.

Pentru $a > 1 \Rightarrow [x] < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow [x] = -n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \{x\}^{-n} = a \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x\} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \Rightarrow x = -n + \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \forall\, x \in \mathbb{N}$.

Vasile Pop, R.M.T., 2010

103. a,b) Pentru $a = 5$ şi $n = 2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ şi pentru $a = 10$ nu există n astfel încât $10 \in [n^n, (n+1)^n)$, deci ecuația nu are soluție.

Ecuația are soluție numai dacă $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n^n, (n+1)^n)$.

c) Fie $[x] = n \Rightarrow x^n = a$ cu $x \in [n, n+1), x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$,
$\sqrt[n]{a} \in [n, n+1) \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}, a \in [n^n, (n+1)^n)$.

Ecuația are soluție dacă $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n^n, (n+1)^n)$.

Maria Pop, Concursul „Argument", 2011

104**. Fie $x \in [p, p+1), p \in \mathbb{N} \Rightarrow [x] = p \Rightarrow p^2 \leq px = [x]x < p(p+1) <$
$< (p+1)^2 \Rightarrow p = n \Rightarrow n^2 < [x]x < (n+1)^2 \Rightarrow n \leq x < \frac{(n+1)^2}{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \left[n + \frac{i}{n}, n + \frac{i+1}{n}\right)$, unde $i \in \{0,1,2,, \ldots, n-1\} \Rightarrow [x[x]] = n^2 + i \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 0$. Prin urmare, soluțiile pozitive sunt $x \in \left[n, n + \frac{1}{n}\right) = S_1$. Fie $x < 0$
cu $x \in [-p, -p+1), p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [x] = -p \Rightarrow x[x] = -px \in (p^2 - p, p^2]$.
Dacă $p = 1 \Rightarrow [x[x]] > 0 \Rightarrow x = -1$.
Fie $p \geq 2 \Rightarrow x[x] = -px \in (p^2 - p, p^2] < ((p-1)^2 + 1, p^2]$,
deci $[x[x]]$ este pătrat perfect numai dacă $x[x] = p^2$, adică $x = -p$. Prin urmare, se impune ca $[x[x]] = n^2 \Leftrightarrow x = -n$. Aşadar, singura soluție negativă este $x = -n = S_2$.

Rezultă $x \in S_1 \cup S_2 = \left[n, n + \frac{1}{n}\right) \cup \{-n\}$.

Gh. Szöllösy, R.M.T. nr. 4/2017

Scanned with OKEN Scanner

105**. Avem $\left[\frac{x^2}{n}\right]+\left[\frac{n^2}{x}\right]=\left[\frac{x}{n}+\frac{n}{x}\right]+nx\geq 2+\frac{x^2}{n}\cdot\frac{n^2}{x}\geq 2+\left[\frac{x^2}{n}\right]\cdot\left[\frac{n^2}{x}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\left[\frac{x^2}{n}\right]-1\right)\left(\left[\frac{n^2}{x}\right]-1\right)\leq -1$, deci una dintre expresiile $\left[\frac{x^2}{n}\right]$ și $\left[\frac{n^2}{x}\right]$ este nulă. Fie $\left[\frac{n^2}{x}\right]=0\Rightarrow x=n^2+p, p\in\mathbb{N}^*$.

Rescriind egalitatea dată, rezultă:

$$\left[\frac{n^4+2n^2p+p^2}{n}\right]+0=\left[\frac{n^2+p}{n}+\frac{n}{n^2+p}+n^3+np\right]\Rightarrow n^3+2np+\left[\frac{p^2}{n}\right]=$$

$$=n^3+np+n+\left[\frac{p}{n}+\frac{p}{n^2+p}\right]\Leftrightarrow n(p-1)+\left[\frac{p^2}{n}\right]=\left[\frac{p}{n}+\frac{n}{n^2+p}\right]\quad (*),$$

dar cum $\left[\frac{p}{n}+\frac{n}{n^2+p}\right]\leq\frac{p}{n}+\frac{n}{n^2+p}<\frac{p}{n}+1$, atunci $(*)$ devine

$$n(p-1)+\left[\frac{p^2}{n}\right]<\frac{p}{n}+1\quad (**).$$

Din $n(p-1)<\frac{p}{n}+1\Leftrightarrow p\left(n-\frac{1}{n}\right)<n+1\Leftrightarrow p<\frac{n}{n-1}$, de unde rezultă că $p=1$. Așadar, $x=n^2+1$, care introdusă în egalitatea dată verifică ecuația $n^3+2n+\left[\frac{1}{n}\right]=n^3+2n+\left[\frac{1}{n}+\frac{n}{n^2+1}\right]$.

Dacă $\left[\frac{x^2}{n}\right]=0$ și cum egalitatea este simetrică în x și n, se deduce că $n=x^2+1\Rightarrow x^2=n-1\Rightarrow x=\sqrt{n-1}$ (numai dacă $n-1$ este pătrat perfect). Prin urmare, soluțiile sunt $x=n^2+1$ și $x=\sqrt{n-1}$ dacă $n=k^2+1$, $k\in\mathbb{N}$.

Marcel Chiriță, L.S., 2007

106**. Se utilizează rezultatul de la ex. 69 b).

107**. a) Avem $\frac{x}{n}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=kn, k\in\mathbb{Z}$ (1) $\Rightarrow k\leq\frac{x}{m}<k+1\Rightarrow$ $km\leq x<km+m$ (2).

Cazul I. Dacă $m=n\Rightarrow S=\{kn, k\in\mathbb{Z}\}$.

Cazul II. Dacă $m<n\Rightarrow 0\leq k(n-m)<m\Rightarrow 0\leq k<\frac{m}{n-m}$.

Dacă $\frac{m}{n-m}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow k\in\left\{0,1,\ldots,\frac{m}{n-m}-1\right\}\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow S=\left\{0,n,\ldots,n\left(\frac{m}{n-m}-1\right)\right\}$, iar dacă $\frac{m}{n-m}\notin\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\left\{0,1,2,\ldots,\left[\frac{m}{n-m}\right]\right\}\Rightarrow S=\left\{0,n,\ldots,n\left[\frac{m}{n-m}\right]\right\}$.

Cazul III. Dacă $m>n\Rightarrow k(m-n)\leq 0<k(m-n)+m$

$\Rightarrow\begin{cases}k\leq 0\\ k>\frac{-m}{m-n}\end{cases}$. Dacă $\frac{-m}{m-n}\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow k\in\left\{\frac{-m}{m-n}+1,\ldots,-1,0\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow S=\left\{n\left(1-\frac{m}{m-n}\right),\ldots,-2n,-n,0\right\}$, iar dacă $\frac{-m}{m-n}\notin\mathbb{Z}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow k\in\left\{\left[\frac{-m}{m-n}\right]+1,\ldots,-2,-1,0\right\}\Rightarrow S=\left\{n\left(1+\left[\frac{-m}{m-n}\right]\right),\ldots,-2n,-n,0\right\}$.

b) Dacă $m=n\Rightarrow[nx]=n[x]$, care este evident verificată de orice $x\in\mathbb{Z}$.

Notând $x=k+t,k\in\mathbb{Z}$ și $t\in[0,1)$, ecuația devine $[nt]=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 0\leq t<\frac{1}{n}$ (1) $\Rightarrow x=k+t,t\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$

și dacă notăm $A_k=\left\{k+t,k\in\mathbb{Z},t\in\left[0,\frac{1}{n}\right)\right\}\Rightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}A_k\supset\mathbb{Z}$.

Observație: α) Cazul $[x]=0\Rightarrow x\in\left[0,\frac{1}{m}\right)$.

β) Dacă $m=1\Rightarrow[x]=n[x]\Leftrightarrow[x](n-1)=0$ și pentru $n\neq 1\Rightarrow x\in[0,1)=S$, iar pentru $m=n=1\Rightarrow x\in S=R$. Fie $n\neq m$. În cazul $n>m\Rightarrow[mt]=k(n-m),k\in\mathbb{N}^*$ (1) $\Rightarrow k(n-m)\leq mt<$

$<k(n-m)+1$ (2) și fie cazul $0<\frac{k(n-m)}{m}\leq t<\frac{k(n-m)}{m}+\frac{1}{m}\leq 1$ (3)

de unde rezultă $\frac{k(n-m)}{m}<1$ și $\frac{k(n-m)}{m}\frac{1}{m}\leq 1\Rightarrow k<\frac{m}{n-m}$ și

$k\leq\frac{m-1}{n-m}$, iar cum $\frac{m-1}{n-m}<\frac{m}{n-m}\Rightarrow 1\leq k\leq\left[\frac{m-1}{n-m}\right]$ (4),

cu condiția ca $\frac{m-1}{n-m}\geq 1\Rightarrow 2m\geq n+1$ (5).

În aceste condiții ecuația are soluțiile $x_k=k+t$, unde k verifică (4) și t verifică (3) cu condiția (5).

Dacă în (3) se consideră situația $\frac{k(n-m)}{m}+\frac{1}{m}>1\Rightarrow k>\frac{m-1}{n-m}\Rightarrow$

$\Rightarrow k\geq\left[\frac{m-1}{n-m}\right]$ și cum $k\leq\left[\frac{m}{n-m}\right]\Rightarrow k\in\left[\left[\frac{m-1}{n-m}\right],\left[\frac{m}{n-m}\right]\right]=J_m$ și

$t\in\left[\frac{k(n-m)}{m},1\right)$ (6), unde $\left[\frac{m}{n-m}\right]\in\left\{\left[\frac{m-1}{n-m}\right],\left[\frac{m-1}{n-m}\right]+1\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Intervalul J_m poate conține cel mult două numere întregi.
Cazul $n < m \Rightarrow$ atunci din (1) $[m+t] = k(n-m) > 0 \quad (1') \Rightarrow k \leq -1$ (cazul $k = 0$ s-a menționat).

Din (1') rezultă $0 < \frac{k(n-m)}{m} \leq t < \frac{k(n-m)}{m} + \frac{1}{m}$.

Rezultă $0 < \frac{k(n-m)}{m} < 1$ și dacă și $\frac{k(n-m)}{m} + \frac{1}{m} \leq 1 \Rightarrow k > \frac{m}{n-m}$,

$k \geq \frac{m-1}{n-m}$, dar $\frac{m}{n-m} < \frac{m-1}{n-m} \Rightarrow k \geq \left[\frac{m-1}{n-m}\right] + 1 = -r, r \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in \{-r, -r+1, \ldots, -2, -1\}$ și cu $t \in \left[\frac{k(n-m)}{m}, \frac{k(n-m)}{m} + \frac{1}{m}\right)$, cu condiția $\left[\frac{m-1}{n-m}\right] + 1 \leq -1$ care este verificată pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

La fel ca în cazul precedent, se consideră și situația $\frac{k(n-m)}{m} + \frac{1}{m} > 1$, atunci $t \in \left[\frac{k(n-m)}{m}, 1\right)$ ș. a. m. d. (în legătură cu ex. 54).

Gh. Andrei

ϕ 4. Ecuații în care apar sume (nivel mediu-avansat)

108**. Egalitatea se mai scrie:

$$[x] + 1 + [x] + 2 + \cdots + [x] + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n[x] + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1).$$

Victor Săceanu, G.M. nr. 5/2011

109. Ecuația devine: $3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \cdots + (2n+1)n = 3723 \Rightarrow$

$$n = 17.$$

110. Din $[x+y] = x + [y], \forall x \in \mathbb{Z}$. Ecuația devine:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + n\left[\frac{3x}{2}\right] = \frac{n(n-1)(2n-5)}{6} \Leftrightarrow \left[\frac{3x}{2}\right] = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right).$$

Crina Petruțui, Argument nr. 11

111. Fie șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ care este strict crescător și nemărginit. Se constată că a_{10} este primul termen mai mare decât 3.

Scanned with OKEN Scanner

112. Pentru $n \geq 1{,}2$ relația este adevărată. Pentru $n \geq 3, S_n > n$, deoarece: $[1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}] \geq \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} > n, \forall\, n \geq 3.$

Florin Rotariu, R.M.T., 2011

113. Avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1)^2+k^2}{2k(k+1)}-1\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{2(n+1)}.$$

Rezultă $\left[\frac{\sqrt{x}}{n+1}\right]=\left[\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}\right]=0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x}}{n+1}<1 \Rightarrow 0 \leq x < (n+1)^2$

$\Rightarrow x \in [0,(n+1)^2]$.

Adrian Talasman

114. Evident, $n-1<\frac{n^2}{n+1}<n \Rightarrow \left[\frac{n^2}{n+1}\right]=n-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci rezultă

$$0+1+2+\cdots+n-1=2050 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}=2080 \Rightarrow n=65.$$

T. Covaciu, Argument, 2005

115. Din $(k+1)^2 \leq k^2+4k<(k+2)^2 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)}\right]=k+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+2+3+\cdots+n+(n+1)=230 \Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2}=231 \Rightarrow n=20.$$

Concursul „Victor Vâlcovici", 2011

116. Ecuația se mai scrie: $\sum_{k=1}^{n}\left[2^{k-1}x+\frac{1}{2}\right]=2003 \quad (*)$.

Utilizând identitatea lui Hermite: $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[1a]$ rezultă

$$\left[2^{k-1}x+\frac{1}{2}\right]=[2^k x]-[2^{k-1}x].$$

Ecuația $(*)$ devine: $\sum_{k=1}^{n}[2^k x]-[2^{k-1}x]=[2^n x]-[x]=2003 \Rightarrow$

$\Rightarrow [2^n x]=[x]+2003\ (**).\ 2^n x-1<2003+x \Rightarrow 0 \leq x < \frac{2004}{2^n-1} \leq$

$\leq \frac{2004}{2^{11}-1}<1 \Rightarrow [x]=0$ și ecuația $(**)$ devine $[2^n x]=2003$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă soluţia $S = \left[\frac{2003}{2^n}, \frac{2004}{2^n}\right)$.

117. Avem

$$k < \sqrt{k(k+1)+k} < \sqrt{k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}} < \sqrt{(k+1)k+k+1} =$$

$$= k+1 \Rightarrow \left[\sqrt{k(k+1)+\sqrt{k(k+1)}}\right] \equiv k \text{ şi ecuaţia devine:}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k+x} = \frac{n(2n^2+9n+12)}{6}.$$

Observăm că $x = 1$ este soluţie unică, deoarece pentru

$$x > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k+x} < \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^3}{k+1} = \frac{n(2n^2+9n+12)}{6}.$$

Anca Popescu, O.L. Argeş, 2003

118. Avem $\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n^2-2^k}{2^{k+1}}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n^2}{2^{k+1}} - \frac{1}{2}\right] =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n^2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} - 1\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n^2}{2^k}\right] - \left[\frac{n^2}{2^{k+1}}\right] = n^2 - \left[\frac{n^2}{2^{k+1}}\right]$$

şi membrul stâng al ecuaţiei devine:

$n^2 - n - \left[\frac{n^2}{2^n}\right]$, de unde rezultă că se impune ca $\left[\frac{n^2}{2^n}\right] = 1 \Rightarrow n \in \{2,3,4\}$.

N. Minculete, G.M. nr. 5-6/2002

119. Utilizând identitatea lui Hermite avem:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx] - [x], \forall\, n \in \mathbb{R}.$$

Ecuaţia devine: $[x]^3 + 2[nx] - 2[x] = 2[nx] + 3 \Leftrightarrow [x]^3 - 2[x] - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]([x]^2 - 2) = 3.$

Rezultă uşor că $[x] \in \{-1,3\}$ verifică.

De unde rezultă că $x \in [-1,0) \cup [3,4)$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

120. Evident, $x \neq 0$. Fie $x > 0$ şi atunci ecuaţia devine:

$n[x] + x\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$, de unde rezultă că $x = 1$ verifică.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece funcția din stânga este strict crescătoare, rezultă că $x = 1$ este soluția unică. Dacă $x < 0$, atunci ecuația devine:

$-n[x] - \frac{xn(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n}{2}$, unde funcția din stânga este strict descrescătoare și analog $x = -1$ este soluție unică. Așadar, soluțiile sunt $\{\pm 1\}$.

Concursul S.S.M., 2000, G.M. nr. 9/2000

121. Avem $\sum_{k=1}^{2n}[x] + \sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n}[(-1)^k x] = 2n(n+2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n[x] + n(2x+1) + [-x] + [x] + \cdots + [-x] + [x] = 2n^2 + 4n \quad (*)$.

(Utilizăm relația $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$.)

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci din relația $(*)$ rezultă: $2n[x] = 3n \Rightarrow [x] = \frac{3}{2}$, fals.

Dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, atunci din relația $(*)$ rezultă:

$2n[x] + 2n^2 + n - n = 2n^2 + 4n \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow x \in (2,3)$.

Teodor Poenaru, Cluj, 2016

§ 5. Ecuații în care apar sume (nivel avansat – concursuri și olimpiade)

122**. Evident, rezultă ușor că $x > 0$ și $[x] \leq [2x] \leq \cdots \leq [kx]$.

Prin urmare, rezultă că: $[nx] = 1$ și $[kx] = 0; k \equiv \overline{1, n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq nx < 2$ și $0 \leq kx < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{k} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$,

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Observație: pentru $n = 1 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x \in [1,2)$.

123**. Evident, $x \in \mathbb{Z}$ și cum

$\frac{x^2 + (2k+1)x + k(k+1)}{2} = \frac{(x+k)(x+k+1)}{2}$, ecuația se mai scrie:

$2x + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{(x+k)(x+k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

$2x + \sum_{k=0}^{n} x^2 + (2k+1)x + k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

$$2x+(n+1)x^2+(n+1)^2x+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$

$\Rightarrow (n+1)x^2+(n+1)^2x+2x=0\Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow x_2=-\dfrac{(n+1)^2-2}{n+1}=-n-1-\dfrac{2}{n+1}.$

Pentru $n=1\Rightarrow x_2=-3$, deci $x\in\{0,-3\}$.

Concurs „Gh. Ţiţeica", 1988

124***. Pentru $x<1$ avem $kx<k\Rightarrow[kx]<k,\forall\, k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $[x]+[2x]+\cdots+[nx]<1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}.$

Pentru $x\geq 2$ avem $kx\geq 2k\Rightarrow[kx]\geq 2k,\forall\, k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $[x]+[2x]+\cdots+[nx]\geq 2+4+\cdots+2n>\dfrac{n(n+1)}{2}.$

Fie $x\in[1,2)$ şi împărţim pe $[1,2)$ în n subintervale de lungime egală

$\left[1,1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left[1+\dfrac{1}{n},1+\dfrac{2}{n}\right),\ldots,\left[1+\dfrac{n-1}{n},2\right).$

Pentru $x\in\left[1,1+\dfrac{1}{n}\right)$ avem $k\leq kx<k+\dfrac{k}{n}<k+1\Rightarrow[kx]=k$ şi ecuaţia

devine $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (A).

Pentru $x\in\left[1+\dfrac{1}{n},1+\dfrac{2}{n}\right)$ avem $k+\dfrac{k}{n}\leq kx<k+\dfrac{2k}{n}$ şi atunci $[kx]=k$,

$\forall\, k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ şi $[nx]=n+1$.

Ecuaţia devine $1+2+\cdots+(n-1)+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (F).

Similar se tratează şi celelalte cazuri şi nu se mai obţin soluţii.

În concluzie, mulţimea soluţiilor date este intervalul $\left[1,1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Mihai Piticari

125. Evident, rezultă $x\in\mathbb{Z}$.

Utilizăm egalitatea $\left[\dfrac{[x]}{n}\right]=\left[\dfrac{x}{n}\right],\forall\, x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}^*,$

$[x+n]=[x]+n$ şi identitatea lui Hermite.

Într-adevăr, avem: $\left[\dfrac{x+1}{m}\right]+\left[\dfrac{x+2}{m}\right]+\cdots+\left[\dfrac{x+m}{m}\right]=x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\dfrac{x}{m}+\dfrac{1}{m}\right]+\left[\dfrac{x}{m}+\dfrac{2}{m}\right]+\cdots+\left[\dfrac{x}{m}+\dfrac{m-1}{m}\right]+\left[\dfrac{x}{m}+1\right]=x+1\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\dfrac{x}{m}\right]+\left[\dfrac{x}{m}+\dfrac{1}{m}\right]+\left[\dfrac{x}{m}+\dfrac{2}{m}\right]+\cdots+\left[\dfrac{x}{m}+\dfrac{m-1}{m}\right]=x\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \left[m\frac{x}{m}\right] = x \Rightarrow [x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}.$

Așadar, soluțiile sunt toate numerele întregi.

126. Fie $E_n(x) = \frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n} =$

$= \frac{(n+1)x}{2} - \frac{x-\{x\}+2x-\{2x\}+\cdots+nx-\{nx\}}{n} =$

$= \frac{(n+1)x}{2} - \frac{(n+1)x}{2n} + \frac{\{x\}+\{2x\}+\cdots+\{nx\}}{n} = \frac{\{x\}+\{2x\}+\cdots+\{nx\}}{n},$

dar $[E_n(x)] = \left[\frac{\{x\}+\{2x\}+\cdots+\{nx\}}{n}\right] = 0$, întrucât $0 \le \{nx\} < 1$.

Prin urmare, $x \in \mathbb{R}$.

127. Avem: $\frac{x}{k(k+1)} - 1 < \left[\frac{x}{k(k+1)}\right] \le \frac{x}{k(k+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{nx}{n+1} - n < n \le \frac{nx}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \le \frac{x}{n+1} < 2 \Rightarrow x \in [n+1, 2n+2) = S.$

Concursul „Grigore Moisil", 2015

128*.** Fie $x \in \mathbb{N}$ și considerând șirul pătratelor 1, 4, 9, 16,..., $(n-1)^2$, n^2 și evident pentru orice număr natural $n, n \ge 2$ este adevărată relația:

$\left[\sqrt{(n-1)^2}\right] + \left[\sqrt{(n-1)^2+1}\right] + \cdots + \left[\sqrt{n^2-2}\right] + \left[\sqrt{n^2-1}\right] =$

$= (2n-1)(2n+1)$ și prin urmare avem:

$31 + 53 + 75 + \cdots + (2x-1)(2x+1) = 125 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2[1^2+2^2+\cdots+(x-1)^2] + [1+2+3+(x-1)] = 125 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-1)(4x+1) = 750$, cu soluția unică $x = 6$.

Baraj, R. Moldova, 1993

129. Egalitatea se mai scrie: $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = n.$

Fie $p \in \mathbb{N}$ primul număr astfel încât $\frac{n}{2^{p+1}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{2^p} < 1.$

Atunci $\sum_{k=1}^{p} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right] = n$ (deoarece ceilalți termeni sunt nuli).

Dar $n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right] =$ (Hermite)

Scanned with OKEN Scanner

$$= \left[\frac{n}{2^p}\right] + \left[\frac{n}{2^p} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^{p-1}} + \frac{1}{2}\right] + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \left[\frac{n}{2^p}\right] + \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{n}{2^p}\right] = 0.$$

130. Din relația lui Hermite rezultă: $[3a] - [a] = \left[a + \frac{1}{3}\right] + \left[a + \frac{2}{3}\right]$.

Membrul stâng devine:

$$\sum_{k=1}^{2004} \left[\frac{x}{3^k} + \frac{1}{3}\right] + \sum_{k=1}^{2004} \left[\frac{x}{3^k} + \frac{2}{3}\right] = \sum_{k=1}^{2004} \left(\left[\frac{x}{3^k} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{x}{3^k} + \frac{2}{3}\right]\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2004} \left[\frac{x}{3^{k-1}}\right] - \left[\frac{x}{3^k}\right] = [x] - \left[\frac{x}{3^{2004}}\right] \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x \in [1,2).$$

M. Cimpoeșu, O.L. Suceava, 2004

131. a) Pentru ca suma să fie nulă, se impune ca fiecare termen să fie nul, deci: $x \in \{1,2,3,\ldots,p\}$ și $\frac{x^2+p^2}{x^2} = 1 + \left(\frac{p}{x}\right)^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{x}{p}$.

Așadar, numărul soluțiilor este egal cu numărul divizorilor lui p din mulțimea $\{1,2,\ldots,p\}$.

b) Dintre elementele mulțimii $A = \{1,2,3,\ldots,20\}$ se aleg cele pentru care $\frac{54000}{x^2} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{5^3 \cdot 3^3 \cdot 2^4}{x^2} \in \mathbb{N}, x \in \{1,2,3,4,5,6,10,12,15\} = S$.

132. a) Evident $x > 0$ și $x = 1$ verifică ecuația.

Cu substituția $y = \frac{1}{x}$ ecuațiile devin:

a′) $\sum_{k=1}^{n} [ky] = \frac{n(n+1)}{2}$;

b′) $\sum_{k=1}^{n} [k^2 y] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c′) $\sum_{k=1}^{n} [k^3 y] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Dacă $0 < y < 1$, atunci avem $\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} [ky] \leq \sum_{k=1}^{n} ky \leq y\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geq 1$, fals.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $y \geq 2$, atunci fie $y = [y] + \{y\} = m + \varepsilon, m \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon \in [0,1)$ și ecuația devine:

$$\sum_{k=1}^{y}[ky] = \sum_{k=1}^{n}[k(m+\varepsilon)] = m\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}(k\varepsilon) = \frac{mn(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}[k\varepsilon],$$

$(m \geq 2)$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = \frac{mn(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}[k\varepsilon], \text{ fals (deoarece } \sum_{k=1}^{n}[k\varepsilon] \geq 0 \text{ și } m \geq 2).$$

Fie $y \in (1,2) \Rightarrow y = 1 + \varepsilon \in (0,1)$ și atunci ecuația devine:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n}[k(1+\varepsilon)] = \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n}[k\varepsilon] = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}[k\varepsilon] = 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < \frac{1}{n} \Rightarrow y \in \left[1,1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{n}{n+1},1\right].$$

Analog se rezolvă ecuațiile b'), c').

b) Analog.

c) Evident, $x = 1$ este soluție.

Dacă $x > 1 \Rightarrow \frac{k^3}{x} < k^3 \Rightarrow \left[\frac{k^3}{x}\right] < k^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{y}\left[\frac{k^3}{x}\right] < \sum_{k=1}^{y}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \text{ fals.}$$

Dacă $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{k^3}{x} > k^3 \Rightarrow k^3 y > k^3, \frac{1}{x} = y > 1$. Fie $x \in \left[\frac{x^3+1}{x^3+2},1\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < \frac{x^3+2}{x^3+1} = 1 + \frac{1}{x^3+1}, k^3 < \frac{k^3}{x} < k^3 + \frac{k^3}{x^3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^3 \leq \left[\frac{k^3}{x}\right] \leq k^3 + \left[\frac{k^3}{x^3+1}\right] \text{ întrucât } \sum_{k=1}^{n}k^3 \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^3}{x}\right] \leq \sum_{k=1}^{n}k^3 + 0.$$

Rezultă $x \in \left[\frac{x^3+1}{x^3+2},1\right) \Rightarrow \left[\frac{k^3}{x^3+1}\right] = 0, \forall\, k = \overline{1,n}.$

M. Bencze, Octogon (1)/2016

133. Avem $\sum_{k=1}^{n}\left[x+k-\frac{1}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n}k + \left[x-\frac{1}{n}\right] = \frac{n(n+1)}{2} + n\left[x-\frac{1}{n}\right] =$

$$= \left[x-\frac{1}{n}\right] = -\frac{n+1}{2} = -p \in \mathbb{Z} \text{ cu } p \in \mathbb{N}^* \text{ și } n = 2p-1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația devine: $\left[x-\frac{1}{2p-1}\right]=-p \Rightarrow x-\frac{1}{2p-1}-1<-p\leq x-\frac{1}{2p-1}$

$\Rightarrow \frac{-(2p+1)(p-1)}{2p-1}\leq x<\frac{-p(2p-3)}{2p-1}$, unde $p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{-(2p+1)(p-1)}{2p-1},\frac{-p(2p-3)}{2p-1}\right)=I_p, p\in\mathbb{N}^*.$

Cum $\frac{-p(2p-3)}{2p-1}+\frac{(2p+1)(p-1)}{2p-1}=1$, rezultă că lungimea este 1, deci el conține intervalului I_p un singur număr întreg.

Cum $I_p\subset(-\infty,0]$, pentru fiecare $n=2p-1$ ecuația are ca soluții intervalul I_p, deci o singură soluție întreagă, $x\in\mathbb{Z}$.

Valeriu Voicu, G.M. nr. 1/1983

134. Evident, $x\in\mathbb{Z}$ și $x=0$ este o soluție.

Fie $x>0$. Atunci avem: $x\geq\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x}{6}\right]>$

$>\left(\frac{x}{2}-1\right)+\left(\frac{x}{3}-1\right)+\left(\frac{x}{4}-1\right)+\left(\frac{x}{5}-1\right)+\left(\frac{x}{6}-1\right)=\frac{29}{20}x-5\Rightarrow$

$\Rightarrow 5>\frac{9}{20}x$ și $x\leq 11$. Soluțiile sunt $4=2+1+1$ și $5=2+1+1+1$.

Fie $x<0$. Atunci $x<x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow 1>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,

dar cum $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ și $n\geq 6$, rezultă că nu avem soluție.

Așadar, $S=\{4,5\}$.

Dorinel Anca, G.M. nr. 12/2003

135*.** Se observă că $A_n\subset\mathbb{Z}, \forall\, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

a) Elementele din A_2 îndeplinesc condițiile: $x-2<2x\leq x\Rightarrow$

$\Rightarrow A_2=\{-1,0\}$. Elementele din A_3 îndeplinesc condițiile:

$5x-12<6x\leq 5x\Rightarrow A_3=\{-5,-4,-3,-2,-1,0\}$ și $A_2\cup A_3=A_3$.

b) Pentru $x\geq 4$, dacă $x\in A_n\Rightarrow x\leq\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x$,

dar cum $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>1\Rightarrow x\geq 0, \left[\frac{x}{n}\right]\geq\frac{x-(n-1)}{n}$.

Cum pentru $x,n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ și $x\in A_n\Rightarrow [n]\geq\frac{x-(n-1)}{n}$ și $x\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\geq\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]\geq\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}\Rightarrow x\leq 23,$

deci A este mărginită superior.

Dar cum $A\subset\{-5,-4,-3,\ldots 22,23\}$ și $23\in A_n\Rightarrow \max A=23$.

Dan Nedeianu, O.N., 2010

Scanned with OKEN Scanner

136***. Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.
Avem: $[k+t] + [2k+2t] + \cdots + [nk+nt] = n^2$ (1),
$k(1+2+\cdots+n) + [t] + [2t] + \cdots + [nt] = n^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k\dfrac{n(n+1)}{2} + [t] + [2t] + \cdots + [nt] = n^2$ (2).

Notăm cu $S = [t] + [2t] + \cdots + [nt] < \dfrac{n(n+1)}{2}$ și (2) devine

$k\dfrac{n(n+1)}{2} + S = n^2$ (3).

Considerăm situațiile:

a) $k < 0$. Atunci din (2) și (3) rezultă că ecuația nu are soluție;

b) $k = 0$. Atunci (3) devine $S = n^2 < \dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 < n$, fals;

c) $k > 1$. Atunci din (3) și (2) rezultă că ecuația nu are soluție;

d) Dacă $k = 1$, atunci din (3) rezultă $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ și avem

$[t] = 0, [2t] = 1, [3t] = 2, \ldots, [nt] = n-1$ (4), deoarece din $0 \le t < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \le nt < n \Rightarrow [nt] \le n-1$.

Din (4) avem $t \in [0,1), t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right), t \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right), t \in \left[\dfrac{3}{4}, 1\right), \ldots, t \in \left[\dfrac{n-1}{n}, 1\right)$
$\Rightarrow t \in \left[\dfrac{n-1}{n}, 1\right)$ și $x = k + t = 1 + t \Rightarrow x \in \left[\dfrac{2n-1}{n}, 2\right)$.

Olimpiadă Turcia, 1996

137***. <u>Soluția 1</u>

Ecuația se mai scrie: $x + \dfrac{1}{2n} + x + \dfrac{3}{2n} + \cdots + x + \dfrac{2n-1}{2n} -$
$-\left(\left[x + \dfrac{1}{2n}\right] + \left[x + \dfrac{3}{2n}\right] + \cdots + \left[x + \dfrac{2n-1}{2n}\right]\right) = \dfrac{n(2n-1)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow nx + \dfrac{1+3+5+\cdots+2n-1}{2n} = nx + \dfrac{n^2}{2n} = \dfrac{n(2n+1)}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[x + \dfrac{1}{2n}\right] + \left[x + \dfrac{3}{2n}\right] + \cdots + \left[x + \dfrac{2n-1}{2n}\right] = \dfrac{n(2n-1)}{2} - \dfrac{n(2n+1)}{2} = n.$

Fie $E = \sum_{k=1}^{n} \left[x + \dfrac{2k-1}{2n}\right] = n$. Considerăm cazurile:

a) $x + \dfrac{2n-1}{2n} \Rightarrow x + \dfrac{2i-1}{2n} < \dfrac{2(n+i-1)}{2n} = 1 + \dfrac{i-1}{n}$.

Cum $i = \overline{1,n}$, fiecare termen este cel mult 1, dar primul termen este nul
$\Rightarrow E < n$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\frac{2n-1}{2n} \le x < \frac{2n+1}{2n} \Rightarrow 1+\frac{i-1}{n} \le x+\frac{2i-1}{2n} < 1+\frac{i}{n}$.

Cum $0 = \overline{1,n}$, rezultă că fiecare termen este 1, deci $E = n$.

c) $x \ge \frac{2n+1}{2n} \Rightarrow x+\frac{2i-1}{n} \ge 1+\frac{i-1}{n}$, fiecare termen este mai mare decât 1, ultimul fiind cel puțin 1, deci $E \ge n+1$.

Așadar, $x \in \left[\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n+1}{2n}\right) = I_n$.

Soluția 2

Ecuația se reduce la $\sum_{k=1}^{n}\left[x+\frac{2k-1}{n}\right] = n$.

Considerăm funcția $f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[x+\frac{2k-1}{n}\right]$ și $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = \left[x+\frac{3}{2^n}\right] +$

$+\left[x+\frac{5}{2^n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{2n-1}{n}\right]+\left[x+\frac{2n+1}{2n}\right] = f(x)+1, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Rezultă că f este crescătoare și din $f(x) = n, \forall\, x \in \left[\frac{2n-1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(x+\frac{1}{n}\right) = n+1$. Prin urmare, f este constantă pe fiecare interval de lungime $\frac{1}{n}$ de forma $I_n = \left[\frac{2n-1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right), \forall\, x \in \mathbb{N}^*$.

Cum f este crescătoare, rezultă că mulțimea soluțiilor este intervalul I_n.

Marius Perianu

138*.** Avem $\frac{x}{k(k+1)} - 1 < \left[\frac{x}{k(k+1)}\right] \le \frac{x}{k(k+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k(k+1)} - n < \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k(k+1)}\right] \le x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} =$

$= x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{xn}{n+1}$, deci

$\frac{xn}{n+1} - n < n < \frac{xn}{n+1} \Rightarrow \frac{x}{n+1} - 1 < 1 \le \frac{x}{n+1}$

$n+1 \le n < 2n+2 \Rightarrow x \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n+1\} = A_n$.

Dacă $x \in \mathbb{N}$ este soluție, ea trebuie să se afle în mulțimea A_n care are $n+1$ elemente. Prin urmare, trebuie ca n din cele $n+1$ numere să fie soluții.

Observăm că pentru $n = 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{1\cdot 2}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 3}\right] = 2 \Rightarrow x \in \{3,4,5\}$ și verifică $x \in \{4,5\}$, deci sunt două soluții.

Scanned with OKEN Scanner

a) Pentru $n = 3$ ecuația devine

$\left[\frac{x}{1\cdot 2}\right]+\left[\frac{x}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{x}{3\cdot 4}\right]=3 \Rightarrow x \in \{4,5,6,7\}$,

dar niciunul dintre numerele de mai sus nu verifică ecuația.

b) Pentru $n = 4$ se obțin numai două soluții $x \in \{6,7\}$.

De remarcat că pentru $n \geq 3$ numerele $2n, 2n+1$ din A_n nu pot fi soluții, deci rămân numai $n-1$ dintre numere care pot fi soluție.

Așadar, numai pentru $n = 2$, ecuația are două soluții.

Nicolae Popescu, Concursul „Grigore Moisil", 2015

139*.** Se calculează $\sum_{k=1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+3n}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2+3n}{(n+1)(n+2)}$. Avem

$\left[\frac{(n^2+3n)x}{4(n+1)(n+2)}\right]=n^2+3n \Rightarrow n^2+3n \leq \frac{x(n^2+3n)}{4(n+1)(n+2)}<n^2+3n+1.$

$n^2+3n \leq \frac{m(n^2+3n)}{n^2+3n+2}<n^2+3n+1 \Rightarrow n^2+3n+2 \leq m <$

$<\frac{(n^2+3n+1)(n^2+3n+2)}{n^2+3n}, n^2+3n+2 \leq m < n^2+3n+3+\frac{2}{n^2+3n}$

$< n^2+3n+4$ și $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{n^2+3n+2, n^2+3n+3\}$,

$x \in \{4(n^2+3n+2), 4(n^2+3n+3)\}, n \in \mathbb{N}^*$.

140. Soluția 1

Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[kx] = k[x], \forall\, k \in \mathbb{N}^*$ și egalitatea este evidentă. Reciproc, scriind relația și pentru $n+1$ rezultă $(n+1)[nx] = n[(n+1)x]$ $(*)$.

Dacă $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$. Dacă $t \neq 0$, atunci relația $(*)$ devine $(n+1)(nk + [nt]) = n\big((n+1)k + [(n+1)t]\big) \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)[nt] = n[(n+1)t], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $t \neq 0$. Rezultă $2[t]$ și $\frac{1}{n+1}<t<\frac{1}{n}, \forall\, n \geq 1$ și atunci $[nt] = 0$, $[(n+1)t] = 1 \Rightarrow 0 = n$, fals. Prin urmare, $t = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Soluția 2

Din relația dată rezultă

$\frac{n([x]+[nx])}{2}+[(n+1)x]=\frac{(n+1)([x]+[n+1]x)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow n[nx] = [x] + (n-1)[(n+1)x], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (1).

Dacă facem în (1) substituția $n \to n+1$ rezultă $(n+1)[(n+1)x] = [x] +$ $+ n[(n+2)x], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (2).

Scăzând (1) din (2) rezultă $2\{(n+1)x\} = \{(n+2)x\} + \{nx\}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă că șirul $a_n = \{nx\}$ este o progresie aritmetică, dar cum șirul

Scanned with OKEN Scanner

$(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că rația de progresie este nulă deci $\{nx\} = \{x\}$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $\{(n+1)x\} - [nx] \in \mathbb{Z}$.

Nicolae Bourbăcuț, Concursul „Adolf Haimovici", 2010

141. Dacă $x \in \mathbb{Z}$ relația este evidentă deoarece $[kx] = k[x], \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.
Reciproc, scriind relația și pentru $n+1$ rezultă:
$n[[x] + [nx]] + 2[(n+1)x] = (n+1)([x] + [(n+1)x]) \Rightarrow$
$\Rightarrow n[nx] = [x] + (n-1)[(n+1)x] \Rightarrow$
$\Rightarrow n[n(k+t)] = k + (n-1)[(n+1)(k+t)] \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2k + n[nt] = k + (n-1)\big((n+1)k + [(n+1)t]\big) \Rightarrow$
$\Rightarrow n[nt] = (n-1)[(n+1)t]$.
Dacă $t \neq 0$ și dacă $\frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n} \Rightarrow n \geq 2$ atunci rezultă $0 = n-1$,
$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, fals. Prin urmare, $t = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Nicolae Bourbăcuț, O.J., 2010

142. Avem $m = \sum_{k=0}^{n-1}\left[1 + \frac{1}{x+k}\right] = n + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{x+k}\right] \Rightarrow \sum_{k<0}^{n-1}\left[\frac{1}{x+k}\right] = m - n.$
Distingem cazurile:
I. $m = n \Rightarrow \sum_{k<0}^{n-1}\left(\frac{1}{x+k}\right) = 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, \infty)$.
II. $m > n \Leftrightarrow m - n > 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{x+1}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{x+n-1}\right] = m - n$
$\left[\frac{1}{x}\right] = m - n \Rightarrow m - n \leq \frac{1}{x} < m - n + 1 \Rightarrow \frac{1}{x+n-1} < x \leq \frac{1}{m-n} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{x+n-1}, \frac{1}{m-n}\right]$ și $x + k > 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x+k}\right] = 0, \forall\, k = \overline{1, n-1}$.
III. $m < n \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{x+k}\right] = m - n < 0 \Rightarrow$
$\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{1}{x+1}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{x+n-1}\right] = m - n,$
atunci cel puțin un termen este negativ, deci x este negativ.

143. Deoarece $[x+1] = [x] + 1$, ecuația devine:
$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[x + \frac{1}{n}\right] = n \quad (1)$.
Dacă $n = 1$, atunci $x \in [1,2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că $n \geq 2$ și $[x] = k \Rightarrow x \in [k, k+1)$.
Considerăm diviziunea intervalului $[k, k+1)$ prin punctele:
$k < k + \frac{1}{2} < k + \frac{2}{3} < \cdots < k + \frac{n-2}{n-1} < k + \frac{n-1}{n} < k + 1.$
În funcție de poziția lui n față de punctele acestei diviziuni vom considera trei cazuri.

a) Fie $k \leq x < k + \frac{1}{2}$. Atunci $k + \frac{1}{i} < x + \frac{1}{i} < k + \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \leq k + 1$ și pentru orice $i = \overline{1,n}$ atunci $\left[x + \frac{1}{i}\right] = k$ și membrul stâng al ecuației (1) devine $nk = n \Rightarrow k = 1 \Rightarrow [1, \frac{3}{2})$.

b) $k + \frac{p-1}{p} \leq x < x + \frac{p}{p-1}$, unde $2 \leq p \leq n-1$.
Pentru toți indicii i, $2 \leq i \leq p$, avem
$x + \frac{1}{i} \geq k + \frac{p-1}{p} + \frac{1}{i} = k + 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{i} \geq k + 1$
și $x + \frac{1}{i} < k + 1 + 1 < k + 2$.
Deci, pentru $2 \leq 0 \leq p$ avem $\left[x + \frac{1}{i}\right] = k + 1$.
Pentru indicii i, $p < i \leq n$, avem
$k + \frac{p-1}{p} + \frac{1}{i} \leq x + \frac{1}{i} < k + 1 - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{i} < k + 1$, deci $\left[x + \frac{1}{i}\right] = k$.
În concluzie, dacă $k + \frac{p-1}{p} \leq x < k + \frac{p}{p+1}$, atunci membrul stâng al ecuației (1)devine: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[x + \frac{1}{n}\right] =$

$$= k + \sum_{i=2}^{p} \left[x + \frac{1}{i}\right] + \sum_{i=p+1}^{n} \left[x + \frac{1}{i}\right] =$$

$= k + (p-1)(k+1) + (n-p)k = n \Rightarrow nk + p - 1 = n.$
Din această egalitate și din condiția $2 \leq p \leq n-1$ rezultă:
$2 \leq nk = n - p + 1 \leq n - 1$,
pentru care nu există k natural să satisfacă această egalitate.

c) $k + \frac{n-1}{n} \leq x < k + 1$. În acest caz:
$k + 1 \leq k + n - \frac{1}{n} + \frac{1}{i} \leq x + \frac{1}{i} < k + 2$, pentru $2 \leq i \leq n$.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie, $\left[x+\frac{1}{i}\right]=k+1$. Rezultă că:

$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[x+\frac{1}{n}\right]=k+(n-1)(k+1)=n\Rightarrow nk=1.$

Dacă x satisface condiţiile din enunţ, atunci nu există k natural care satisface $nk=1, n\geq 2$.

Aşadar, soluţia ecuaţiei este $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right)$, dacă $n=1, x\in\left[1,\frac{3}{2}\right)$, dacă $n\geq 2$.

144**. Soluţia 1

Fie $x=[x]+\alpha, \alpha\in[0,1)$ şi atunci ecuaţia devine:

$n[x]+[\alpha+1]+\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]+\left[\alpha+\frac{1}{3}\right]+\cdots+\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]=m\Rightarrow$

$\Rightarrow n[x]+p=m \quad (1),$

unde s-a notat $p=\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]+\left[\alpha+\frac{1}{3}\right]+\cdots+\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]$ şi evident că

$0<\alpha+\frac{1}{k}<2, k=\overline{1,n}\Rightarrow\left[\alpha+\frac{1}{k}\right]\in\{0,1\}, (\forall)\ k=\overline{1,n}$, de unde rezultă că $1\leq p\leq n$.

Distingem cazurile:

a) $n|m\Rightarrow m=nq$ şi (1) devine $n[x]+p=nq\Rightarrow n|p$ şi cum $1\leq p\leq n$

$\Rightarrow p=n$, deci trebuie ca $\left[\alpha+\frac{1}{k}\right]=1, (\forall)\ k=\overline{1,n}$, care va avea loc dacă

$\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]=1, \left[\alpha+\frac{1}{n}\right]\leq\left[\alpha+\frac{1}{k}\right]\leq 1, (\forall)\ k=\overline{1,n}.$

Din $\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]=1\Rightarrow\alpha\geq 1-\frac{1}{n}$ şi ecuaţia (1) devine:

$n[[x]+1]=m\Rightarrow[x]=\frac{m}{n}-1=q-1\Rightarrow x=q-1+\alpha \qquad (2),$

cu $\alpha\in\left[1-\frac{1}{n},1\right)$. Reciproc, se verifică dacă orice număr de forma (2) este o soluţie a ecuaţiei.

b) Dacă $n\nmid m\Rightarrow m=nq+r,\ q,r\in\mathbb{N}, 0<r<n$, iar din (1) $m=n[x]+p$ rezultă $n\nmid p$, deci $1\leq p<n$. Din unicitatea lui q şi r rezultă că $[x]=q$ şi $p=r<n$.

Evident, avem $1\geq[\alpha+1]\geq\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]\geq\cdots\geq\left[\alpha+\frac{1}{r}\right]\geq\left[\alpha+\frac{1}{r+1}\right]\geq\cdots\geq$

$\geq\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]\geq 0\Rightarrow[\alpha+1]\geq\left[\alpha+\frac{1}{2}\right]\geq\cdots\geq\left[\alpha+\frac{1}{r}\right]=1$ şi

$\left[\alpha+\frac{1}{r+1}\right]\geq\cdots\geq\left[\alpha+\frac{1}{n}\right]=0\Leftrightarrow\left[\alpha+\frac{1}{r}\right]=1$ şi $\left[\alpha+\frac{1}{r+1}\right]=0\Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow \alpha \in \left[1-\frac{1}{r}, 1-\frac{1}{r+1}\right)$, deci $x = q + \alpha$ verifică ecuația.

Soluția 2

Aplicând teorema împărțirii cu rest, rezultă: $m = mq + r, 0 \leq r \leq n-1$. Se știe că dacă $|x-y| < 1 \Rightarrow |[x]-[y]| \in \{0,1\}$, iar în cazul dat rezultă că părțile întregi din membrul stâng pot să difere între ele prin cel mult o unitate. Pentru ca egalitatea să aibă loc, este necesar ca cei mai mici termeni din membrul stâng să fie egali cu q, iar r dintre ei să fie egali cu $q+1$. Considerăm cazul $r \neq 0$ și vom arăta că soluția este $x = q \neq r$, cu $s \in \left[\frac{r-1}{r}, \frac{r}{r+1}\right)$. Într-adevăr, fie h cel mai mare număr din mulțimea $\{1,2,3,\ldots,n-1\}$ pentru care

$p + \frac{1}{h} \geq 1$ și $x + \frac{1}{h+1} < 1$ $(*)$ și de unde rezultă

$s \in \left[\frac{h-1}{h}, \frac{h}{h+1}\right)$, deci $[x+1] = k+1, \ldots, \left[x+\frac{1}{n}\right] = k+1$ și

$\left[x+\frac{1}{h+1}\right] = k, \ldots, \left[x+\frac{1}{n}\right] = k \Rightarrow h(k+1) + (n-h)k = m,$

echivalent cu $m = nk + h$, însă din unicitatea împărțirii rezultă $r = h$, iar soluțiile căutate sunt $x = q + s$, deci

$s \in \left[\frac{r-1}{r}, \frac{r}{r+1}\right)$, unde se ține seama de $(*)$. Fie $r = 0$. Atunci $m = kn$,

iar egalitatea $[x+1] + \left[x+\frac{1}{2}\right] + \cdots + \left[x+\frac{1}{n}\right] = nq$

nu poate avea loc decât în cazul în care toate părțile întregi din membrul stâng sunt egale cu q și $x = q - 1 + s$, unde $s \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$.

Mircea Becheanu, O.N., 1988

145**. Dacă notăm cu $a = \left\{\frac{1+\sqrt{n^2+1}}{n}\right\}$, atunci ecuația devine:

$a + a^2 + \cdots + a^n = 1$. Observăm că pentru $n = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} + \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1.$

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 10

Ecuaţii cu mai multe necunoscute

1*. a) Să se determine $y \in \mathbb{R}^*$, ştiind că $\forall x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{y}\right] = [xy].$$

b) Să se determine valorile raţionale ale lui y pentru care:

$$[x + y] = \left[\frac{x}{y}\right] - \left[\frac{x}{2y}\right], \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2*. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right] = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}, x, y \in \mathbb{Z}^*$.

3*. Să se rezolve ecuaţia: $[x^2 + 5y^2 - 18] = y^2 - 2$.

4*. Să se afle numerele naturale care verifică egalitatea:

$$(x^2 + y^2 + 10)\left[\frac{x}{y} + 20\right] = 1995.$$

5. Să se determine $y \in \mathbb{R}^*$, pentru care: $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{y}\right\} = \{xy\} + \frac{1}{y}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

6*. Arătaţi că ecuaţia $\left[\sqrt{1+x}\right] + \left[\sqrt{1+y}\right] = 2$ are o infinitate de soluţii în $\mathbb{Q}_+^*$.

7*. Să se rezolve în $\mathbb{Z}^*$ ecuaţia: $\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right] + \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right\} = \frac{5}{2}$.

8.** Să se rezolve ecuaţia: $\frac{[x+y]}{\{x+y\}} = \frac{[x]}{\{x\}} + \frac{[y]}{\{y\}}, x, y > 0$.

9.** Să se determine numerele reale x, y care verifică egalitatea:

$$|x + y|\left[\frac{6x}{x^2 + 9}\right] = 2016.$$

10*. Să se rezolve ecuaţia: $[x + y] = [x] \cdot [y] + 1$.

11. Să se determine numerele naturale n, m astfel încât:

$$\left[\sqrt{m^2 + mn + n^2}\right] = m + n - 1.$$

12*. Determinaţi numerele reale x, y, ştiind că: $[x] + [y] = x\sqrt{x^2} + y\sqrt{y^2} = 1$.

13.** Să se arate că ecuaţia $[xy] = [x][y]$ are o infinitate de soluţii (x, y), cu $x, y \in (1, \infty) - \mathbb{Z}$. Există soluţii (x, y) ale acesteia cu $x, y \in (-\infty, 0) - \mathbb{Z}$?

Scanned with OKEN Scanner

14. Să se determine valorile naturale $n \in \mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea:

$$2m\left[n\sqrt{m^2+1}\right] = n\left[2m\sqrt{m^2+1}\right], \text{ unde } m \in \mathbb{N}^* \text{ este dat.}$$

15.** Găsiți toate numerele de două cifre $\overline{ab}$, scrise în baza 10, cu cifrele nenule, astfel încât: $\left[\frac{\overline{ab}}{a}\right] + \left[\frac{\overline{ab}}{b}\right] = 17.$

16.** Să se determine numerele naturale nenule pentru care are loc egalitatea:

$$\left[\frac{a^2}{b}\right] + \left[\frac{b^2}{a}\right] = \left[\frac{a^2+b^2}{ab}\right] + ab.$$

17.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale prime ecuația:

$$\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{x^3-1}\right] = y.$$

18*. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\left[\frac{a^2}{2b}\right] + \left[\frac{b^2}{2c}\right] + \left[\frac{c^2}{2a}\right] = 0.$

19. Să se determine $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\left[\frac{a^2}{b+c}\right] + \left[\frac{b^2}{c+a}\right] + \left[\frac{c^2}{a+b}\right] = \left[\frac{2}{a+b+c}\right].$$

20. Să se rezolve ecuația: $x^2 + \{y\}^2 + [2z]^2 = x\{y\} + \{y\}[2z] + x[2z]$.

21.** Să se determine $z, y \in \mathbb{R}$, știind că: $[x] + [x+yz] = \left[\frac{x}{z}\right], \forall\, x \in \mathbb{R}.$

22*. Fie ecuația: $\left[\sqrt{\sqrt{y}-\sqrt{z}}\right]^x + \left[\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right]^x = 2^{x+1}.$

Să se determine x, y, z, unde $y = x^2 - 11x + 46$ și $z = x^2 - 11x + 30$.

23*. Să se arate că ecuația: $\left\{\frac{1}{x}\right\} + \left\{\frac{1}{y}\right\} + \left\{\frac{1}{z}\right\} = \left\{\frac{1}{t}\right\}$

are o infinitate de soluții în numere naturale, cu $t < x < y < z$.

24*. Să se arate că ecuația: $\{x^2\} + \{y^2\} = \{z^2\}$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

25*. Să se arate că ecuația: $\{x^2\} + \{y^2\} = \{z^3\}$ admite o infinitate de soluții în numere raționale, care nu sunt întregi.

26.** Să se arate că ecuația: $\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor raționale, care nu sunt întregi.

27*.** a) Să se arate că ecuația: $3([x] + [y] + [z]) + x + y + z = 2007$ nu are soluții reale pozitive.

b) Să se arate că ecuația: $3([x] + [y] + [z]) + x + y + z = 2009$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor reale pozitive.

c) Câte soluții are ecuația: $3([x] + [y] + [z]) + x + y + z = 2008$ în mulțimea numerelor reale pozitive?

Scanned with OKEN Scanner

28.** Să se arate că ecuația $\{x\}+\{y^2\}=\{z^3\}$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor raționale care nu sunt întregi.

29.** Să se arate că ecuația $\{x^2\}+2\{y^2\}=3\{z^3\}$ are o infinitate de soluții în $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ cu componentele distincte.

30.** Arătați că ecuația $\{x^2\}+\{y^2\}=\{z^2\}+\{t^2\}+\{u^2\}$ are o infinitate de soluții cu componentele distincte din $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

31.** Fie $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. Să se arate că ecuația:

$\left[\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+\ldots+\sqrt{1+x_n}\right]=n$ are o infinitate de soluții $\mathbb{Q}_+^*$.

32.** Să se determine numerele reale $a_1, a_2, \ldots a_n$ care verifică egalitățile:

$$[a_1]+\{a_2\}=2[a_2]+\{a_3\}=3[a_3]+\{a_4\}=\ \ldots\ =$$
$$=(n-1)[a_{n-1}]+\{a_n\}=n[a_n]+\{a_1\}=0.$$

33.** Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că ecuația:

$$\left\{\frac{1}{x_1}\right\}+\left\{\frac{1}{x_2}\right\}+\ldots+\left\{\frac{1}{x_n}\right\}=\left\{\frac{1}{x_{n+1}}\right\}, n\in\mathbb{N}^*$$

are o infinitate de soluții în numere naturale, cu $x_{n+1}<x_1<x_2<\ldots<x_n$.

34.** Aflați $x_i\in\mathbb{N}^*, i=\overline{1,n}$, știind că:

$$\left[\frac{x_1^2}{x_2+x_3}\right]+\left[\frac{x_2^2}{x_3+x_4}\right]+\ldots+\left[\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right]=\left[\frac{n-1}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţii

10 Ecuaţii cu mai multe necunoscute

1*. a) Pentru $x = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{y}\right] = 0$, iar pentru ecuaţia $x = \frac{1}{y} \Rightarrow \left[\frac{1}{y}\right] + \left[\frac{2}{y}\right] = 1$
$\Rightarrow \left[\frac{2}{y}\right] = 1 \Rightarrow y \leq 2$. Pentru $x = 1 \Rightarrow 1 + \left[1 + \frac{1}{y}\right] = [y] \Rightarrow [y] \geq 2$
deci $y \geq 2$. Aşadar, $y = 2$ şi se obţine identitatea lui Hermite.

b) Fie $x = 2ny$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci relaţia devine:
$[(2n+1)y] = 2n - n = n \Rightarrow n < (2n+1)y < n+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{n}{2n+1} \leq y < \frac{n+1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă că
$y = \frac{1}{2}$ deci egalitatea devine identitatea lui Hermite.

Romanţa şi Ioan Ghiţă, G.M. nr. 2/2005

2*. Ştiind că $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = \pm 1$. Notând $a = \frac{x^2}{y} \Rightarrow \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$x^2 = y$ sau $x^2 = -y \Rightarrow \left[\frac{1}{x} - x\right] = 2$ cu $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 9$.
Dacă $x^2 = -y \Rightarrow \left[x - \frac{1}{x}\right] = -2$ şi cum $x < 0 \Rightarrow x = -2$ şi $y = -4$.
Aşadar, soluţiile sunt perechile $(-3,9), (-2,-4)$.

V. Matrosenko, O.L. Bucureşti, 1998

3*. Notăm: $y^2 - 2 = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 = k + 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{k+2}, k \geq -2$ (1).
Ecuaţia se mai scrie: $[x^2 + 5(k+2) - 18] = k$
$\Leftrightarrow [x^2 + 5k - 8] = k \Rightarrow [x^2] = -4k + 8 \geq 0 \Rightarrow k \leq 2 \Rightarrow k \in \{\pm 1, \pm 2, 0\}$ (2).
Pentru $k = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ şi $[x^2] = 8 \Rightarrow 8 \leq x^2 < 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3) = A_1$. Pentru $k = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ şi
$[x^2] = 4 \Rightarrow 4 \leq x^2 < 5 \Rightarrow x \in (-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5})$. Pentru $k = -1 \Rightarrow$
$y = \pm 1$ şi $[x^2] = 12 \Rightarrow x \in [-\sqrt{13}, -\sqrt{12}] \cup [\sqrt{12}, \sqrt{13})$.
Pentru $k = 2 \Rightarrow y = \pm 2$ şi $[x^2] = 0 \Rightarrow x \in (-1,0] \cup [0,1)$.
Pentru $k = -2 \Rightarrow y = 0$ şi $[x^2] = 16 \Rightarrow x \in (-\sqrt{17}, -4] \cup [4, \sqrt{17})$.

Scanned with OKEN Scanner

4*. $x < y \Rightarrow \left[\frac{x}{y} + 20\right] = 20$ care nu divide pe 1995.

Fie $x \geq y \Rightarrow \left[\frac{x}{y}\right] \geq 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{y} + 20\right] = \left[\frac{x}{y}\right] + 20 = k + 20 \geq 21.$

Avem $x^2 + y^2 + 10 = \frac{1995}{k+20} \leq \frac{1995}{21} = 95.$

Cum $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ rezultă $x^2 + y^2 + 10/1995$ şi divizorii sunt cuprinşi între 12 şi 95. Avem următoarele situaţii:

I. $x^2 + y^2 + 10 = 15 \Rightarrow x = 2,\ y = 1$, care nu verifică relaţia;

II. $x^2 + y^2 + 10 = 21$, nu are soluţie;

III. $x^2 + y^2 + 10 = 57$, nu are soluţie;

IV. $x^2 + y^2 + 10 = 35 \Rightarrow x = 4,\ y = 3,$ care nu verifică ecuaţia;

V. $x^2 + y^2 + 10 = 95 \Rightarrow x = 9, y = 2$ şi $x = 7, y = 6,$

verifică numai $x = 7, y = 6.$

G.M. nr. 7-8/1996

5. Pentru $x = \frac{1}{y} \Rightarrow \left\{\frac{1}{y}\right\} + \left\{\frac{2}{y}\right\} = \frac{1}{y} \Rightarrow \left\{\frac{2}{y}\right\} = \left[\frac{1}{y}\right] \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{\frac{2}{y}\right\} = \left[\frac{1}{y}\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \in (0,1)$ şi $\frac{2}{y} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow y = 2.$

Pentru $y = 2$ egalitatea devine $\{x\} + \left\{x + \frac{1}{2}\right\} = \{2x\} + \frac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}$

care este echivalent cu identitatea lui Hermite, adică: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}$. (Se poate considera o reciprocă a relaţiei lui Hermite.)

Rec. Mat. 2008

6*. Vom arăta că există o infinitate de numere $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $\left[\sqrt{1+x}\right] = \left[\sqrt{1+y}\right] = 1$. Considerăm numerele $a_{\frac{p}{q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1, \frac{p}{q} \in (1,2)$

$\left[\sqrt{1+x}\right] = \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{q^2} - 1}\right] = \left[\frac{p}{q}\right] = 1$ şi $a_{\frac{n}{m}} = \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 1,\ \frac{n}{m} \in (1,2),$

atunci $\left[\sqrt{1+y}\right] = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 - 1}\right] = \left[\frac{n}{m}\right] = 1.$ Se poate lua

$a_p = \left(\frac{p+1}{p}\right)^2 - 1, \quad p \geq 2, \quad a_q = \left(\frac{q+2}{q}\right)^2 - 1, \quad q \geq 3.$

Scanned with OKEN Scanner

7*. Evident x și y trebuie să fie de același semn deci $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Prin urmare, se impune ca $\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right] = 2$ și $\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right\} = \frac{1}{2}$.

Dar cum $|x| \geq 1$ și $|y| \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [-2,2] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{k}{2}$ (*)

unde $k \in \{\pm 1, \pm 3\}$. (**)

Ecuația (*) se mai scrie $kxy - 2x - 2y = 0 \Rightarrow (kx-2)(ky-2) = 4$

și pentru fiecare din (**) rezultă perechile: $(1,2), (2,1), (3,6), (6,3), (4,4), (-1,-2), (-2,-1), (-3,-6), (-6,-3), (-4,-4)$ care satisfac ecuația.

Dana Popovici, Ștefan Marica, R.M.T. 2006

8**. Considerăm cazurile:

Cazul I. Dacă $\{x\} + \{y\} < 1$, atunci ecuația se scrie:

$\frac{[x]+[y]}{\{x\}+\{y\}} = \frac{[x]}{\{x\}} + \frac{[y]}{\{y\}} \Rightarrow [x]\cdot\{x\}\cdot\{y\} + [y]\cdot\{x\}\cdot\{y\} =$

$= [x]\cdot\{x\}\cdot\{y\} + [x]\cdot\{y\}^2 + [y]\cdot\{x\}\cdot\{y\} + [y]\cdot\{x\}^2$, deci

$[y]\cdot\{x\}^2 + \{x\}\cdot[y]^2 = 0 \Rightarrow [x] = [y] = 0$, cu $x + y < 1$.

Cazul II. Dacă $\{x\} + \{y\} \geq 1$ ecuația se scrie:

$\frac{[x]+[y]+1}{\{x\}+\{y\}-1} = \frac{[x]}{\{x\}} + \frac{[y]}{\{y\}}$,

atunci $\frac{[x]}{\{x\}+\{y\}-1} > \frac{[x]}{\{x\}}$ și $\frac{[y]}{\{x\}+\{y\}-1} > \frac{[y]}{\{y\}}$

și $\frac{1}{\{x\}+\{y\}-1} > 0$ deci nu avem soluții.

Soluțiile sunt: (x, y) cu $x, y, x + y \in (0,1)$.

Nistor Budescu R.M.T. 2009

9**. Evident $\left[\frac{6x}{x^2+y}\right] > 0$, dar cum: $-1 \leq \frac{6x}{x^2+y} \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{6x}{x^2+y}\right] = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3$ și egalitatea devine $[y+3] = 2016, y \in \{2013, -2019\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in \{(3,2013), (3,-2019)\}$.

O.L. Galați, 2016

10*. Fie $x = a + \alpha, y = b + \beta, \alpha, \beta \in [0,1)$ și $a, b \in \mathbb{Z}$,

atunci ecuația devine $a + b + [\alpha + \beta] = ab + 1$ (1).

Dacă $\alpha + \beta \in [0,1)$, atunci ecuația (1) devine $a + b = ab + 1 \Rightarrow a = 1$ sau $b = 1$ și rezultă soluțiile $(1 + \alpha, b + \beta), b \in \mathbb{Z}$ unde $\alpha, \beta \in \begin{bmatrix} 0,1) \text{ cu} \\ \alpha + \beta < 1 \end{bmatrix}$ și

$(a + \alpha, 1 + \beta)$ cu $a \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \in [0,1)$ și $\alpha + \beta < 1$.

Dacă $\alpha + \beta \in [1,2)$, atunci ecuația (1) devine $a + b = ab \Rightarrow a = b = 0$ sau $a = b = 2$ și rezultă soluțiile: (α, β) cu $\alpha, \beta \in [0,1)$ și $\alpha + \beta \geq 1$

Scanned with OKEN Scanner

sau soluțiile $(2+\alpha, 2+\beta)$, cu $\alpha, \beta \in [0,1)$ și $\alpha+\beta \geq 1$. Avem patru categorii de soluții.

Laszlo Szilard, Concursul „Teodor Topan", 2005, G.M. nr. 5/2006

11. Putem presupune $m \leq n$. Pentru $m = 0$ nu sunt soluții. Pentru $m = 1$ și $m = 2$ relația se verifică pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $m, n \geq 3$ atunci din

$m+n-1 \leq \sqrt{m^2+mn+n^2} \Rightarrow (m-2)(n-2) \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m,n) \in \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)\}$.

Ionel Tudor, G.M. nr. 5-6/2004

12*. Evident x, y nu pot fi ambele negative. Considerăm cazurile:

a) $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow [x]+[y] = x^2+y^2 = 1 \Rightarrow x \in [0,1], y \in [0,1]$ și evident nu se poate ca $x \in (0,1)$ și $y \in (0,1) \Rightarrow (x,y) \in \{(0,1),(1,0)\}$.

b) Dacă $x \geq 0, y < 0 \Rightarrow x \in [0,1], y \in (-1,0)$ atunci avem $[x]+[y] = x^2-y^2 = 1$, unde $[y] = -1$ și $[x] = 0$. Dar $x = \sqrt{y^2+1}$ și ecuația devine $\left[\sqrt{y^2+1}\right]+[y] = 1$, fals, deoarece $\left[\sqrt{y^2+1}\right] = 1$ și $[y] = -1$.

Analog dacă $y \geq 0, x \in (-1,0)$. Așadar, singurele soluții sunt $(1,0)$ și $(0,1)$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, G.M. nr. 1/2016

13.** Dacă alegem $x, y \in \left(k, k+\frac{1}{4k}\right), k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [x] = [y] = k$

și $x \cdot y \in \left(k^2, k^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16k^2}\right) \subset (k^2, (k+1)^2)$ deci $[xy] = k^2$.

Dacă $[x] = -k$ și $[y] = -t$, cu $k, t \in \mathbb{N}^*$, trebuie să avem $[xy] = kt$.

Cum însă $x \in (-k, -k+1), y \in (-t, -t+1) \Rightarrow xy < kt \Rightarrow [xy] < kt$.

Așadar, nu există soluții (x,y) ale ecuației, cu $x, y \in (-\infty, 0) - \mathbb{Z}$.

Dana Heuberger, Argument, 2015

14. Avem $\left[2m\sqrt{m^2+1}\right] = 2m^2 \Rightarrow \left[n\sqrt{m^2+1}\right] = mn \Rightarrow n \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Univ. Lomonosov 2008

15.** Avem $\left[\frac{\overline{ab}}{a}\right]+\left[\frac{\overline{ab}}{b}\right] = \left[10+\frac{b}{a}\right]+\left[10\frac{a}{b}+1\right] = 11+\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{10a}{b}\right]$

de unde rezultă ecuația echivalentă $\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{10a}{b}\right] = 6$.

Dacă $a \geq b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \left[\frac{10a}{b}\right] \geq 10$, ecuație imposibilă.

Dacă $a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$ și $\frac{b}{a} > 1 \Rightarrow \left[\frac{b}{a}\right]$ și $\left[\frac{10a}{b}\right] \in \mathbb{N}$.

Pentru $\left[\frac{b}{a}\right] = 1 \Rightarrow \left[\frac{10a}{b}\right] = 5 \Rightarrow \overline{ab} \in \{47,59\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\left[\frac{b}{a}\right]=2\Rightarrow\left[\frac{10a}{b}\right]=4\Rightarrow\overline{ab}\in\{25,37,49\}$.

Pentru $\left[\frac{b}{a}\right]=3\Rightarrow\left[\frac{10a}{b}\right]=3\Rightarrow\overline{ab}\in\{13,26,39\}$.

Pentru $\left[\frac{b}{a}\right]=4\Rightarrow\left[\frac{10a}{b}\right]=2\Rightarrow\overline{ab}\in\{14,28,29\}$.

Pentru $\left[\frac{b}{a}\right]=5\Rightarrow\left[\frac{10a}{b}\right]=1$ nu se obțin soluții.

Prin urmare, avem soluțiile: $S=\{13,14,25,26,28,29,37,39,47,49,59\}$.

Gh. Pădurariu, R.M.G. nr. 32

16**. Dacă $a=b$, atunci relația devine $a^2-2a+2=0$, fals și prin urmare nu sunt perechi de forma (a,a) care să verifice egalitatea.

Cum egalitatea este simetrică în a și b, atunci dacă perechea (a_0,b_0) verifică, rezultă că și (b_0,a_0) verifică egalitatea. Considerăm $a<b$.

Fie $a=1$, atunci egalitatea devine $b^2-2b=0\Rightarrow b=2$.

Prin urmare, perechile (1,2) și (2,1) verifică egalitatea.

Fie $2\leq a<b$ atunci din $\left[\frac{a^2}{b}\right]=k,\left[\frac{b^2}{a}\right]=m$, unde $k\in\mathbb{N}$ și $m\in\mathbb{N}^*,m\geq 3$

și din $ab=\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^2}{a}\geq\left[\frac{a^2}{b}\right]\cdot\left[\frac{b^2}{a}\right]=km$ și cum $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\Rightarrow\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]\geq 2$

și din relația $\left[\frac{a^2}{b}\right]+\left[\frac{b^2}{a}\right]=\left[\frac{a^2+b^2}{ab}\right]+ab\Rightarrow k+m\geq 2+km\Rightarrow$

$\Rightarrow(k-1)(m-1)\leq -1$ și cum $k\geq 0,m\geq 3\Rightarrow k=0\Rightarrow a^2<b\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[\frac{a^2}{b}\right]=0$.

Relația devine: $\left[\frac{b^2}{a}\right]=\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]+ab$. Fie $a^2+m=b,m\in\mathbb{N}$ și atunci:

$$\left[\frac{(a^2+m)^2}{a}\right]=\left[\frac{a}{a^2+m}+\frac{a^2+m}{a}\right]+a(a^2+m)\Rightarrow a^3+2am+\left[\frac{m^2}{a}\right]=$$

$$=a+a^3+am+\left[\frac{a}{a^2+m}+\frac{m}{a}\right]\Rightarrow am-a+\left[\frac{m^2}{a}\right]=\left[\frac{a}{a^2+m}+\frac{m}{a}\right]\ (2).$$

Dacă $m=1$ sau $a^2+1=b$, atunci ecuația (2) are soluții de forma $(t,t^2+1),(t^2+1,t),t\in\mathbb{N}^*$ (3).

(Soluțiile (3) cuprind și soluțiile (1,2), (2,1).)

Dacă $m>1$ sau $a^2+1<a^2+m=b\Rightarrow a^2+1<b$ atunci din (2) rezultă

Scanned with OKEN Scanner

$am-a\le\left[\frac{a}{a^2+m}+\frac{m}{a}\right]\Rightarrow am-a\le\frac{a}{a^2+m}+\frac{m}{a}\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2(m-1)-m\le\frac{a^2}{a^2+m}<1\Rightarrow a^2(m-1)-m\le 0\Rightarrow$

$\Rightarrow (a^2-1)(m-1)\le 1$ care nu poate avea loc pentru $a>1$ și $m>1$.

Așadar, soluțiile sunt perechile de numere naturale $(t,t^2+1),(t^2+1,t)$, unde $t\in\mathbb{N}^*$.

O.I.M. 1996

17**. Evident $\left[\sqrt[3]{n^3}\right]=\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]=\cdots=\left[\sqrt[3]{(n+1)^3-1}\right](\forall)\ n\in\mathbb{N}$,

atunci $\sum_{k=0}^{3n(n+1)}\left[\sqrt[3]{n^3+k}\right]=n[3n(n+1)+1]=3n^3+3n^2+n,(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

Deci, $\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\left[\sqrt[3]{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]=$

$=\left(\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{7}\right]+\left[\sqrt[3]{8}\right]+\left[\sqrt[3]{9}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{26}\right]\right)+$

$+\cdots+\left[\sqrt[3]{(n-1)^3}\right]+\left[\sqrt[3]{(n-1)^3+1}\right]+\cdots+\left[\sqrt[3]{n^3-1}\right]=$

$=\sum_{k=1}^{n-1}(3k^3+3k^2+k)=3\frac{(n-1)^2\cdot n^2}{4}+3\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}$

$=\frac{(n-1)\cdot n^2\cdot(3n+1)}{4}$. Ecuația devine $\frac{(n-1)\cdot n^2\cdot(3n+1)}{4}=y$.

Dacă $n=2\Rightarrow y=7$.

Dacă n număr prim, impar $\Rightarrow n=2k+1,k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow y=k(k+1)(3k+1)$ care nu este prim. Așadar, unica soluție este $n=2,y=7$.

18*. Soluția 1

Avem $\frac{a^2}{2b}+\frac{b^2}{2c}+\frac{c^2}{2a}-3<\left[\frac{a^2}{2b}\right]+\left[\frac{b^2}{2c}\right]+\left[\frac{c^2}{2a}\right]=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}<6$,

dar cum $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\sqrt[3]{abc}<2\Rightarrow a=b=c=1$

(celelalte cazuri $a=2,b=2,c=1$ nu convin).

Soluția 2

Deoarece $a,b,c\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left[\frac{a^2}{2b}\right]\ge 0,\left[\frac{ab^2}{2c}\right]\ge 0,\left[\frac{c^2}{2a}\right]\ge 0$, rezultă că toți termenii sunt nuli $\Rightarrow a^2<2b\Rightarrow a^2\le 2b-1$ și analog $b^2\le 2c-1$, $c^2\le 2a-1$ și prin adunare termen cu termen rezultă $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\le 0\Rightarrow a=b=c=1$.

Scanned with OKEN Scanner

19. Rezultă că $a+b+c \geq 3 \Rightarrow \left[\frac{2}{a+b+c}\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{a^2}{b+c}\right] + \left[\frac{b^2}{a+c}\right] +$

$+\left[\frac{c^2}{a+b}\right] = 0$ și cum fiecare termen este pozitiv, rezultă că toți termenii sunt nuli. Avem $a^2 < b+c$, $c^2 < a+b$, $b^2 < a+c \Rightarrow$ (*)

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c < 0 \Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 < 3$

rezultă că $a=b=c=1$ (celelalte variante nu satisfac condițiile (*)).

R.G. nr. 15

20. Ținând seama că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$, cu egalitate dacă $a=b=c$. Prin urmare, egalitatea are loc dacă $x = \{y\} = [2z] \Rightarrow x = 0$, $y \in \mathbb{Z}$ și $z \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

21.** Evident $z \neq 0$ și pentru $x = 0 \Rightarrow [yz] = 0 \Rightarrow 0 \leq yz < 1$.

Evident $y \neq 0$, pentru $y = 0, 2[x] = \left[\frac{x}{z}\right]$.

Dacă notăm $\frac{x}{z} = u \in \mathbb{R} \Rightarrow [zu] + [zu+yz] = [u], \forall\, u \in \mathbb{R}$ (1).

Pentru $u = \frac{1}{z} \Rightarrow 1+1+[yz] = \left[\frac{1}{z}\right] = 2 \Rightarrow z \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Pentru $u = 2$ din (1) rezultă $[2z] + [2z+yz] = 2$ (2)

și $[2z] \in \{0,1\}$. Dacă $[2z] = 0$, atunci din (2) rezultă $[2z+yz] = 2$ (3),

dar din $\frac{2}{3} < 2z < 1$ și $0 \leq yz < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < 2z+yz < 2$, contradicție cu (3),

prin urmare $2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2}$. Observăm că (1) devine:

$\left[\frac{u}{2}\right] + \left[\frac{u}{2} + \frac{y}{2}\right] = [u]\ \forall\, u \in \mathbb{R}$ și din identitatea lui Hermite rezultă $y = 1$.

Prin urmare, $y = 1, z = \frac{1}{2}$.

(Vezi ex. „Aplicații identitatea lui Hermite")

Danielescu Gabriel, Concursul „Petre Moroșanu-Trident", 2009

22.** Notăm $a = 2^x$ și $b = \left[\sqrt{\sqrt{y}-\sqrt{z}}\right]^x =$

$= \left[\sqrt{\sqrt{x^2-11x+46}-\sqrt{x^2-11x+30}}\right]^x \neq 0$ și cum $y - z = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right)^x = \left(\frac{\sqrt{y-z}}{\sqrt{\sqrt{y}-\sqrt{z}}}\right)^x = \frac{4^x}{b}$ și ecuația devine $b + \frac{a^2}{b} = 2a$,

Scanned with OKEN Scanner

cu $a, b > 0$ și din inegalitatea mediilor rezultă

$$a^2 = b^2 \Rightarrow b = a \Leftrightarrow \left[\sqrt{\sqrt{x^2-11x+46}-\sqrt{x^2-11x+30}}\right]^x = 2^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\left[\sqrt{\sqrt{x^2-11x+46}-\sqrt{x^2-11x+30}}\right]}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x \in \{0,5,6\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x, y, z) \in \{(0,46,30), (5,16,0), (4,16,0)\}$.

23*. Observăm că $\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}=\frac{1}{n}, \forall\, n \geq 2$ deci $x = 2n, y = 3n, z = 6n$, $t = n$ verifică ecuația $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \{1\}$.

G.M. nr. 2/2005

24*. Soluția 1

Se remarcă un triplet de soluții:

$x=\frac{3}{7^n}, y=\frac{4}{7^n}, z=\frac{5}{7^n}, \left(\frac{3}{7^n}\right)^2+\left(\frac{4}{7^n}\right)^2=\left(\frac{5}{7^n}\right)^2$ și cum $\left\{\left(\frac{3}{7^n}\right)^2\right\}=\left(\frac{3}{7^n}\right)^2$

$\left\{\left(\frac{4}{7^n}\right)^2\right\}=\left(\frac{4}{7^n}\right)^2, \left\{\left(\frac{5}{7^n}\right)^2\right\}=\left(\frac{5}{7^n}\right)^2$. Așadar, $(x, y, z)=\left(\frac{3}{7^n}, \frac{4}{7^n}, \frac{5}{7^n}\right)$

$\forall x \in \mathbb{N}^*$.

Soluția 2

Evident putem observa că $x=\frac{3}{12}, y=\frac{4}{12}, z=\frac{5}{12}$ este soluție a ecuației.

Arătăm că dacă $\left(\frac{x_1}{p}, \frac{y_1}{p}, \frac{z_1}{p}\right)$, cu $x_1, y_1, z_1, p \in \mathbb{N}^*$, este o soluție a ecuației, atunci și tripletele $\left(pk+\frac{x_1}{p}, pk+\frac{y_1}{p}, pk+\frac{z_1}{p}\right), \forall\, k \in \mathbb{N}^*$ sunt soluții.

Într-adevăr, avem $\left\{\left(pk+\frac{x_1}{p}\right)^2\right\}+\left\{\left(pk+\frac{y_1}{p}\right)^2\right\}=\left\{p^2k^2+2kx_1+\frac{x_1^2}{p^2}\right\}+$

$+\left\{p^2k^2+2ky_1+\frac{y_1^2}{p^2}\right\}=\left\{\left(\frac{x_1}{p}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{y_1}{p}\right)^2\right\}=$

$=\left\{k^2p^2+2kz+\frac{z_1^2}{p^2}\right\}=\left\{\left(\frac{z_1}{p}\right)^2\right\}$.

Lucian Tuțescu, Bărbulescu R., M. Ion, R.M. nr. 1/2002

25*. Deoarece $5^2+10^2=5^3$ rezultă că un triplet de soluții

$x=\frac{5}{k^3}, y=\frac{10}{k^3}, z=\frac{5}{k^3}$ ..... $k \in \mathbb{Z}^*, k \geq 3, \left(\frac{5}{k^3}\right)^2+\left(\frac{10}{k^3}\right)^2=\left(\frac{5}{k^2}\right)^3$.

Mihaly Bencze, G.M. nr. 11/2002

Scanned with OKEN Scanner

26**. Vom căuta soluții de forma $x=\frac{a}{m}, y=\frac{b}{m}, z=\frac{c}{m}$ unde $a,b,c \in \mathbb{Z}$ (1) și $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ cu a,b,c nedivizibile cu m. Dacă găsim o astfel de soluție, atunci găsim o serie infinită de soluții de forma:

$x=\frac{a}{m}(nm^3+1), y=\frac{b}{m}(nm^3+1), z=\frac{c}{m}(nm^3+1)$ (2).

Pentru a găsi o soluție de forma (1), considerăm $0<a<m, 0<b<m$ și $\left(\frac{a}{m}\right)^3+\left(\frac{b}{m}\right)^3<1$, atunci $\left\{\left(\frac{a}{m}\right)^3+\left(\frac{b}{m}\right)^3\right\}=\left\{\left(\frac{c}{m}\right)^3\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{m}\right)^3+\left(\frac{b}{m}\right)^3=\left(\frac{c}{m}\right)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3 \equiv c^3 \pmod{m^3}$ (3).

Trebuie să găsim $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\Leftrightarrow a^3+b^3-c^3=km^3$, dar pentru $k=-1 \Rightarrow a^3+b^3+m^3=c^3$ și cum $3^3+4^3+5^3=6^3 \Rightarrow a=3, b=4,$ $c=6, m=5$ deci soluția de forma (1) este $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}, z=\frac{6}{5}$, cu

$\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}+\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^3\right\}=\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^3\right\}$.

Așadar, seria infinită de soluții raționale care nu sunt întregi are forma dată de (2), adică $x=\frac{3}{5}(125n+1), y=\frac{4}{5}(125n+1), z=\frac{6}{5}(125n+1)$.

Olimpiadă Belarus, 1999-2000

27***. Rezultă că $x+y+z \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[y]+[z]+\{x\}+\{y\}+\{z\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow \{x\}+\{y\}+\{z\} \in \{0,1,2\}$.

a) Membrul stâng devine: $4([x]+[y]+[z])+\{x\}+\{y\}+\{z\}$, adică un număr de forma $4k+r$ cu $r \in \{0,1,2\}$, dar 2007 este de forma $4k+3$.

b) Rezultă că $\{x\}+\{y\}+\{z\}=1$ care are loc pentru o infinitate de triplete; de exemplu $(x,y,z)=\left(502, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

c) Rezultă că $\{x\}+\{y\}+\{z\}=0 \Rightarrow x,y,z \in \mathbb{N}$. Ecuația revine la $x+y+z=502$.

Dacă $x=0, y$ poate lua 503 valori $\{0,1,2,\ldots,502\}$, pentru fiecare alegere a lui y rezultă un z unic. Dacă pentru $x=0$ rezultă 503 soluții, pentru $x=1, y$ poate lua 502 valori $\{0,1,2,\ldots,501\}$ și se obține pentru fiecare y un z unic, obținându-se în final 502 soluții.

În general pentru $x=k \in \{0,1,2,\ldots,502\}$ y poate lua $503-k$ valori.

Așadar, în total sunt $1+2+\cdots+502+503=\frac{503504}{2}=126756$ soluții.

Andrei Eckstein, R.M.T. 2008

Scanned with OKEN Scanner

28**. Se alege $y = 2k + \frac{1}{2}, z = 18k + \frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 = 4k^2 + 2k + \frac{1}{4}$ și $\{y^2\} = \frac{1}{4}$, dar $z^3 = (18k)^3 + 2(18k)^2 + 24k + \frac{8}{27} \Rightarrow \{z^3\} = \frac{8}{27}$.
Se observă că $\frac{8}{27} - \frac{1}{4} = \frac{5}{108}$ și atunci se alege $x = k - \frac{5}{108}$ deci se obține o familie infinită de triplete de numere raționale drept soluții.

Dan Nedeianu, G.M. nr. 3/2017

29**. Deoarece tripletul $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{5}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$ este o soluție, rezultă că există o infinitate de triplete în $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ de forma $x = x_0 + k_1$, $y = y_0 + 5k_2, z = z_0 + 5k_3$, unde $k_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3$.

Gh. Boroica, Argument, 2005

30**. Remarcăm că $x_0 = \frac{1}{10}, y_0 = \frac{7}{10}, z_0 = \frac{3}{10}, t_0 = \frac{4}{10}, u_0 = \frac{5}{10}$ verifică ecuația: $\frac{1}{100} + \frac{49}{100} = \frac{9}{100} + \frac{16}{100} + \frac{25}{100}$, $\begin{cases} x = x_0 + 5a \\ y = y_0 + 5b \\ z = z_0 + 5c \\ t = t_0 + 5d \\ u = u_0 + 5e \end{cases}$, unde $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$ $(*)$.
Desigur se pot găsi o infinitate de formațiuni de tipul $(*)$.

Gh. Boroica, Argument, 2003

31**. Putem considera $x_1 = x_2 \ldots = x_n = x \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow [n\sqrt{1+x}] = n \Rightarrow n \leq n\sqrt{1+x} < n+1 \Rightarrow x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1$.
Așadar, toate valorile lui x cu $x \in \left[0, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1\right) \cap \mathbb{Q}_+^*$ sunt soluții.

Gh. Stoica

32**. $(k-1)[a_{k-1}] + \{a_k\} = 0, \forall\, k = 2, \ldots, n \Rightarrow (k-1)[a_{k-1}] = -\{a_k\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_k = 0, k = 2,3, \ldots, n$ și din ultima egalitate $n[a_n] + \{a_1\} = 0 \Rightarrow n[a_n] = -\{a_1\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 = 0$.

O.L. Neamț/2009

33**. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{2(2^n-1)} + \frac{1}{2^2(2^n-1)} + \cdots + \frac{1}{2^n(2^n-1)} = \frac{1}{2^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2k(2^n-1)}+\frac{1}{2^2k(2^n-1)}+\cdots+\frac{1}{2^nk(2^n-1)}=\frac{1}{k\cdot 2^n}, \forall\, k\in\mathbb{N}.$

Alegem $x_i=2^ik(2^n-1), i=\overline{1,n}$ și $x_{n+1}=k\cdot 2^n$ și echivalent $\frac{1}{x_i}\in(0,1)$

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{x_i}\right\}=\frac{1}{x_i},\quad i=\overline{1,n+1}.$ Așadar, avem $\left\{\frac{1}{x_{n+1}}\right\}=\frac{1}{x_{n+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{x_i}\right\}$

și pentru $n\geq 2\Rightarrow x_{n+1}=2^nk<2k(2^n-1)=x_1<x_2<\cdots<x_n.$

Pentru $n=1$ se alege $x_1=k, x_2=k+1, k\in\mathbb{N}^*-\{1\}.$

G.M. nr. 4/2004, Petru Braica

34.** Arătăm că $x_1=1, \forall\, i=\overline{1,n}.$ Presupunem contrariul, atunci fie $x_1=\max\{x_k\}\geq 2.$

Avem $x_1^2\geq 2x_2\geq x_2+x_3$ sau $x_1^2\geq 2x_3\geq x_3+x_2\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_2+x_3}\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x_1^2}{x_2+x_3}\right]\geq 1,$ prin urmare suma din stânga este mai mare decât 1

și pe de altă parte, $x_1+x_2+\cdots+x_n>n\Rightarrow \left[\frac{n-1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right]=0,$

contradicție.

C. Dragomir, O.L. Argeș/2004

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 11 | Inecuaţii

§ 1. Inecuaţii I

1. Să se rezolve: $[x]\{x\} < x - 1$.

2. Să se rezolve inecuaţia: $[x]^2 + 2\{x\} - 6 \leq 2x$.

3. Să se rezolve inecuaţia: $x[x] - 4x + \{x\} < -3$.

4. Să se rezolve inecuaţia: $x[x] - x + 3\{x\} \leq 6$.

5*. Să se rezolve inecuaţia: $x^2 \leq [2x]\{2x\}$.

6*. a) Să se rezolve inecuaţia: $[x]^3 - (x-1)[x]^2 \leq 1 - \{x\}$.

b) Să se rezolve inecuaţia: $[x]^3 + 3[x] \geq 3[x^2] + 1$.

c) Să se rezolve: $[x]^3 + 3[x] = 3[x^2] + 1 \geq [x]^3 + 3[x]$.

7*. Să se rezolve inecuaţia: $[x] + 2\{x\} < 1{,}3$.

8*. Să se arate că:

a) $x^2 \geq ([x]\{x\} + 1)^2, \forall\, x + \mathbb{R} - [0,1)$;

b) $x[x] \leq 1 - \{x\}$.

9*. Găsiţi cel mai mic număr x care satisface inegalitatea:

a) $[x]\{x\} \geq 2014$;

b) $[x]\{2014x\} \geq 2014$;

c) $[x]^2\{x\} \geq 2014^2$.

10.** Să se rezolve inecuaţia: $\{x + \{x\}\} \geq 1 - \{x\}$.

11.** Să se rezolve inecuaţia:

a) $\{2x\} \geq \{x\}$;

b) $\{2x\} \leq \{x\}$.

12.** Să se rezolve inecuaţia: $[x]^2\{x\} < 1$.

13.** Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$. Să se determine a, b şi x, ştiind că:

$$a^2 + b^2 + \{x\}^2 \leq ab + a\{x\} + b\{x\}.$$

14.** Să se rezolve inecuaţia: $\left[\frac{x}{x^2 + x + 1}\right] + x^2 + x - 1 \geq 0$.

15.** Să se rezolve inecuaţia: $\left[\frac{x+1}{x^2 - x + 1}\right] + x^2 - 5x + 3 \leq 0$.

16.** Să se rezolve inecuaţia: $\frac{x+1}{2[x]} \leq \frac{2\{x\} + 1}{x}$.

17.** Să se rezolve inecuaţia: $x[x] \leq 1 - \frac{\{x\}}{[x]}$.

Scanned with OKEN Scanner

18**. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\left[\frac{x+2}{x^2+x+1}\right]+x^2-3x-1\leq 0$;

b) $\left[\frac{x+1}{x^2-x+1}\right]+x^2-5x+3\leq 0$.

19**. Să se rezolve inecuația: $[x]+\left[\frac{2x+3}{3}\right]\leq 3x-1$.

20**. Să se determine $x\in\mathbb{R}$, astfel încât: $\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right]+1\leq\left[x^2+\frac{1}{x^2}\right]$.

21**. Să se rezolve inecuația: $[x]+[-x]<[2x]+[-2x]$.

22**. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât: $|x|\leq\{y\}\leq[z]$. Să se arate că:

a) $x+z\geq 0$.

b) Să se determine numerele x,y,z, dacă $x+z=0$.

23***. Să se arate că dacă $x\in\mathbb{R}$ satisface inecuația:

$$[x]^2-x[x]+3\leq 0, \text{atunci } x\geq 4{,}75.$$

24***. Să se arate că dacă $x\in\mathbb{R}$ satisface inecuația:

$$[x]^2-x[x]+4\leq 0, \text{atunci } x\geq 5{,}8.$$

§ 2. Inecuații II

25***. Să se găsească cel mai mare număr real m, astfel încât pentru orice x real să avem: $x^2\geq m[x]\{x\}$.

26***. Să se arate că: $[x^5]+\{x\}^5\geq\frac{1}{4}x^3[x]\{x\}, \forall\, x\geq 0$.

27***. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuația:

$$\left\{\sqrt{\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{(n+1)^2}{2}\right]}\right\}\geq\frac{1}{2}.$$

28***. Fie $m\in\mathbb{Z}$ și $x\in\mathbb{R}$ astfel încât: $|[x]m+1|\leq|[x+m]|$.

a) Să se determine numerele reale x, astfel încât:

$$|[x]m+1|\leq|[x+m]|, \forall\, m\in\mathbb{Z}.$$

b) Să se determine numerele reale x, astfel încât:

$$|[x]m+1|\leq|[x]+m|, \forall\, m\in\mathbb{Z}^*.$$

c) Să se determine numerele reale x, astfel încât:

$|[x]m+1|\leq|[x+m]|, \forall\, m\in\mathbb{R}$ (discuție în raport cu m).

29***. Să se rezolve inecuația: $[7x]+[x]<2[3x]+[2x]$.

30***. a) Să se rezolve ecuația: $[4x]+[3x]-[5x]-2[x]=2$.

b) Să se determine $\max h(x)$ și $\min h(x)$, unde:

$$h(x)=[4x]+[3x]-[5x]-2[x]-2.$$

Scanned with OKEN Scanner

31*. Fie a un număr natural nenul fixat. Să se determine toate numerele reale b pentru care are loc inegalitatea: $[ax^2 + b] \leq [bx^2 + a], \forall x \in \mathbb{R}$.

32*. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\left[\frac{x+1}{x^2-x+1}\right] + \left[\frac{x-1}{x^2-2x+2}\right] \leq 0;$

b) $\left[\frac{x-1}{x^2-3x+3}\right] + \left[\frac{x-1}{x^2-2x+2}\right] + \left[\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}\right] < 0.$

33*. Arătați că există numere naturale n cu proprietatea:

$$\sqrt{3} - \frac{1}{10} < \{n\sqrt{3}\} + \{(n+1)\sqrt{3}\} < \sqrt{3}.$$

34*. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se determine toate numerele reale x cu proprietatea: $\{x\} \leq \{nx\}$.

35*. Fie $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. Să se rezolve inecuația:

$$\left\{x + \frac{1}{n}\right\} + \left\{x + \frac{2}{n}\right\} + \cdots + \left\{x + \frac{n-1}{n}\right\} \geq \frac{n-1}{n}.$$

36*. Fie $x \in (0,1)$; arătați că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\{nx\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

37*. Să se găsească $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care: $\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt[3]{n}\} \geq \frac{2}{n}$.

38*. Să se rezolve inecuația: $\left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right] \leq 1$.

Scanned with OKEN Scanner

soluții 11 | Inecuații

§ 1. Inecuații I

1. Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$.
Ecuația devine: $kt - k - t + 1 < 0 \Rightarrow (k-1)(t-1) < 0$ și cum
$t - 1 < 0 \Rightarrow k - 1 > 0 \Rightarrow k > 1 \Rightarrow k \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty)$.
2. Notând $[x] = k \Rightarrow k^2 - 2k - 7 \leq 0, k \in \{-1,0,1,2,3\} \Rightarrow [-1,4)$.
3. Relația devine dacă $x - [x] = \{x\}, (x-1)([x]-3) < 0$. Cazul $x \leq 1$ nu convine. Pentru $x > 1 \Rightarrow [x] < 3 \Rightarrow x \in (1,3)$.
4. Evident $x = [x] + \{x\} \Rightarrow \{x\} = x - [x]$ și ecuația devine:
$(x-3)([x]+2) \leq 0$ $(*)$.

a) Dacă $x - 3 \leq 0 \Rightarrow x > 3$ și $[x] + 2 \leq 0 \Rightarrow [x] \leq -2$ deci nu există x care să verifice ambele condiții.

b) $x - 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq 3$ și $[x] \geq -2 \Rightarrow x \in [-2,3]$ (se poate face un tabel al semnelor pentru $(*)$).

Ioan Bogdan, G.M., 1993

5*. Avem $4x^2 \leq 2[2x] - 2\{2x\} \Rightarrow ([2x] + \{2x\})^2 \leq 4[2x]\{2x\} \Rightarrow$
$\Rightarrow ([2x] + \{2x\})^2 \leq 0 \Rightarrow [2x] = \{2x\} \Rightarrow x = 0$.

Olimpiadă Rusia, 2010-2011

6*. a) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația devine:
$(k^2 - 1)(1 - t) \leq 0$, dar cum $1 - t > 0 \Rightarrow k^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow k \in \{\pm 1, 0\}$.
Dacă $[x] = 1 \Leftrightarrow x \in [1,2]$;
$[x] = -1 \Leftrightarrow x \in [-1,0) \Rightarrow x \in [-1,2)$;
$[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$.

Aurel Doboșan, Concursul „Arhimede", 2006

b) Evident $x \leq 0$ nu verifică. Avem $[x] \leq x \Rightarrow [x]^2 \leq x^2$ pentru $x > 0$. $[x]^2 \leq [x^2] \Rightarrow 3[x^2] + 1 \geq 3[x]^2 + 1 \Rightarrow [x]^3 + 3[x] \geq 3[x]^2 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow ([x]-1)^3 \geq 0, [x] \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

c) Se utilizează 6 b).

7*. Evident pentru $x \in \mathbb{R}$ cu $[x] \geq 2$ nu sunt soluții.
Pentru $[x] < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) = S_1$ sunt soluții.
Pentru $[x] = 0 \Rightarrow 2\{x\} < 1,3 \Rightarrow \{x\} = 0,65 \Rightarrow x \in [0, 0,65) = S_2$.
Pentru $[x] = 1 \Rightarrow \{x\} < 0,15 \Rightarrow x \in [-1,2)$ și $n \leq x < n + 0,15, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [1, 1,15) = S_3 \Rightarrow x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, 0,65) \cup [1, 1,15)$.

Scanned with OKEN Scanner

8*. a) Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$.
Inegalitatea devine:
$(k+t)^2 \geq (kt+1)^2 \Leftrightarrow k^2 + t^2 \geq k^2t^2 + 1 \Rightarrow k^2(1-t^2) \geq 1 - t^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1-t^2)(k^2-1) \geq 0 \Rightarrow |k| \geq 1$.
Pentru $k = 0$ inegalitatea este falsă, adică pentru $x \in [0,1)$ deci
$x \in \mathbb{R} - [0,1)$.

Arhimede 3-4/2005

b) Fie $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$, atunci inecuația devine: $(k+t)k \leq 1 - t \Rightarrow k^2 + kt + t - 1 \leq 0 \Rightarrow k_1 = -1$ și $k_2 = 1 - t > 0$ deci trebuie ca $-1 \leq k \leq 1 - t$ (2) $\Rightarrow k \in \{-1,0,1\}$.
Din (2) rezultă că $\begin{cases} t + k \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 \\ k = [x] \geq -1 \Rightarrow x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1,1]$.

Gh. Marchidan

9*. a) Dacă $[x] \leq 2014$, atunci inegalitatea nu poate avea loc deci
$[x] = 2015$ și $\{x\} \geq \frac{2014}{2015} \Rightarrow \{x\} = \frac{2014}{2015} \Rightarrow x = 2015 + \frac{2014}{2015}$.

b) $x = 2015 - \frac{1}{2015}$.

c) Dacă $[x] \leq 2014$, atunci inegalitatea nu poate avea loc.
Fie $[x] = 2015$, atunci rezultă
$\{x\} \geq \left(\frac{2014}{2015}\right)^2 \Rightarrow \{t\} \geq \left(\frac{2014}{2015}\right)^2 \Rightarrow t = \left(\frac{2014}{2015}\right)^2$.

Prin urmare, cel mai mare număr x este $x = 2015 + \left(\frac{2014}{2015}\right)^2$.

10.** Notăm $x = [x] + \{x\} = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și inecuația devine:
$\{2t\} \geq 1 - t$ (1). Dacă $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, atunci (1) devine: $3t \geq 1 \Rightarrow t \geq \frac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (2). Dacă $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, atunci (1) devine: $2t - 1 \geq 1 - t \Rightarrow$
$\Rightarrow t \geq \frac{2}{3} \Rightarrow t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ (3).

Din (2) și (3) rezultă $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ deci
$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[k + \frac{1}{3}, k + \frac{1}{2}\right) \cup \left[k + \frac{2}{3}, k + 1\right)\right)$.

Ilie Romeo, G.M. 4/1993

11.** a) Evident $x \in \mathbb{Z}$ sunt soluții. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) =$
$= \{2x\} - \{x\}$ care este periodică cu $T = 1$. Vom rezolva inecuația pentru
$x \in [0,1), \{2x\} - \{x\} \geq 0 \Rightarrow 2x - [2x] \geq x - [x] \Rightarrow x + [x] \geq [2x] \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow x+[x]\geq [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]\leq x$; evident $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ sunt soluții $\Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\mathbb{Z}\bigcup\left[k,k+\frac{1}{2}\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k,k+\frac{1}{2}\right)$.

b) În mod analog, $f(x)=\{2x\}-\{x\}$ este periodică cu $T=1$ deci inecuația $f(x)\leq 0$ se va rezolva pe intervalul $[0,1)$. Avem

$2x-[2x]\leq x-[x]\Leftrightarrow x+[x]\leq [2x]\Rightarrow x+[x]\leq [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow x\leq\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

Pentru $\frac{1}{2}\leq x<1\Rightarrow 1\leq x+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$ deci $x\leq 1$. Așadar,

$x\in\mathbb{Z}\bigcup\left[k+\frac{1}{2},k+1\right),k\in\mathbb{Z}$.

12**. Fie $x=[x]+\{x\}=k+t,k\in\mathbb{Z},t\in[0,1)$, atunci ecuația devine: $k^2t<1$, care este satisfăcută pentru $k\in\{0,\pm 1\}$ deci $x\in[-1,2)=S_1$. Fie $k\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}$, atunci $t<\frac{1}{k^2}$ și $k\leq x<k+\frac{1}{k^2}$.

Observăm că pentru $k=2\Rightarrow 2\leq x<2+\frac{1}{4}\Rightarrow x\in\left[2,\frac{9}{4}\right)=S_2$.

Așadar, pentru $k\in\{0,\pm 1,2\}\Rightarrow x\in S_1\cup S_2=$

$=\left[-1,\frac{9}{4}\right)$ și pentru $k\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1,2\}\Rightarrow k\leq x<k+\frac{1}{k^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in I_k=\left[k,k+\frac{1}{k^2}\right)$.

Pentru fiecare $k\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}\Rightarrow x\in[-1,2)\bigcup_{k\in\mathbb{Z}-\{0,\pm 1\}}I_k$.

Concurs Bulgaria 1997

13**. Dacă notăm $\{x\}=c\in[0,1)$ rezultă $a^2+b^2+c^2\leq ab+ac+bc$, dar se știe că $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$, egalitate doar dacă $a=b=\{x\}$ deci $a,b\in(0,1)$, adică $a=b=t\in(0,1),x=k+t,k\in\mathbb{Z}$ și $t=a=b$.

14**. Calculăm $\mathrm{Im}f$ pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$ și rezultă $\mathrm{Im}f=\left[-1,\frac{1}{3}\right]$. Considerăm cazurile:

a) $[f(x)]=-1\Leftrightarrow -1\leq\frac{x}{x^2+x+1}<0\Rightarrow x<0$ și inecuația devine $-1+x^2+x-1\geq 0\Rightarrow x^2+x-2\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$, dar cum $x<0\Rightarrow x\in(-\infty,-2]=S_1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $[f(x)]=0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{x}{x^2+x+1}<1 \Rightarrow x \ge 0$ și inecuația devine

$-1+x^2+x-1 \ge 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty\right) = S_2$.

Prin urmare, $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty,-2] \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \infty\right)$.

15**. Considerăm funcția $g(x)=\frac{x+1}{x^2-x+1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se găsește

$\text{Im}g = \left[\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$ deci $[g]=\{-1,0,1,2\}$

de unde rezultă sistemele de inecuații:

a) $[g]=-1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+2 \le 0 \\ -1 \le \frac{x+1}{x^2-x+1}<0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$;

b) $[g]=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+3 \le 0 \\ 0 \le \frac{x+1}{x^2-x+1}<1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(2, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right] = S_1$;

c) $[g]=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+4 \le 0 \\ 1 \le \frac{x+1}{x^2-x+1}<2 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,2] = S_2$;

d) $[g]=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+5 \le 0 \\ 2 \le \frac{x+1}{x^2-x+1}<3 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$.

Prin urmare, $x \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow x \in \left(1, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$.

16**. Notăm $x=k+t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și evident $x \notin [0,1)$. Ecuația devine:

$\frac{k+t+1}{2k} \le \frac{2t+1}{k+t} \Rightarrow \frac{(k+t)^2+(k+t)-2k(2t+1)}{2k(k+t)} \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(k-t)^2-(k-t)}{2k(k+t)} \le 0 \Rightarrow \frac{(k-t)(k-t-1)}{2k(k+t)} \le 0$.

Dacă $k \ge 1 \Rightarrow (k-t)(k-t-1) \le 0 \Rightarrow k-1 \le t < 1 \Rightarrow k<2 \Rightarrow k \le 1$

$\Rightarrow k=1 \Rightarrow x \in [1,2) = S_1$.

Dacă $k \le -1$, atunci $2k(k+t)>0 \Rightarrow (k-t)(k-t-1) \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k \in [t, t+1]$, fals. Așadar, $x \in [1,2)$.

Cătălin Zârnă

17**. Evident $[x] \ne 0 \Rightarrow x \notin [0,1)$. Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k \in \mathbb{Z}^*$, $t \in [0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația se scrie: $(k+t)k \leq 1-\frac{t}{k}$ (1). Dacă $k=1$ relația (1) devine $1+t \leq 1-t \Rightarrow 2t \leq 0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x=1$ care verifică ecuația.

Fie $k \geq 2$, atunci (1) se scrie $\frac{k(k^2-1)+t(k^2+1)}{k} \leq 0$ (2) care este falsă pentru $k \geq 2$. Dacă $k \leq -2$, atunci din (2) rezultă $k(k^2-1)+t(k^2+1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \geq \frac{-k(k^2-1)}{k^2+1} = -k + \frac{2k}{k^2+1} > -k-1 \geq 1 \Rightarrow t \geq 1$, absurd.

Dacă $k=-1$, atunci $k=-1+t$ și inecuația devine: $1-t \leq 1+t \Rightarrow t \geq 0$, deci $x \in [-1,0)$ care verifică inecuația. Prin urmare, $x \in [-1,0) \cup \{1\}$.

18.** a) Se procedează ca la exercițiul 15) sau dacă se face substituția $x \to y-1$

rezultă ex. 15) deci $y \in \left(1, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$ de unde rezultă soluțiile:

$x \in \left(0, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{x+1}{x^2-x+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Im}f = \left[\frac{3-2\sqrt{2}}{3}, \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\text{Im}f] = \{-1,0,1,2\}$. Se consideră cazurile:

I. $[\text{Im}f] = -1 \Rightarrow x < -1$ și inecuația devine $x^2-5x+2 \leq 0$

$x \in \left[\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right] \Rightarrow S' = \emptyset$;

II. $[\text{Im}f] = 0 \Rightarrow x \in [-1,0) \cup (2,\infty) = S_1$ și inecuația devine

$x^2-5x+3 \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right] = S'' \Rightarrow S_2 = S' \cap S'' =$

$= \left(2, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$.

III. $[\text{Im}f] = 1 \Rightarrow S' = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (1,2]$ deci $x^2-5x+4 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S'' = [1,4] \Rightarrow S_3 = S' \cap S'' = (1,2]$;

IV. $[\text{Im}f] = 2 \Rightarrow S' = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ deci $x^2-5x+5 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S'' = \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow S_4 = S' \cap S = \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, $x \in S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$.

19**. Avem $x - 1 + \frac{2x+3}{3} - 1 \leq 3x - 1 \Rightarrow x > -\frac{3}{4}$. Dacă $x \in \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ (1) $\Rightarrow [x] = -1$ și inecuația devine: $\left[\frac{2x}{3}\right] \leq 3x - 1$ (2). Din (1) și (2) rezultă: $\left[\frac{2x}{3}\right] = -1 \Rightarrow 3x \geq 0$, fals. Evident $x = 0$ nu verifică. Așadar, $x > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow [x] \geq 0$.

Fie $x = k + t, k \in \mathbb{N}, t \in [0,1) \Rightarrow k + \left[\frac{2k+2t}{3}\right] + 1 \leq 3k + 3t - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{2k+2t}{3}\right] \leq 2k + 3t - 2$ (3). Pentru $k = 0$, din (3) rezultă $\left[\frac{2t}{3}\right] \leq 3t - 2$

$\Rightarrow 3t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{2}{3} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) = S_1$.

Pentru $k = 1$, din (3) rezultă $\left[\frac{2t+2}{3}\right] \leq 3t$ (4).

Dacă $0 \leq t \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \left[\frac{2t+2}{3}\right] = 0$ și (4) este adevărată.

Dacă $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{2t+2}{3}\right] = 0$ și (4) este adevărată.

Dacă $\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow \left[\frac{2t+2}{3}\right] = 1$ și (4) este adevărată.

Prin urmare, oricare ar fi $t \in [0,1)$ (4) este adevărată $\Rightarrow x \in [1,2) = S_2$.

Din (3) rezultă $\left[\frac{2t+6-4k}{3}\right] \leq 3t$, adevărată, oricare ar fi $k \geq 2$

$x \in [2, \infty) = S_3$.

Prin urmare, $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup [1,2) \cup [2, \infty) \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$.

20**. Relația se mai scrie $\left[1 + \frac{x}{x^2+1}\right] + 1 \leq \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right] \Rightarrow 2 + \left[\frac{x}{x^2+1}\right] \leq$

$\leq \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right]$ (*). Avem $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}^*$ și $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x}{x^2+1}\right] \in \{-1,0\}$ și prin urmare inegalitatea (*) este adevărată

$\forall x \in \mathbb{R}^*$.

21**. Utilizând identitatea lui Hermite inecuația se mai scrie:

$[2x] - [x] + [-2x] - x > 0 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[-x + \frac{1}{2}\right] > 0$.

Notând $x + \frac{1}{2} = y$, ultima inegalitate devine:

Scanned with OKEN Scanner

$[y]+[-y+1]>0 \Rightarrow [y]+1+[-y]>0$, dar cum

$[y]+[-y]=\begin{cases}-1, & y\notin\mathbb{Z}\\ 0, & y\in\mathbb{Z}\end{cases}$ și inecuația este verificată numai pentru $y\in\mathbb{Z}$.

Prin urmare, $x_k=k-\frac{1}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Dana Heuberger, Concursul „Gh. Șincai", 2011

22.** a) $|x|\le[z]\le 0=-x+x+z\le|-x|+x+z=|x|+x+z\Rightarrow$
$\Rightarrow x+z\ge 0$. Astfel dacă $x\le 0$, atunci din $|x|<z\Rightarrow x+z\ge 0$, iar dacă $x\ge 0\Rightarrow x\le z\Rightarrow 0\le z-x\le z+x$.

b) Dacă $x+z=0\Rightarrow z\le|-z|\le\{y\}\le[z]\le z$ deci inegalitățile devin egalități. $|x|=\{y\}=[z]$, deci $\{y\}=0\Rightarrow x=0, z=0$. Prin urmare, $x=z=0, y\in\mathbb{Z}$.

Concursul „Traian Lalescu", 2014

23*.** Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$, atunci inecuația devine:

$kt\ge 3\Rightarrow t\ge\frac{3}{k}\Rightarrow k\ge 4$.

Cea mai mică valoare pe care o poate lua k este 4 și atunci $t\ge 0{,}75\Rightarrow x=4+t\ge 4{,}75$.

Concurs Rusia, 1997

24*.** În mod analog rezultă $kt\ge 4\Rightarrow t\ge\frac{4}{k}$ deci cea mai mică valoare pentru k este 5 deci $t\ge 0{,}8$ de unde rezultă $x\ge 5{,}8$.

Concurs Sankt Petersburg, 1998

§ 2. Inecuații II

25*.** Avem $x^2\ge m[x](x-[x])\Leftrightarrow x^2-mx[x]+m[x]^2\ge 0$. Dacă $m=4$, atunci se obține: $(x-2[x])^2\ge 0$. Arătăm că $m=4$ este numărul căutat. Fie $m>4$ și atunci alegem $x>1$ cu $[x]=1$ și inegalitatea devine $x^2-mx+m\ge 0\Rightarrow\{x\}^2+\{x\}(2-m)+1\ge 0$. Dacă notăm cu $f(y)=y^2+y(2-m)+1$ și cum $f(1)<0$, deducem că pe un interval ce îl conține pe 1, funcția este negativă deci găsim un $y<1$ cu $f(y)<5$, adică un $y=\{x\}$, contradicție.

Problemă de concurs

26*.** Evident $x\in[0,1)\cup\mathbb{N}$ sunt soluții. Fie $[x]\{x\}\ne 0$. Notăm $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{N}^*, t\in[0,1)$ și utilizând inegalitățile

$[x^n]\ge[x]^n, \forall x>0$ și $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\ge\frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall x,y\in\mathbb{R}, a,b>0$, obținem:

$[x^5]+\{x\}^5\ge[x]^5+\{x\}^5$,

dar cum $\frac{[x]^5+\{x\}^5}{\{x\}[x]}\ge\frac{1}{4}x^3\Leftrightarrow\frac{k^5+t^5}{kt}\ge\frac{1}{4}(k+t)^3\Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Rightarrow \frac{k^4}{t}+\frac{t^4}{k} \geq \frac{(k^2+t^2)^2}{k+t} \geq \frac{\left(\frac{k+t}{4}\right)^4}{x} = \frac{1}{4}x^3 \Rightarrow [x^5]+\{x\}^5 \geq \frac{1}{4}x^3[x]\{x\}.$

(S-a utilizat inegalitatea $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$.)

27***. Notăm $E_n = \left[\frac{n^2}{2}\right] + \left[\frac{(n+1)^2}{2}\right]$ și considerăm cazurile:

a) $n = 2m, m \in \mathbb{N} \Rightarrow E_{2m} = [2m^2] + \left[\frac{(2m+1)^2}{2}\right] = [2m^2] +$

$+\left[2m^2+2m+\frac{1}{2}\right] = 4m^2+2m = 2m(2m+1) = n(n+1);$

b) $n = 2m+1 \Rightarrow E_{2m} = \left[\frac{(2m+1)^2}{2}\right] + [2m^2+4m+2] =$

$= 4m^2+6m+2 = (2m+1)(2m+2) = n(n+1)$, deci $E_n = n(n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow n < \sqrt{n(n+1)} < \frac{2n+1}{2} < n+1 \Rightarrow \left\{\sqrt{n(n+1)}\right\} < \frac{1}{2}.$

Rezultă că nu există număr natural care să satisfacă inegalitatea.

Radu Marius Tătaru, O.L., Galați, 2014

28***. Inegalitatea se mai scrie: $|[x]m+1| \leq |[x]+m|$.

a) Observăm că dacă $[x] = 1 \Leftrightarrow x \in [1,2) \Rightarrow |m+1| \leq |m+1|$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, iar dacă $[x] = -1 \Rightarrow x \in [-1,0) \Rightarrow |m-1| \leq |m-1|, \forall\, m \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, dacă $x \in [-1,0) \cup [1,2)$ inegalitatea este adevărată oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$.

b) Observăm că față de cele de mai sus se adaugă $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in$ $\in [0,1)$ și inegalitatea devine $1 \leq |m|, \forall\, m \in \mathbb{Z}^*$. Așadar, $x \in [-1,2)$.

c) Pentru $m = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$. Pentru $m \in \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

Notăm $[x] = k \in \mathbb{Z}$, atunci inegalitatea devine $|km+1| \leq |k+m| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{km+1}{k+m}\right| \leq 1 \ (m \neq -k) \quad \begin{cases} \frac{(m+1)[k+1]}{k+m} \geq 0 \\ \frac{(m-1)[k-1]}{k+m} \leq 0 \end{cases} \quad (1), \ m \neq \pm 1, 0.$$

Dacă $m \geq 2 \Rightarrow \frac{k+1}{k+m} \geq 0$ și $\frac{k-1}{k+m} \leq 0 \Rightarrow k \in \{\pm 1, 0\} \Rightarrow x \in [-1,2) = S$.

Dacă $m \leq -2$ atunci din (1) rezultă:

$$\frac{k+1}{k+m} \leq 0 \text{ și } \frac{k-1}{k+m} \geq 0 \Rightarrow k \in \{\pm 1, 0\} \Rightarrow x \in [-1,2).$$

Dan Nedeianu (extindere) R.M. Galați nr. 36

29***. Deoarece funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [7x] + [x] - 2[3x] + [2x]$ este periodică cu perioada $T = 1$, adică $f(x+1) = f(x)$, putem studia

Scanned with OKEN Scanner

inegalitatea pe intervalul $[0,1)$ și cum $[x]=0$, vom considera funcția $g:[0,1)\to\mathbb{R}$,
$g(t)=[7t]-2[3t]+[2t]$ și vom găsi mulțimea valorilor funcției g.
Avem:

t	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	1
g(t)	0	1	2	0	1	0	1	-1	0	1	

Prin urmare, $\text{Im}g=\{-1,0,1,2\}$ deci $g(t)<0$ dacă $t\in\left[\frac{2}{3},\frac{5}{7}\right)\Rightarrow$
$x\in\left[k+\frac{2}{3},k+\frac{5}{7}\right)$, unde $k\in\mathbb{Z}$ deci soluțiile sunt $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k+\frac{2}{3},k+\frac{5}{7}\right)$.

30*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[4x]+[3x]-[5x]-2[x]$ care este periodică cu $T=1$, adică $f(x+1)=f(x)$ și prin urmare vom căuta valorile lui $f(x)$ pe intervalul $[0,1)$, dar cum $[x]=0$, putem considera funcția $g:[0,1)\to\mathbb{R}$, $g(t)=[4t]+[3t]-[5t]$. Vom determina mulțimea valorilor funcției g, adică $\text{Im}g$.
Vom cupla diviziunile: $d_4:\left(\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right)$; $d_3:\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$ și $d_5:\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},1\right)$
și vom considera diviziunea $d=\left(0,\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{4}{4},\frac{4}{5},1\right)$.

t	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1
g(t)	0	-1	0	1	0	1	0	1	2	1	

Prin urmare, $\text{Im}g=\{-1,0,1,2\}=\text{Im}f$ se scade $2\Rightarrow\text{Im}f=\{-3,-2,-1,0\}$
deci $4x=0\Leftrightarrow t\in\left[\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right)\Rightarrow x\in\left[k+\frac{3}{4},k+\frac{4}{5}\right), k\in\mathbb{Z}$,
$x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[k+\frac{3}{4},k+\frac{4}{5}\right)=S$.

b) $\max h(x)=0$ și $\min h(x)=-3$.

31*.** Avem $ax^2+b-1<[ax^2+b]\le[bx^2+a]\le bx^2+a\Rightarrow$
$\Rightarrow(ax^2+b)-(bx^2+a)<1\Rightarrow(a-b)(x^2-1)<1$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a > b$, atunci pentru x suficient de mare se obține o contradicție. Așadar, $a \leq b$. Dacă $b > a$ (1), atunci pentru $x = 0$ $[b] \leq [a] \Rightarrow$
$b - 1 < [b] \leq [a] \leq a \Rightarrow b < a + 1$ (2),
$a < b < a + 1 \Rightarrow [b] = [a]$. Din (1) și (2) $\Rightarrow (b - a)(b - 1) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a}{b} + b > a + 1$. Putem alege x cu $x^2 = \frac{1}{b}$ astfel încât $ax^2 + b = a + 1$.

M. Mihăilescu, O.L. Dolj, 2004

32*.** a) Notăm $g = \frac{x+1}{x^2 - x + 1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Se deduce că $\text{Im}g = \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right]$ și $\text{Im}h = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$
$[g] \in \{-1,0,1,2\}$ și $[h] = \{-1,0\}$. Pentru $[g] + [h] \leq 0$ se impun condițiile:

1) $[g] = [h] = -1$;
2) $[g] = -1, [h] = 0$;
3) $[g] = 0, [h] = -1$;
4) $[g] = [h] = 0$;
5) $[g] = 1, [h] = -1$.

1) Din $[g] = -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$ și din $[h] = -1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ deci $x \in (-\infty, -1) = S_1$.
2) Din $[g] = -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$ și din $[h] = 0 \Rightarrow x \in [1, \infty) \Rightarrow x \in \emptyset$.
3) Din $[g] = 0 \Rightarrow x \in [-1,0) \cup (2, \infty)$ și din $[h] = -1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ $\Rightarrow x \in [-1,0) = S_2$.
4) Din $[g] = 0 \Rightarrow x \in [-1,0) \cup (2, \infty)$ și din $[h] = 0 \Rightarrow x \in [1, \infty) \Rightarrow$ $x \in (2, \infty) = S_3$.
5) $[g] = 1, [h] = -1 \Rightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) = S_4$.

Prin urmare, $x \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

Gh. Andrei

b) Notăm $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 3x + 3}, g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$,
$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}$ și inecuația devine $[f] + [g] + [h] < 0$ (1).

Deducem că $\text{Im}f = \left[-\frac{1}{3}, 1\right] \Rightarrow [f] \in \{-1,0,1\}, \text{Im}g = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$
$[g] \in \{-1,0\}, \text{Im}h = [0,4] \Rightarrow [h] \in \{0,1,2,3,4\}$.
Pentru a fi satisfăcută inegalitatea (1) se impun situațiile:

i) $[f] = -1, [g] = [h] = 0$;
ii) $[g] = -1, [f] = [h] = 0$;

Scanned with OKEN Scanner

iii) $[f] = [g] = -1, [h] \in \{0,1\}$.

Calculăm pe rând $[h] = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

$[h] = 1 \Leftrightarrow x \in (0,2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty)$

$[f] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$[f] = 0 \Leftrightarrow x \in [1, \infty) - \{2\}$

$[g] = 0 \Leftrightarrow x \in [1, \infty)$

$[g] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

Cazul I.

$[f] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$[g] = 0 \Leftrightarrow x \in [1, \infty) \Rightarrow x \in S_1 = \emptyset$

$[h] = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

Cazul II.

$[g] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$[f] = 0 \Leftrightarrow x \in [1, \infty) - \{2\} \Rightarrow x \in S_2 = \emptyset$

$[h] = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

Cazul III. are două subcazuri:

$\alpha)$ $[f] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$[g] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \Rightarrow x \in (-\infty, 0) = S_3$

$[h] = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$

$\beta)$ $[f] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$[g] = -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \Rightarrow x \in (0,2-\sqrt{3}) = S_4$

$[h] = 1 \Leftrightarrow x \in (0,2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty)$

Prin urmare, $x \in S_3 \cup S_4 = (-\infty, 2-\sqrt{3})$.

Gh. Andrei

33***. Folosim teorema lui Kronecker: dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, atunci pentru orice interval $(a, b) \subset [0,1]$ există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{nx\} \in (a, b)$.

Cum $\sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\alpha_n = \{n\sqrt{3}\} \in \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{10}, \sqrt{3} - 1\right).$$

Atunci $n\sqrt{3} = a_n + \alpha_n$ cu $\alpha_n \in (0,1)$

și $a_n \in \mathbb{N}$ și $(n+1)\sqrt{3} = n\sqrt{3} + \sqrt{3} = a_n + \alpha_n + 2 - \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(n+1)\sqrt{3}\} = \alpha_n + 2 - \sqrt{3} \in (0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{n\sqrt{3}\} + \{(n+1)\sqrt{3}\} = 2\alpha_n + 2 - \sqrt{3}.$

Dar din $\alpha_n < \sqrt{3} - 1 \Rightarrow 2\alpha_n + 2 - \sqrt{3} < \sqrt{3}$ și din $\alpha_n > \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{10}$

deci $\sqrt{3} - \frac{1}{10} < \{n\sqrt{3}\} + \{(n+1)\sqrt{3}\} < \sqrt{3}.$

Radu Gologan, Concursul „Vrânceanu Procopiu", 2009

Scanned with OKEN Scanner

34*.** Soluția 1

Dacă $n=1$, inegalitate evidentă, ca egalitate.

Pentru $n\geq 2 \Rightarrow \{x\}\leq\{nx\} \Leftrightarrow x-[x]\leq nx-[nx] \Leftrightarrow$

$(n-1)x\geq [nx]-[x]$ și cu identitatea lui Hermite avem:

$$(n-1)x\geq [x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[x]\Rightarrow$$

$$(n-1)x\geq \left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right](1).$$

Fie $x=[x]+\{x\}=k+t, k\in\mathbb{Z}, t\in[0,1)$. Avem $[0,1)=\left[0,\frac{1}{n}\right)\cup\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\cup\ldots$ $\cup\left[\frac{n-1}{n},1\right)$ și inecuația (1) este echivalentă cu $(n-1)t\geq\left[t+\frac{1}{n}\right]+$ $+\left[t+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[t+\frac{n-1}{n}\right], \forall\, t\in[0,1)$ (2). Dacă $t\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$ inecuația (2) devine $(n-1)t\geq 0$ cu soluția $t\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$. Dacă $t\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$ inecuația (2) devine $(n-1)t\geq 1$ cu soluția $t\in\left[\frac{1}{n-1},\frac{2}{n}\right)$. Procedând analog pentru $t\in\left[\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right),\left[\frac{3}{n},\frac{4}{n}\right),\ldots,\left[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}\right)$ se obțin mulțimile de soluții, intervalele $t\in\left[\frac{2}{n-1},\frac{3}{n}\right),\ldots,\left[\frac{n-2}{n-1},\frac{n-1}{n}\right)$. Pentru $t\in\left[\frac{n-1}{n},1\right)$ inecuația (2) nu are soluție. Așadar, soluțiile sunt

$$S_1=\left[0,\frac{1}{n}\right)\cup\left[\frac{1}{n-1},\frac{2}{n}\right)\cup\left[\frac{2}{n-1},\frac{3}{n}\right)\cup\ldots\cup\left[\frac{n-2}{n-1},\frac{n-1}{n}\right)$$

adică $S=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\bigcup\limits_{p=0}^{n-2}\left[k+\frac{p}{n-1},k+\frac{p+1}{n}\right)$.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

Soluția 2

Pentru $n=1$, inegalitatea este evidentă. Inecuația se scrie echivalent $x-[x]\leq nx-[nx]\Leftrightarrow [nx]-[x]\leq(n-1)x$. Vom rezolva mai întâi inecuația într-un interval $[k,k+1), k\in\mathbb{Z}$. Fie $k\in\mathbb{Z}$ și $p\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Pentru

$x\in\left[k+\frac{p}{n-1},k+\frac{p+1}{n}\right)$ avem $[nx]=nk+p$. Inecuația devine

$x-k\leq nx-nk-p\Leftrightarrow x\geq k+\frac{p}{n-1}$. Evident $\frac{p}{n}<\frac{p}{n-1}\leq\frac{p+1}{n}$, deci soluțiile inecuației date situate în intervalul $[k,k+1)$ sunt

Scanned with OKEN Scanner

$x \in \bigcup_{p=0}^{n-2}\left[k+\frac{p}{n-1}, k+\frac{p+1}{n}\right)$. În concluzie, $\{x\} \leq \{nx\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\bigcup_{p=0}^{n-2}\left[k+\frac{p}{n-1}, k+\frac{p+1}{n}\right)$.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

35***. Utilizând identitatea lui Hermite pentru partea fracționară, adică

$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{x+\frac{k}{n}\right\} = \{nx\} + \frac{n-1}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left\{x+\frac{k}{n}\right\} = \{nx\} - \{x\} + \frac{n-1}{2} \geq \frac{n-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{nx\} \geq \{x\}$ și se aplică exercițiul precedent.

36***. Soluția 1

Dacă $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ și cum $\frac{2}{3x} - \frac{1}{3x} = \frac{1}{3x} > 1$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $n \in \left(\frac{1}{3x}, \frac{2}{3x}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow nx \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, adică $\{nx\} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pentru $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ se alege $n = 1$, iar pentru $x = \frac{2}{3}$ se ia $n = 2$. Dacă $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ și cum

$\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}\right) \cup \ldots,$

există $k \geq 2$ astfel încât $x \in \left[\frac{k}{k+1}, \frac{k+1}{k+2}\right)$.

Pentru $k = 3p, p \in \mathbb{N}^*, x \in \left[\frac{3p}{3p+1}, \frac{3p+1}{3p+2}\right) \Rightarrow$

$(p+1)x \in \left[p+\frac{2p}{3p+1}, p+\frac{2p+1}{3p+2}\right) \Rightarrow \{(p+1)x\} \in \left[\frac{2p}{3p+1}, \frac{2p+1}{3p+2}\right) \subset$

$\subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pentru $k = 3p+1, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (p+1)x \in \left[p+\frac{2p+1}{3p+2}, p+\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(p+1)x\} \in \left[\frac{2p+1}{3p+2}, \frac{2}{3}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pentru $n = 3p+2, p \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow (p+2)x \in \left[p+1+\frac{2p+1}{3p+3}, p+1+\frac{2p+2}{3p+4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(p+2)x\} \in \left[\frac{2p+1}{3p+3}, \frac{2p+2}{3p+4}\right) \subset \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Soluția 2

Dacă $x \in \mathbb{R}^* - \mathbb{Q}$, mulțimea $\{\{nx\} | n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $[0,1)$ (lema lui Kronecker) deci concluzia este imediată.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x \in \mathbb{Q}^*, x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, (p,q) = 1$ deci $kp, k = \overline{1,q}$ parcurge toate resturile modulo q. Notăm $r_k = kp(\text{mod } q) \Rightarrow \left\{\frac{kp}{q}\right\} = \frac{r_k}{q} \Rightarrow \left\{\frac{kp}{q}\right\}$ va lua toate valorile din mulțimea $\left\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}\right\}$. Este suficient să găsim $m \in \{1,2,\ldots,q-1\}$ astfel încât $\frac{1}{3} \leq \frac{m}{q} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{q}{3} \leq m < \frac{2q}{3}$.

Cum $x \in (0,1)$, atunci $q \geq 2$. Pentru $q \in \{2,3\}$, luăm $m = 1$. Pentru $q \geq 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{2q}{3} - \frac{q}{3} > 1$ deci există cel puțin un număr întreg în $\left[\frac{q}{3}, \frac{2q}{3}\right]$. Acel întreg nu este chiar $\frac{2q}{3}$. Dacă $q \in \{4,5\}$, atunci $\frac{2q}{3} \notin \mathbb{N}$, iar dacă $q \geq 6$, există cel puțin doi întregi în intervalul dat.

Vlad Emanuel, Gh. Iurea, Ciprian Badiu, R.M., 2007

37***. $\{\sqrt{n}\} + \{\sqrt[3]{n}\} = \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}]$.

Demonstrăm că $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \geq \frac{1}{n}$.

Este suficient pentru $n = k^2 + 1$. $\sqrt{k^2+r} - [\sqrt{k^2+r}] \geq \sqrt{k^2+1} - k$, $0 < r < 2k$. $\sqrt{k^2+1} - k \geq \frac{1}{k^2+1} \Rightarrow (k^2+1)^3 \geq (k^3+k+1)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow k^3(k-2) + 2k(k-1) \geq 0$ (A) dacă $k \geq 2$.

Analog $\sqrt[3]{n} - [\sqrt[3]{n}] \geq \frac{1}{n}$. Pentru $n = k^2$ sau $n = k^6$ este falsă.

38***. Evident $x \in [1,\infty)$ sunt soluții $\left(\left[\frac{1}{x}\right] = 0\right)$ și $x = \pm 1$ verifică.

Dacă $x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \left[\frac{1}{x}\right] \geq 1 \Rightarrow x \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right] \in \{0,1\}$. Dacă $-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] < 1 - x < 2 \Rightarrow \left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right] = 1$.

Dacă $-2 < x < -1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1 \Rightarrow x\left[\frac{1}{x}\right] = -x \in [1,2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[x\left[\frac{1}{x}\right]\right] = 1$. Prin urmare, $x \in (-2,\infty) - \{0\}$ sunt soluții.

Dacă $x \in [-n, -n+1)$ nu se verifică ecuația.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

capitolul 12 | Sisteme

§ 1.

1. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} [x]+\{y\}=1,3 \\ \{x\}+[y]=3,2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} [x]+\{y\}=1,2 \\ \{x\}+[y]=3,3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+[y]=\dfrac{22}{3} \\ y-[x]=\dfrac{7}{2} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+[y]=5,5 \\ y-[x]=\dfrac{10}{3} \end{cases}$.

2. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} [x]+y=4,4 \\ -x+[y]=1,8 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+[y]=17,8 \\ 2[x]+y=26,9 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+[y]=\dfrac{23}{3} \\ y-[x]=\dfrac{7}{2} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} [x]+[y]+y=43,8 \\ x+y-[x]=18,4 \end{cases}$.

3. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x-y=2005 \\ [x]+[y]=2007 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2[x]+3[y]=8 \\ 2[x]-[y]=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2[x]+3[y]=5 \\ [x]+2[y]=4 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+[y]=13,9 \\ [x]+2y=24,3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+[y]=13,8 \\ [x]+2y=24,4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+[y]=12,8 \\ [x]+3y=18,2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+\{y\}=31,6 \\ y+3\{x\}=12,8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+[y]=5,3 \\ [x]+y=4,2 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} [x]+y=4,2 \\ 2x+[y]=5,3 \end{cases}$.

5*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy+[x][y]=[z] \\ [x]y+x[y]=z \end{cases}.$$

6. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} [x^2]+[y]=x-\dfrac{1}{2} \\ x[y]+y[x]=y-\dfrac{3}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} [x^2]+[y]=x-\dfrac{1}{2} \\ x[y]-y[x]=y-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

7. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3\{x\}^2+0,25[x]=1 \\ x-[x]^2=0,5 \end{cases}.$$

8. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{2x+1}{4}\right]=x-3 \\ \left[\dfrac{3x-1}{2}\right]=y+3 \end{cases}.$$

9. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{3x+1}{2}\right]+\left[\dfrac{2y-1}{2}\right]=x \\ \left[\dfrac{3x-1}{2}\right]+\left[\dfrac{2y+1}{2}\right]=y \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

10*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x]+[y]=6 \\ [x[x]]=y \end{cases}.$$

11*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x]+y=\dfrac{11}{2} \\ [y]+x=\dfrac{16}{3} \\ 3x-2y=10 \end{cases}.$$

12*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x^2]+[y^2]=1 \\ [x^4]+[y^4]=2 \end{cases}.$$

13*. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{x+y}{3}\right]=5 \\ \left[\dfrac{x-y}{3}\right]=2 \\ \left[\dfrac{xy}{9}\right]=6 \end{cases}.$$

14. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \left[\dfrac{x+1}{2}\right]=\dfrac{y-1}{3} \\ \left[\dfrac{y-1}{2}\right]=\dfrac{x+1}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \left[\dfrac{x+3}{2}\right]=\dfrac{y-2}{3} \\ \left[\dfrac{y-1}{2}\right]=\dfrac{x+2}{3} \end{cases}$ $x,y\in\mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} \left[\dfrac{x-6}{2}\right]=\dfrac{3y+1}{3} \\ \left[\dfrac{y+1}{4}\right]=2x+1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \left[\dfrac{x+2}{3}\right]=\dfrac{y-3}{2} \\ \left[\dfrac{y+1}{3}\right]=\dfrac{x+3}{2} \end{cases}$.

15. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2\{x\}+3\{y\}=1 \\ 2\{x\}+4\{y\}=2 \end{cases}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\begin{cases} x+[y]=32{,}25 \\ y+[x]=32{,}6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \{x\}^2+\{y\}^2=0{,}2 \\ \{-x\}^2+\{-y\}^2=1 \end{cases}$.

16. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \left[\frac{x}{y}\right]=x-y-1 \\ \left\{\frac{x}{y}\right\}=\frac{x-2y}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \left[\frac{5x}{2y}\right]=2x-3y-2 \\ \left\{\frac{5x}{2y}\right\}=\frac{x-2y}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \left\{\frac{3x}{2y}\right\}=\frac{4y-x}{4} \\ \left[\frac{3x}{2y}\right]=2x-5y+1 \end{cases}$.

17. Să se rezolve sistemul:

$\begin{cases} 2[x]+[y]=3 \\ x^2+y^2=12{,}5 \end{cases}$, unde $x,y\in[0,\infty)$ şi $x+y\in\mathbb{N}$.

18. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \left[\frac{3x+1}{2}\right]+\left[\frac{2y-2}{3}\right]=x \\ \left[\frac{3x-1}{2}\right]+\left[\frac{2y+1}{3}\right]=y \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \left[\frac{3x+1}{2}\right]+\left[\frac{2y-1}{3}\right]=x+2 \\ \left[\frac{3x-1}{2}\right]+\left[\frac{2y+1}{3}\right]=y \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \left[\frac{4y+3}{5}\right]=\frac{3x+2}{4} \\ \left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{3y+4}{-3} \end{cases}$.

19. a) Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

$2^{[x]}+2\{y\}=z$ şi $2^{[y]}+2\{x\}=4-z$.

Arătaţi că $x+y\geq 0$.

b) Să se rezolve sistemul:

$x^n-[y]=y^n-[x]-1=1, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.

20.** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x[y] = [x] + y \\ 2y[x] = x + [y] \end{cases} \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

21. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ sistemul:

$$\begin{cases} x + 3y + [2x] + 2[4y] = 18 \\ 5x + y + 2[2x] - [4y] = 0 \end{cases}.$$

22. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x^2] + [y] = x - \dfrac{1}{2} \\ x[y] + y[x] = y - \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

23.** Să se rezolve sistemul în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} [x] - \{y\} = \sqrt{3} \\ \{x\} - [y] = \sqrt{2} \end{cases}.$$

24. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \{x\}^2 + \{y\}^2 = \dfrac{1}{4} \\ \{-x\}^2 + \{-y\}^2 = \dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

25. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \{x\}^2 + \{y\}^2 = 0{,}2 \\ \{-x\}^2 + \{-y\}^2 = 1 \end{cases}.$$

26. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [|x|] = |[y]| \\ |[x]| = [|y|] \end{cases}.$$

27. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x] + [y] = 2 \\ |x - 1| + |y + 1| = 2 \end{cases}.$$

28. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{y-1}\right]^2 = x - 1 \\ 2\left[\sqrt{y + 2\sqrt{x}}\right] = y - 1 \end{cases}.$$

29. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} \left[\dfrac{x}{y}\right] = x - y - 1 \\ \left\{\dfrac{x}{y}\right\} = \dfrac{x - 2y}{2} \end{cases}.$

Scanned with OKEN Scanner

30*. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} 2[x]+[y]=3 \\ x^2+y^2=12{,}5 \\ x+y\in\mathbb{N} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} [x]^2+[y]^2=4 \\ x^2+y^2=2{,}5 \\ x-y\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

31.** Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x+d(y)=6{,}5 \\ y+d(x)=41 \end{cases}$, unde $d(x)=\min|x-k|$, $k\in\mathbb{Z}$.

32*.** Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$. Să se rezolve:

$\begin{cases} x^m=[y]+m \\ y^n=[x]+n \end{cases}$.

33.** Fie $a,b\in\mathbb{Z}$. Să se rezolve sistemul:

$\begin{cases} [x]+2y=a \\ [y]+2x=b \end{cases}$.

§ 3.

34.** Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}1 \\ \{x\}+y+[z]=2{,}2 \\ [x]+\{y\}+z=3{,}3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+[z]+\{y\}=4{,}6 \\ y+[x]+\{z\}=3{,}75 \\ z+[y]+\{x\}=5{,}69 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3{,}8 \\ y+[z]+\{x\}=5{,}7 \\ z+[x]+\{y\}=4{,}9 \end{cases}$.

35.** Să se rezolve sistemul:

$\begin{cases} x+[y]=\{z\}+54 \\ y+[z]=\{x\}+54 \\ z+[x]=\{y\}+54 \end{cases}$.

36.** Să se rezolve sistemul:

$\begin{cases} x[x]-[y]\{y\}+z\{z\}=0{,}8 \\ y[y]-[z]\{z\}+x\{x\}=0{,}09 \\ z[z]-[x]\{x\}+y\{y\}=0{,}01 \end{cases}$.

Scanned with OKEN Scanner

37*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=a,1 \\ y+[z]+\{x\}=a,2 \\ z+[x]+\{y\}=a,3 \end{cases}, \text{unde } a\in\mathbb{N}.$$

38*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x-[y]+\{z\}=3,7 \\ y-2[z]-\{x\}=-5,1 \\ 2z-[x]-\{y\}=4 \end{cases}.$$

39*. Să se rezolve sistemele:

a) $$\begin{cases} \left[x^2+x+\frac{1}{2}\right]=\left[-y^2-y+\frac{1}{2}\right] \\ \left[y^2+y+\frac{1}{2}\right]=\left[-z^2-z+\frac{1}{2}\right] \\ \left[z^2+z+\frac{1}{2}\right]=\left[-x^2-x+\frac{1}{2}\right] \end{cases};$$

b) $$\begin{cases} [-2x^2-x+1]=[y^2-y+1] \\ [-2y^2-y+1]=[z^2-z+1] \\ [-2z^2-z+1]=[x^2-x+1] \end{cases}.$$

40*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \{x\}^2+2016\{x\}=2018z-\frac{1}{4} \\ \{y\}^2+2016\{z\}=2018x-\frac{1}{4} \\ \{z\}^2+2016\{x\}=2018y-\frac{1}{4} \end{cases}.$$

41*. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=g(y) \\ \left[\frac{f(y)}{g(y)}\right]=g(z), \\ \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=g(x) \end{cases}$$

unde $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ cu $f(t)=t^2+t+1, g(t)=t^2-t+1$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Probleme propuse

42**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\frac{2x+1}{3}\right]+\left[\frac{4y+1}{6}\right]=\frac{5z+1}{3} \\ \left[\frac{2y+1}{3}\right]+\left[\frac{4z+1}{6}\right]=\frac{5x+1}{3} \\ \left[\frac{2z+1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5y+1}{3} \end{cases}.$$

43**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\frac{x}{1-y}\right]=\frac{[y]}{1-[z]} \\ \left[\frac{y}{1-z}\right]=\frac{[z]}{1-[x]} \\ \left[\frac{z}{1-x}\right]=\frac{[x]}{1-[y]} \end{cases}.$$

44**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y^2}\right]=z \\ \left[\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z^2}\right]=x \\ \left[\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{x^2}\right]=y \end{cases}.$$

45**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2y+5}{12}\right]+\left[\frac{z+1}{3}\right]=\frac{3t+1}{2} \\ \left[\frac{2y-1}{12}\right]+\left[\frac{2z+5}{12}\right]+\left[\frac{t+1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2} \\ \left[\frac{2z-1}{12}\right]+\left[\frac{2t+5}{12}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3y+1}{2} \\ \left[\frac{2t-1}{12}\right]+\left[\frac{2x+5}{12}\right]+\left[\frac{y+1}{3}\right]=\frac{3z+1}{2} \end{cases}.$$

46**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x^2-2y]+2[z]=[t]^2 \\ [y^2-2z]+2[t]=[x]^2 \\ [z^2-2t]+2[x]=[y]^2 \\ [t^2-2x]+2[y]=[z]^2 \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

47**. Să se rezolve sistemul în mulțimea numerelor întregi:

$$\begin{cases}\left[\frac{2a+1}{5}\right]+\left[\frac{12b+1}{30}\right]=c\\ \left[\frac{2b+1}{5}\right]+\left[\frac{12c+1}{30}\right]=a\\ \left[\frac{2c+1}{5}\right]+\left[\frac{12a+1}{30}\right]=b\end{cases}.$$

Gh. Andrei

48**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}[x]^2+\{2y+1\}+\{x+3y\}^2=1{,}89\\ [y]^2+\{2z+1\}+\{y+3z\}^2=4{,}61\\ [z]^2+\{2x+1\}+\{z+3x\}^2=10{,}56\end{cases}.$$

M.B. 27017

49**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\{x\}+\{y^2\}=\{z^3\}\\ \{x^2\}+\{y^3\}=\{z^4\}\\ \{x^3\}+\{y^4\}=\{z^5\}\end{cases}.$$

M.B. 26941

50**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}x^2-7\{y\}+2=0\\ y^2-7\{z\}+2=0\\ z^2-7\{x\}+2=0\end{cases}.$$

M.B. 26362

51**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}a+[x]+[by]=[(a+b)^z]\\ a+[y]+[bz]=[(a+b)^x]\\ a+[z]+[bx]=[(a+b)^y]\end{cases}.$$

M.B. 26720

52**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}x[x]-[y]\{y\}+z\{z\}=0{,}294849\\ y[y]-[z]\{z\}+x\{x\}=0{,}103041\\ z[z]-[x]\{x\}+y\{y\}=0{,}186624\end{cases}.$$

M.B. 26626

Scanned with OKEN Scanner

53**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x_1]+\left[x_2+\frac{1}{3}\right]+\left[x_3+\frac{2}{3}\right]=[3x_4] \\ [x_2]+\left[x_3+\frac{1}{3}\right]+\left[x_4+\frac{2}{3}\right]=[3x_5] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [x_n]+\left[x_1+\frac{1}{3}\right]+\left[x_2+\frac{2}{3}\right]=[3x_3] \end{cases}.$$

54**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} [x_1^2-x_2-2]=[x_3] \\ [x_2^2-x_3-2]=[x_4] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [x_n^2-x_1-2]=[x_2] \end{cases}.$$

55**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{[x_1]}+\frac{1}{\{x_2\}}=2016x_3 \\ \frac{1}{[x_2]}+\frac{1}{\{x_3\}}=2016x_4 \\ \frac{1}{[x_3]}+\frac{1}{\{x_4\}}=2016x_5 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{[x_n]}+\frac{1}{\{x_1\}}=2016x_2 \end{cases}.$$

Culese din Revista „Octogon”

56**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1^2+2\{x_2\}^2=5[x_3]^2 \\ x_2^2+2\{x_3\}^2=5[x_4]^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^2+2\{x_1\}^2=5[x_2]^2 \end{cases}.$$

57**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \left[\frac{4x_1+4}{4x_2-5}\right]=\frac{2x_3-1}{3} \\ \left[\frac{4x_2+4}{4x_3-5}\right]=\frac{2x_4-1}{3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[\frac{4x_n+4}{4x_1-5}\right]=\frac{2x_2-1}{3} \end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

58**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\left[\frac{1}{10-x_1}\right]=\frac{1}{10-[x_2]}\\ \left[\frac{1}{10-x_2}\right]=\frac{1}{10-[x_3]}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left[\frac{1}{10-x_n}\right]=\frac{1}{10-[x_1]}\end{cases}.$$

59**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\left[\frac{x_1}{m}\right]=[x_2-m]\\ \left[\frac{x_2}{m}\right]=[x_3-m]\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left[\frac{x_n}{m}\right]=[x_1-m]\end{cases}, \text{unde } m\in\mathbb{N}, m\geq 3.$$

60**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\frac{[x_1]}{3x_2+\{x_3\}}+\frac{\{x_2\}}{3x_3+[x_4]}\geq\frac{4}{15}\\ \frac{[x_2]}{3x_3+\{x_4\}}+\frac{\{x_3\}}{3x_4+[x_5]}\geq\frac{4}{15}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{[x_n]}{3x_1+\{x_2\}}+\frac{\{x_1\}}{3x_2+[x_3]}\geq\frac{4}{15}\end{cases}.$$

61**. Să se rezolve sistemele:

a) $[x_1^2]-4[x_2]=[x_2^2]-4[x_3]=\dots=[x_n^2]-4[x_1]=3$;

b) $[x_1]+[x_2[x_3]]=[x_2]+[x_3[x_4]]=\dots=[x_n]+[x_1[x_2]]=n(n+1)$.

62**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}\left[\sqrt{5x_1+6}\right]=2\sqrt{x_2+1}\\ \left[\sqrt{5x_2+6}\right]=2\sqrt{x_3+1}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left[\sqrt{5x_n+6}\right]=2\sqrt{x_1+1}\end{cases}.$$

M.B. 26612

63**. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}[x_1](1+\{x_2\})=x_3+\frac{1}{2}\\ [x_2](1+\{x_3\})=x_4+\frac{1}{2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [x_n](1+\{x_1\})=x_2+\frac{1}{2}\end{cases}.$$

M.B. 26829

Scanned with OKEN Scanner

soluții 12 | Sisteme

§ 1.

1. a) Din sistem rezultă $[x]=1,\{x\}=0{,}2$ și $[y]=3,\{y\}=0{,}3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=[x]+\{x\}=1{,}2, y=[y]+\{y\}=3{,}3.$

b) În mod analog, rezultă $x=1{,}3, y=3{,}2.$

c) Avem $\begin{cases}[x]+[y]+\{x\}=7+\dfrac{1}{3}\\ [y]-[x]+\{y\}=3+\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \{x\}=\dfrac{1}{3},\{y\}=\dfrac{1}{2},[x]=2,$
$[y]=5 \Rightarrow x=\dfrac{7}{3}, y=\dfrac{11}{2}.$

d) Analog, rezultă $x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{13}{3}.$

2. a) Avem $\begin{cases}[x]+[y]+y=4{,}4\\ -[x]+[y]-\{x\}=1{,}8\end{cases} \Rightarrow \{y\}=0{,}4$ și $\{x\}=0{,}2,$
atunci rezultă $\begin{cases}[x]+[y]=4\\ -[x]+[y]=2\end{cases} \Rightarrow [x]=1,\ [y]=3 \Rightarrow x=1{,}2, y=3{,}4.$

b) Sistemul se mai scrie $\begin{cases}[x]+[y]+\{x\}=17{,}8\\ 2[x]+[y]+\{y\}=26{,}9\end{cases} \Rightarrow \{x\}=0{,}8,$
$\{y\}=0{,}9 \Rightarrow \begin{cases}[x]+[y]=17\\ 2[x]+[y]=26\end{cases} [x]=9,[y]=8 \Rightarrow x=9{,}8, y=8{,}9.$

Gh. Huțanu, R.M.G. nr. 34

c) Se deduce $x=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$ și $y=5+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}, (x,y)\in\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{11}{2}\right).$

d) Din prima ecuație rezultă $\{y\}=0{,}8$ și din a doua ecuație rezultă
$\{x\}+[y]+\{y\}=18{,}4 \Rightarrow \{x\}+[y]=17{,}6 \Rightarrow \{x\}=0{,}6$ și $[y]=17.$
Rezultă $y=17{,}8, x=9{,}6.$

3. a) Din prima ecuație rezultă $[x]+\{x\}-[y]-\{y\}=2005 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x\}-\{y\}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \{x\}=\{y\}$ și sistemul devine $\begin{cases}[x]-[y]=2005\\ [x]+[y]=2007\end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow [x]=2006,[y]=1 \Rightarrow x=2006+t, y=1+t,$ unde
$\{x\}=\{y\}=t\in[0,1) \Rightarrow (x,y)\in[2006,2007)\times[1,2).$

b) $(x,y)\in[1,2)\times[2,3).$ c) $(x,y)\in[-2,1)\times[3,4).$

Scanned with OKEN Scanner

4. a) Sistemul se mai scrie $\begin{cases}[x]+[y]+\{x\}=13,9\\ [x]+2[y]+2\{y\}=24,3\end{cases}$ de unde rezultă două sisteme:

$\alpha)$ $\begin{cases}[x]+[y]=13\\ [x]+2[y]=24\end{cases}$ cu $\begin{matrix}\{x\}=0,9\\ \{y\}=0,15\end{matrix}$ $\Rightarrow x=2,9;\ y=11,15.$

$\beta)$ $\begin{cases}[x]+[y]=13\\ [x]+[y]=23\end{cases}$ cu $\begin{matrix}\{x\}=0,9\\ \{y\}=\dfrac{13}{20}\end{matrix}$ $\Rightarrow x=3,9;\ y=10,65.$

Lucian Niculescu, O.L. Buzău, 2012

b) Sistemul devine: $\begin{cases}[x]+[y]+\{x\}=13,8\\ [x]+2[y]+2\{y\}=24,4\end{cases}$ de unde rezultă două sisteme: $\alpha)$ $\begin{cases}[x]+[y]=13\\ [x]+2[y]=24\end{cases}$ cu $\begin{matrix}\{x\}=0,8\\ \{y\}=0,2\end{matrix}$ $\Rightarrow x=2,8;\ y=11,2.$

$\beta)$ $\begin{cases}[x]+[y]=13\\ [x]+[y]=23\end{cases}$ $\begin{matrix}\{x\}=0,8\\ \{y\}=0,7\end{matrix}$ $\Rightarrow x=3,8;\ y=10,7.$

c) Avem: $\begin{cases}[x]+[y]+\{x\}=12,8\\ [x]+3[y]+3\{y\}=18,2\end{cases}$ și în mod analog se obțin perechile de soluții: $\left(\dfrac{49}{5},\dfrac{46}{15}\right);\left(\dfrac{54}{5},\dfrac{41}{15}\right).$

d) Sistemul devine: $\begin{cases}[x]+\{x\}+\{y\}=31,6\\ [y]+\{y\}+3\{x\}=12,8\end{cases}$ și prin scădere rezultă $[x]-[y]=2\{x\}+18,8\Rightarrow 2\{x\}=0,2$ sau $2\{x\}=1,2\Rightarrow\{x\}=0,1$ sau $\{x\}=0,6\Rightarrow x=31,1, y=12,5$ sau $x=31,6, y=11.$

e) Sistemul este echivalent cu: $\begin{cases}2[x]+[y]+2\{x\}=5,3\\ [x]+[y]+\{y\}=4,2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2[x]+[y]=5\\ [x]+[y]=4\\ \{y\}=0,2,\{x\}=0,15\end{cases}$ și $\begin{cases}2[x]+[y]=4\\ [x]+[y]=4\end{cases}$ $\begin{matrix}\{y\}=0,2\\ 2\{x\}=1,3\Rightarrow\{x\}=0,65\end{matrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}2[x]+[y]=5\\ [x]+[y]=4\\ \{y\}=0,2,\{x\}=0,15\end{cases}$ sau $\begin{cases}2[x]+[y]=4\\ [x]+[y]=4\\ \{y\}=0,2,\{x\}=0,65\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}x=1,15\\ y=3,2\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=0,65\\ y=4,2\end{cases}.$

Dumitru Vieru, G.M.(S) nr. 10/2013

f) Sistemul se mai scrie:

$\begin{cases}[x]+[y]+\{y\}=4,2\\ 2[x]+[y]+2\{x\}=5,3\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}\{y\}=0,2\\ 2\{x\}=0,3\Rightarrow\{x\}=\dfrac{3}{20}\ \text{(I)}\end{matrix}$

sau $2\{x\}=1,3\Rightarrow\{x\}=0,65$ (II).

Scanned with OKEN Scanner

În cazul (I) rezultă $\begin{cases}[x]+[y]=4\\2[x]+[y]=5\end{cases} \Rightarrow [x]=1,[y]=3 \Rightarrow x=[x]+\{x\}=$
$=1+\frac{3}{20}=\frac{23}{20}, y=[y]+\{y\}=3+0{,}2=3{,}2.$

Cazul (II): $\{x\}=0{,}65$ și sistemul devine $\begin{cases}[x]+[y]=4\\2[x]+[y]=4\end{cases} \Rightarrow [x]=0,[y]=4$
$\Rightarrow x=[x]+\{x\}=0{,}65, y=[y]+\{y\}=4{,}2.$
$(x,y)\in\left\{\left(\frac{23}{20},3{,}2\right),(0{,}65,4{,}2)\right\}.$

O.L Dâmbovița, 2014

5*. Scăzând prima ecuație din a doua rezultă
$[x]y+x[y]-xy-[x][y]=z-[z]=\{z\}$
$[x]\{y\}-x\{y\}=\{z\} \Leftrightarrow \{y\}([x]-x)=\{z\} \Rightarrow -\{x\}\{y\}=\{z\} \Rightarrow \{z\}=0.$
a) $\{z\}=0$ și $\{x\}=0$ sau b) $\{z\}$ și $\{y\}=0$.

Din a) sistemul devine $\begin{cases}xy+x[y]=z\\xy+x[y]=z\end{cases}$, iar din b) sistemul devine
$\begin{cases}xy+y[x]=z\\xy+y[x]=z\end{cases}$. Ambele sisteme sunt compatibile nedeterminate, în sensul că oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$ rezultă 0 valoare a lui z depinzând de x și y.

Titu Andreescu, R.M.T., 1978

6. a)Evident $k=x-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k+\frac{1}{2},[x]=k,t=\frac{1}{2}.$
Din prima ecuație rezultă $[y]=-k^2$ și din a doua,
$\left(k+\frac{1}{2}\right)(-k^2)+k(-k^2+t)=-k^2+t-\frac{3}{2}=$
$=2k^3+\frac{k^2}{2}+\frac{3}{2}=t(1-k), 4k^3-k^2-3=2t(k-1)$
$(k-1)(4k^2+3k+3)=2t(k-1)\Rightarrow k=1, t\in[0,1).$
Așadar, $x=k+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ și $y=-1+t, y\in[-1,0).$

b)Evident $k=x-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k+\frac{1}{2},[x]=k.$ Din prima ecuație rezultă $[y]=-k^2\Rightarrow y=-k^2+t\in[0,1)$. Din a doua ecuație rezultă
$\left(k+\frac{1}{2}\right)(-k^2)+k(-k^2+t)=-k^2+t-\frac{1}{2}, t=\frac{k^2+1}{2(k+1)}\in[0,1)$
$\Rightarrow k\in\{0,1,2\}$. Pentru $k\in\{0,1\}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ și pentru $k=2\Rightarrow t=\frac{5}{6}.$
Pentru $k=0, x=k+\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, y_1=\frac{1}{2}$. Pentru $k=1\Rightarrow x_2=\frac{3}{2}$
$\Rightarrow y_2=-\frac{1}{2}$. Pentru $k=2\Rightarrow x_3=\frac{5}{2}\Rightarrow y_3=-k+\frac{5}{6}=-\frac{19}{6}.$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, avem perechile de soluții:
$x, y \in \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{19}{6}\right)\right\}$.

7. Considerăm $x = k + t, k \in \mathbb{Z}, t \in [0,1)$ și ecuația a doua devine $k + t - k^2 = 0{,}5, k + 1 > k + t = k^2 + 0{,}5 \Rightarrow k^2 - k - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \wedge \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0,1\}$. Pentru $k = 0, t = 0{,}5$ care nu verifică prima ecuație.
Pentru $k = 1 \Rightarrow t = 0{,}5 \Rightarrow x = 1{,}5$ care verifică și prima ecuație.

8. Sistemul se mai scrie $\begin{cases}\left[\frac{2x+1}{4} + 3\right] = x \\ \left[\frac{3x-1}{2} - 3\right] = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\frac{2x+13}{4}\right] = x \\ \left[\frac{3x-7}{2}\right] = y\end{cases}$
de unde rezultă că $x, y \in \mathbb{Z}$.
Din ecuația întâi rezultă $\frac{2x+13}{4} - 1 < x \leq \frac{2x+13}{4} \Rightarrow x \in \left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right] \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \{5,6\}$. Din ecuația a doua, pentru $x = 5$ rezultă $y = 4$ și pentru $x = 6$ rezultă $y = 5$.

9. Evident $x, y \in \mathbb{Z}$.
Sistemul este echivalent cu $\begin{cases}\left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y+1}{2}\right] = x + 1 \\ \left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y+1}{2}\right] = y + 1\end{cases}$
$\Rightarrow x = y$. Așadar, este echivalent cu ecuația $\left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y+1}{2}\right] = x + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y+1}{2} - x - 1\right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{3x+1}{2}\right] = 1, 1 \leq \frac{3x+1}{2} < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1$ și $x \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, sistemul nu are soluție.

10*. Evident $y \in \mathbb{Z}$ și sistemul devine $\begin{cases}[x] + y = 6 \\ [x[x]] = 6 - [x]\end{cases}$
Dar ecuația $[x[x]] = 6 - [x]$ are soluțiile $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \cup \{-3\}$.
Pentru $x = -3 \Rightarrow y = 9$. Pentru $x \in \left[2, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 4$.
Așadar, perechile de soluții sunt $(x, y) \in \{(-3,9)\} \cup \left\{(x, 4), x \in \left[2, \frac{5}{2}\right)\right\}$.

Gh. Andrei

Scanned with OKEN Scanner

11*. Din prima ecuație rezultă $[x]+[y]=5$ și $\{y\}=\frac{1}{2}$, din a doua ecuație $\Rightarrow [x]+[y]=5$ și $\{x\}=\frac{1}{3}$. Prin urmare, $[x]+[y]=5$. Dacă notăm $k=[x]$ $\Rightarrow [y]=5-k$ deci $x=k+\frac{1}{3}, y=5-k+\frac{1}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Impunând ca soluțiile găsite să verifice ultima ecuație, rezultă $3k+1-11+2k=10\Rightarrow$ $\Rightarrow k=4\Rightarrow x=\frac{13}{3}, y=\frac{3}{2}$.

Gh. Andrei

12*. Deoarece $x^2\geq 0$ și $y^2\geq 0\Rightarrow [x^2],[y^2]\in\mathbb{N}$ și cum $[x^2]+[y^2]=1\Rightarrow$ $\Rightarrow [x^2]=0$ și $[y^2]=1$ sau $[x^2]=1$ și $[y^2]=0$.

a) Dacă $[x^2]=0$ și $[y^2]=1\Rightarrow 0\leq x^2<1$ și $1\leq y^2<2\Rightarrow$ $\Rightarrow 0\leq x^4<1$ și $1\leq y^4<4$, cum $[x^4]=0\Rightarrow [y^4]=2\Rightarrow 2\leq y^4<3\Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{2}\leq y^2<\sqrt{3}$.

Așadar, $x\in(-1,1)=A$ și $y\in(\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{3})\cup(-\sqrt[4]{2},-\sqrt[4]{3}]=B\Rightarrow$ $\Rightarrow (x,y)\in A\times B$.

b) În mod analog $(x,y)\in B\times A$.

Gh. Schneider

13*. Avem
$$\begin{cases} 5\leq\frac{x+y}{3}<6\Rightarrow 15\leq x+y<18 & (1)\\ 2\leq\frac{x-y}{3}<3\Rightarrow 6\leq x-y<9 & (2)\\ 6\leq\frac{xy}{9}<7\Rightarrow 54\leq xy<63 & (3)\end{cases}$$

$\frac{21}{2}\leq x<\frac{27}{2}, x\in\{11,12,13\}$.

Dacă $x=11$, din (3) rezultă $y=5$, care verifică și (1) și (2).

Dacă $x=12$, din (3) rezultă $y=5$, care verifică și condițiile (1), (2), (3).

Dacă $x=13$, nu există $y\in\mathbb{Z}$, care să verifice sistemul.

Așadar, soluțiile sunt $(x,y)\in\{(11,5),(12,5)\}$.

G.M. nr. 3/1941, G.M. nr. 10/2011

14. a) Evident $a=\frac{x+1}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=3a-1$,

$b=\frac{y-1}{3}\in\mathbb{Z}\Rightarrow y=3b+1$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$.

Vom considera cele patru situații:

$\alpha)$ $a=2p, b=2q, p,q\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=6p-1, y=6q+1$.

Introducând în sistem, rezultă $p=q$, deci $x=6p-1, y=6p+1$.

Introducând din nou în sistem, rezultă $p=0\Rightarrow x=-1, y=1$.

Scanned with OKEN Scanner

β) a și b impare, deci $a = 2p+1, b = 2q+1 \Rightarrow x = 6p+2$, $y = 6q+4$. Introducând în sistem, rezultă $p = q$, deci $x = 6p+2$, $y = 6p+4$. Introducând în sistem, rezultă $p = q = 0 \Rightarrow x = 2, y = 4$.
Cazurile a și b de parități diferite nu verifică.

G.M. nr. 1/1998

b) Notăm $\left[\frac{x+3}{2}\right] = a$ și $\left[\frac{y-1}{2}\right] = b \Rightarrow \frac{y-2}{3} = a, \frac{x+2}{3} = b \Rightarrow$
$\Rightarrow 3(a+b) = x+y$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Avem $\begin{matrix} a \le \frac{x+3}{2} < a+1 \\ b \le \frac{y-1}{2} < b+1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+b \le \frac{3(a+b)+2}{2} < a+b+2 \\ a+b \ge \frac{x+y+2}{2} < a+b+2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a+b) \le 3(a+b)+2 < 2(a+b)+4 \Rightarrow a+b \in \{-2, 0, \pm 1\}$.
Distingem situațiile:

I. $a+b = -2 \Leftrightarrow b = -a-2 \Rightarrow \frac{x+2}{3} = b = -a-2 \Rightarrow x = -3a-8$ și
cum $a \le \frac{x+3}{2} < a+1 \Rightarrow 2a \le -3a-5 < 2a+2 \Rightarrow a \in \left(-\frac{7}{5}, -1\right] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow x = -5, y = -1$;

II. $a+b = -1$ și analog rezultă $a \in \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$;

III. $a+b = 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right] \cap \mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow x = -2, y = 2$;

IV. $a+b = 1 \Rightarrow x = -3a+1$ și $a \le \frac{x+3}{2} < a+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a \le -3a+4 < 2a+2 \Rightarrow a \in \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.
Prin urmare, $(x, y) \in \{(-5, -1), (-2, 2)\}$.

Alina Țepeș, R.M.G. nr. 31

c) Notăm $\frac{3y+1}{4} = a \in \mathbb{Z}$ și din $2x+1 = b \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{b-1}{2}$,
$y = \frac{4a-1}{3}$ și înlocuind în sistem avem:

$$\begin{cases} \left[\frac{b-13}{4}\right] = a \\ \left[\frac{2a+1}{6}\right] = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a \le \frac{b-13}{4} < a+1 \\ b \le \frac{2a+1}{6} < b+1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{6b-1}{2} \le a \le \frac{b-13}{4} \Rightarrow b \le -1.$$

De asemenea avem $a \le \frac{b-13}{4} < a+1$ și $b \le \frac{2a+1}{6} < b+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{b-13}{4} < a+1 < \frac{6b+7}{2} \Rightarrow b > -\frac{27}{11}, b \in \left(-\frac{27}{11}, -1\right)$ și $b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \{-2,1\} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$. Dacă $x = -1 \Rightarrow y = -\frac{17}{3}$ care nu verifică ecuația a doua. Dacă $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{17}{3} \Rightarrow (x,y) \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{3}\right)$.

Laura Radu, R.M.G. nr. 34

d) Evident $\frac{y-3}{2}, \frac{x+3}{2} \in \mathbb{Z}$, deci obținem $y = 2m+3, x = 2n-3$ (1) și sistemul se mai scrie

$$\begin{cases} \left[\frac{2n-1}{3}\right] = m \\ \left[\frac{2m+4}{3}\right] = n \end{cases} \quad (2) \quad \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{2n-1}{3}\right] - m = 0 \\ \left[\frac{2m+4}{3}\right] - n = 0 \end{cases}.$$

Dacă $n = 3k$, atunci din prima ecuație rezultă $m = 2k-1$ și din a doua obținem $\left[\frac{k+2}{3}\right] = 2k \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = 0$ și $m = -1 \Rightarrow x = -3$ și $y = 1$.

Dacă $n = 3k+1$, atunci din prima ecuație rezultă $m = 2k$ și din a doua avem $\left[\frac{4k+4}{3}\right] = 3k+1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow n = 1$ și $m = 0 \Rightarrow$ din (1) avem $x = -1, y = 3$.

Dacă $n = 3k+2$, rezultă la fel $m = 2k+1 \Rightarrow m = 1$ și $n = 2 \Rightarrow x = 1$ și $y = 5$. Prin urmare, $(x,y) \in \{(-1,3), (-3,1), (1,5)\}$.

15. a) Rezolvând sistemul obținem:

$\{y\} = \frac{1}{7}, \{x\} = \frac{5}{7} \Rightarrow x = a + \frac{5}{7}, y = b + \frac{1}{7}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$.

b) Sistemul devine: $\begin{cases} [x] + [y] + \{x\} = 32{,}25 \\ [x] + [y] + \{y\} = 32{,}6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x\} = 0{,}25, \{y\} = 0{,}6$ și $[x] + [y] = 32$. Dacă $[x] = a, [y] = b$, cu $a + b = 32$; $(x,y) \in (a, 25; b, 6)$ $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $a + b = 32$.

c) Evident $x \notin \mathbb{Z}$ și nici $y \notin \mathbb{Z}$.

Se știe că $\{-a\} = 1 - \{a\} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ deci ecuația a doua devine: $(1-\{x\})^2 + (1-\{y\})^2 = 1$ de unde prin utilizarea primei ecuații se obține $\{x\} + \{y\} = 0{,}6$. Împreună cu prima ecuație rezultă $\{x\} = 0{,}4$ sau $\{x\} = 0{,}2 \Rightarrow \{y\} = 0{,}2$ și $\{y\} = 0{,}4$ de unde rezultă perechile de soluții $(p+0{,}4, q+0{,}2), (p+0{,}2, q+0{,}4)$ unde $p, q \in \mathbb{Z}$.

Bogdan Chiriac, „Revista Matematica" nr. 2/2014

16. a) Evident $x, y \in \mathbb{Z}^*$. Adunându-le membru cu membru rezultă

$\frac{x}{y} = \frac{3x-4y-2}{2} \Rightarrow x = \frac{4y^2+14}{3y-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 9x = \frac{31y^2+18y}{3y-2} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 12y + 14 + \frac{28}{3y-2} \Rightarrow \frac{28}{3y-2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{1,0,2,3,-4,10\}$.

Pentru $y \in \{0,1,-4,10\}$ rezultă $x \in \mathbb{Z}$ care nu verifică. Pentru $y = 2 \Rightarrow x =$ $= 5$, pentru $y = 3 \Rightarrow x = 6$. Perechile $(x, y) \in \{(5,2), (6,3)\}$ verifică sistemul.

b) Adunându-le, rezultă

$\frac{5x}{2y} = \frac{5x-8y-4}{2}, 5\frac{x}{y} = 5x - 8y - 4 \Rightarrow y|5x.$

Dacă $(x, y) = 1 \Rightarrow y|5 \Rightarrow y \in \{1,5\}$, unde $y = 1$ nu convine, deci fie $y = 5 \Rightarrow x = 11$. Dacă $x = y$ numere prime, atunci nu se verifică sistemul.

G.M. nr. 9/2009

c) Ecuația se mai scrie: $\frac{3x}{2y} - \left\{\frac{3x}{2y}\right\} = 2x - 5y + 1 \Rightarrow \frac{3x}{2y} - \frac{4y-x}{4} =$

$= 2x - 5y + 1 \Rightarrow 16y^2 - 4y + 6x = 7xy$ (1) $\Rightarrow xy$ este par,

dar cum x și y sunt numere prime, avem $x = 2$ sau $y = 2$. Dacă $x = 2$ din (1) devine $16y^2 - 18y + 12 = 0$ care nu are soluții reale. Dacă $y = 2$, din (1) devine $64 - 8 = 8x \Rightarrow x = 7$ care este număr prim. Deci, soluția problemei este $x = 7, y = 2$.

Ioan Bran, G.M. nr. 7-8/1993

17. Deoarece $[x] \geq 0, [y] \geq 0$ rezultă situațiile:

I) $[x] = 1$ II) $[x] = 0$

$[y] = 1$ $[y] = 3$

a) Dacă $x \in [1,2), y \in [1,2) \Rightarrow x^2 + y^2 < 8$, imposibil.

b) $[x] = 0 \Rightarrow x \in [0,1)$ și $y \in [3,4)$ și $x = [x] + \{x\}, y = [y] + \{y\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \{x\}$ și $y = 3 + \{y\}$ și ecuația a doua se scrie

$\{x\}^2 + (3 + \{y\})^2 = 12,5$ și cum $x + y \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x\} + \{y\} = 1$. Dacă $\{x\} = u$, $\{y\} = v$, atunci $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + (3+v)^2 = 12,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 - v \\ (1-v)^2 + (3+v)^2 = 12,5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}, v_2 = -\frac{5}{2} \notin [0,1)$ deci $u = \frac{1}{2}$ și $x = \frac{1}{2}, y = 3 + \frac{1}{2} = 3,5$.

18. a) Evident $x, y \in \mathbb{Z}$ și sistemul devine:

$$\begin{cases} \left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y-2}{3}\right] = x \\ \left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y+1}{3}\right] = y + 1 \end{cases} \quad (1) \Rightarrow \left[\frac{2y+1}{3}\right] - \left[\frac{2y-2}{3}\right] = y - x + 1.$$

Avem $\begin{cases} \frac{2y+1}{3} - 1 < \left[\frac{2y+1}{3}\right] \leq \frac{2y+1}{3} \\ \frac{2y-2}{3} < -\left[\frac{2y-2}{3}\right] < 1 - \frac{2y-2}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < y - x + 1 < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y - x + 1 = 1 \Rightarrow y = x$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $y = x$ sistemul devine $\left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2x-2}{3}\right] = x$ care nu are soluții. Sistemul nu are soluție.

b) Sistemul este echivalent cu $\begin{cases} \left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y-1}{3}\right] = x+2 \\ \left[\frac{3x+1}{2}\right] + \left[\frac{2y+1}{3}\right] = y+1 \end{cases}$ (1)

unde evident $x, y \in \mathbb{Z}$. Fie $x = a,\ y = b,\ a, b \in \mathbb{Z}$, atunci (1) devine:

$\begin{cases} \left[\frac{3a+1}{2}\right] + \left[\frac{2b-1}{3}\right] = a+2 \\ \left[\frac{3a+1}{2}\right] + \left[\frac{2b+1}{3}\right] = b+1 \end{cases}$ (2). Din (2) rezultă $\left[\frac{2b+1}{3}\right] - \left[\frac{2b-1}{3}\right] = b - a - 1$ (3).

Avem $\begin{matrix} \frac{2b+1}{3} - 1 < \left[\frac{2b+1}{3}\right] \leq \frac{2b+1}{3} \\ -\frac{2b-1}{3} < -\left[\frac{2b-1}{3}\right] \leq 1 - \frac{2b-1}{3} \end{matrix}$ (4)

$\Rightarrow \frac{2}{3} - 1 < b - a - 1 < 1 + \frac{2}{3}$ (5) $\Rightarrow b - a - 1 \in \{0,1\}$.

Cazul $b - a - 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$ (6) care înlocuit în (2) se obține:

$\begin{cases} \left[\frac{3a+1}{2}\right] + \left[\frac{2a+1}{3}\right] = a+2 \\ \left[\frac{3a+1}{2}\right] + \left[\frac{2a+3}{3}\right] = a+2 \end{cases}$ (7)

$\Rightarrow \left[\frac{2a+1}{3}\right] = \left[\frac{2a+3}{3}\right]$ (8). Vom considera $a \in \{3p, 3p+1, 3p+2\}$ și numai cazul $a = 3p+1$ convine, deci $b = 3p+2$. Introducând în (2) rezultă $p = 0 \Rightarrow a = x = 1, b = y = 2$. Cazul $b - a - 1 = 1 \Rightarrow b = a + 2$ și pentru cazurile $a \in \{3p, 3p+1, 3p+2\}$ nu rezultă nicio valoare a lui $p \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, singura soluție este $x = 1, y = 2$.

c) Notăm $\frac{3x+2}{4} = a \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{4a-2}{3}$ și $\frac{-3y-4}{3} = b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{3b+4}{-3} = -b - \frac{4}{3}$. Sistemul devine:

$\begin{cases} \left[\frac{8a-1}{9}\right] = b \\ \left[\frac{-12b-7}{15}\right] = a \end{cases}$ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8a - 10 < 9b \leq 8a - 1 \\ -12b - 22 < 15a \leq -12b - 7 \end{cases}$

de unde rezultă $a = 0, b = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.

20**. Avem $2[x][y] \leq 2[x]y = x + [y] < [x] + [y] + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2[x] - 1)(2y - 1) < 3$. Dacă $[x] = 0 \Rightarrow 0 = x + [y] \Rightarrow x = y = 0$.
Analog dacă $[y] = 0$. Dacă $[x], [y] \geq 1 \Rightarrow 2[x] - 1, 2[y] - 1$ sunt numere impare (cu produsul mai mic decât 3) $\Rightarrow [x] = [y] = 1$ sau $[x] = 1, [y] = 2$ sau $[x] = 2, [y] = 1$.
Din primul caz rezultă $2x = 1 + y, 2y = x + 1 \Rightarrow x = y = 1$.
În al doilea caz avem: $4x = 1 + y, 2y = x + 2 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$, fals.
În al treilea caz nu există soluții. Prin urmare, $S = \{(0,0), (1,1)\}$.

Alexandru Blaga, G.M. nr. 2/2012

21. Dacă notăm $[2x] = a, [4y] = b, a, b \in \mathbb{N}$ rezultă $x = \frac{5b - 5a - 18}{14}$,
$y = \frac{90 - 3a - 11b}{14}$. Din $x \in \left[\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right], y \in \left[\frac{b}{4}, \frac{b+1}{4}\right]$ deducem că

$$\begin{matrix} 18 \leq 5b - 12a < 25 \\ 173 < 6a + 29b \leq 180 \end{matrix} \Rightarrow b = 6, a = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}.$$

Concursul „Theodor Topan", 2011

22. Evident $x - \frac{1}{2} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k + \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = k$. Din ecuația întâi rezultă $k^2 + k + [y] = k \Rightarrow [y] = -k^2$ și din ecuația a doua rezultă
$\left(k + \frac{1}{2}\right)(-k^2) + yk = y - \frac{3}{2} \Rightarrow y(k-1) = k^3 + \frac{k^2}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2k^3 + k^2 - 3}{2} =$
$= \frac{(k-1)(2k^2 + 3k + 3)}{2}$. Pentru $k \neq 1 \Rightarrow y_k = \frac{2k^2 + 3k + 3}{2}$.
Prin urmare, soluțiile sunt $(x_k, y_k) = \left(\frac{2k+1}{2}, \frac{2k^2 + 3k + 3}{2}\right)$, unde
$k \in \mathbb{Z} - \{1\}$ care nu convin deoarece $y_k = \frac{2k^2 + 3k + 3}{2} > 0$. Pentru $k = 1$
$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow [x] = 1, [y] = -1$.
Din ecuația a doua rezultă $-\frac{3}{2} + y - 1 = y - \frac{3}{2} \Rightarrow y \in [-1,0)$
deci soluțiile sunt: $\left(\frac{3}{2}, y\right)$, cu $y \in [-1,0)$.

Dan Popescu, G.M. nr. 2/1983

Scanned with OKEN Scanner

23**. Adunând cele două ecuații rezultă $x - y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = y + 2\sqrt{2}$.
Prima ecuație devine $[y + 2\sqrt{2}] - y + [y] + \sqrt{2}$. Notând $[y] = k \in \mathbb{Z}$ egalitatea devine:
$[y + 2\sqrt{2}] = \{y\} + \sqrt{2} = y - k + \sqrt{2} = s \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = s + k - \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow s \leq y + 2\sqrt{2} < s + 1 \Rightarrow s \leq s + k + \sqrt{2} < s + 1 \Leftrightarrow 0 \leq k + \sqrt{2} < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = -1 \Rightarrow y \in [-1,0) \Rightarrow -1 \leq s - 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow s = 2.$
În final $y = s + k - \sqrt{2} = 2 - 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = y + 2\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x, y) \in (1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$.

Concursul „Gazetei de Matematică", 2006

24. Rezultă că $x, y \notin \mathbb{Z}$, dar cum $\{x\} + \{-x\} = 1$ dacă $x \notin \mathbb{Z}$, atunci sistemul devine: $\begin{cases} \{x\}^2 + \{y\}^2 = \frac{1}{4} \\ (1 - \{x\})^2 + (1 - \{y\}^2)^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$

Cu notația $u = \{x\}, v = \{y\} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \\ u + v = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (u, v) \in \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in \left\{\left(k, k + \frac{1}{2}\right), \left(k + \frac{1}{2}, k\right)\right\}, k \in \mathbb{Z}.$

Cătălin Cristea, G.M. nr. 7/2005

25. Cum $\{-b\} = 1 - \{b\}, \forall\, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, se constată imediat că $\{x\} \neq 0$ sau $\{y\} \neq 0$, pentru că altfel se obține contradicție. Sistemul devine:
$\begin{cases} \{x\}^2 + \{y\}^2 = 0{,}2 \\ (1 - \{x\})^2 + (1 - \{y\})^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x\}^2 + \{y\}^2 = 0{,}2 \\ \{x\} + \{y\} = 0{,}6 \end{cases}$ de unde rezultă
$\{x\} = 0{,}4$ sau $\{x\} = 0{,}2 \Rightarrow \begin{cases} \{x\} = 0{,}4 \\ \{y\} = 0{,}2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \{x\} = 0{,}2 \\ \{y\} = 0{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = p + 0{,}4 \\ y = q + 0{,}2 \end{cases}$ sau
$\begin{cases} x = p + 0{,}2 \\ y = q + 0{,}4 \end{cases}$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$.

Bogdan Chiriac, Rev. Mat., 2014

26. Observăm că dacă facem soluția $x \to y$ din ecuația întâi rezultă ecuația a doua și reciproc. Considerăm cazurile:
I. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$ și $[x] \geq 0$ și atunci sistemul devine:
$\begin{cases} [x] = |[y]| \\ [x] = [|y|] \end{cases} \Rightarrow |[y]| = [|y|]$ de unde rezultă $y \in \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{Z}$
(vezi capitolul Mulțimi sau Ecuații).
Așadar, $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}_+\}$.

Scanned with OKEN Scanner

II. $x<0 \Rightarrow |x|=-x$ și $[x]<0$ și atunci sistemul devine:
$\begin{cases}[-x]=|[y]| \\ -[x]=[|y|]\end{cases}$ (*).
Apar două noi cazuri: a) $x\in\mathbb{Z}_- \Rightarrow y\in\mathbb{R}_+\cup\mathbb{Z}$ și cazul b) $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}, x<0$, atunci din sistem rezultă $\begin{cases}[-x]=|[y]| \\ -[x]=[|y|]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1-[x]=|[y]| \\ -[x]=[|y|]\end{cases}\Rightarrow$
$\Rightarrow [|y|]-|[y]|=1$ care nu poate avea loc. Așadar, în cazul $x<0$ rezultă perechile de soluții $\{(x,y)|x\in\mathbb{Z}_-, y\in\mathbb{R}_+\cup\mathbb{Z}\}, \{(x,y)|x\in\mathbb{R}_+\cup\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}_-\}$.
27. Utilizând proprietatea $[x]=|x|\Leftrightarrow x\in\mathbb{N}$ (deoarece $[x]\le x\le|x|\Rightarrow$
$\Rightarrow x=|x|\Rightarrow x\ge 0$ și din $[x]=x\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$, deci $x\in\mathbb{N}$).
Avem $2=[x]+[y]\le x+y\le|x+y|=|x-1+y+1|\le|x-1|+$
$+|y+1|=2$, deci rezultă $2=[x+y]=|x+y|\Rightarrow x+y\in\mathbb{N}$ și din
$|x-1+y+1|=|x-1|+|y+1|=2\Leftrightarrow(x-1)(y+1)\ge 0$ (1).
De asemenea, rezultă că $[x]=x$ și $[y]=y$ deci din (1) rezultă
$(x-1)(3-x)\ge 0\Rightarrow(x-1)(x-3)\le 0, x\in\{1,2,3\}$.
Pentru $x=1\Rightarrow y=1$, pentru $x=2, y=0$, pentru $x=3, y=-1$. Deci,
$(x,y)\in\{(1,1),(2,0),(3,-1)\}$.
Observație: $[x+y]=[x]+[y]$ dacă și numai dacă $x,y\in\mathbb{Z}$ sau $\{x\}+\{y\}<1$.
28. Evident $x\ge 1, y\ge 0$. Notăm $\left[\sqrt{y-1}\right]=m\in\mathbb{N}\Rightarrow x=m^2+1\Rightarrow$
$\Rightarrow\sqrt{x}=\sqrt{m^2+1}$ (1) și $m\le\sqrt{y-1}<m+1$ sau
$m^2+1\le y<(m+1)^2++1$ (2).
Utilizând (1) și (2) vom calcula $\left[\sqrt{y+2\sqrt{x}}\right]$. Avem $(m+1)^2<m^2+1+$
$+2\sqrt{m^2+1}\le y+2\sqrt{x}<(m+1)^2+1+2\sqrt{m^2+1}<(m+2)^2\Rightarrow$
$\Rightarrow m+1<\sqrt{y+2\sqrt{x}}<m+2\Rightarrow\left[\sqrt{y+2\sqrt{x}}\right]=m+1\Rightarrow y=2m+3$.
Dar din (2) rezultă $m^2+1\le 2m+3<(m+1)^2+1\Rightarrow m=2$ deci $x=5$, $y=7$.

„Matematica v scole", 1985

29. Evident $x,y\in\mathbb{R}^*$. Adunându-le membru cu membru rezultă
$\frac{x}{y}=\frac{3x-4y-2}{2}$ (1) $\Rightarrow x(3y-2)=4y^2+2y$ (2) (pentru $y=\frac{3}{2}$ nu satisface (2)) și pentru $y\in\mathbb{R}^*-\left\{\frac{3}{2}\right\}\Rightarrow x=\frac{4y^2+2y}{3y-2}$ (3).
Introducând în prima ecuație rezultă $\left[\frac{4y+2}{3y-2}\right]=\frac{y^2+y+2}{3y-2}$ (4).

Introducând (1) în ecuația a doua rezultă o identitate, și prin urmare ne ocupăm de (4). Avem

$$\frac{y^2+y+2}{3y-2} \le \frac{4y+2}{3y-2} < \frac{y^2+y+2}{3y-2}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2-3y}{3y-2} \le 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty,0] \cup \left(\frac{2}{3},3\right] \\ \frac{y^2-2}{3y-2} > 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\sqrt{2},\frac{2}{3}\right] \cup (\sqrt{2},\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y \in (-\sqrt{2},0] \cup [\sqrt{2},3]$. Dar cum funcția $f(y)=\frac{4y+2}{3y-2}$ este strict descrescătoare rezultă că $f(y) \in [-1,2-\sqrt{2}) \cup [2,2+\sqrt{2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow [f(y)] \in \{-1,0,2,3\}$. Utilizând (4) rezultă:

a) Dacă $[f(y)]=0 \Rightarrow \frac{y^2+y+2}{3y-2}=0$, imposibil.

b) Dacă $[f(y)]=-1 \Rightarrow \frac{y^2+y+2}{3y-2}=-1 \Rightarrow y \in \{0,-4\}$,

dar $y \neq 0$ și pentru $y=-4$ din (3) rezultă $x=-4$, care nu verifică sistemul.

c) Dacă $[f(y)]=2 \Rightarrow \frac{y^2+y+2}{3y-2}=2 \Rightarrow y \in \{2,3\}$. Pentru $y=2$ din (3) rezultă $x=5$ și pentru $y=3 \Rightarrow x=6$, care verifică sistemul.

d) Dacă $[f(y)]=3 \Rightarrow \frac{y^2+y+2}{3y-2}=3 \Rightarrow y^2-8y+8=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y \in \{4 \pm 2\sqrt{2}\}$. Din (3) rezultă $x=\frac{4(8y-8)+2y}{3y-2}=\frac{34y-32}{3y-2}$.

Pentru $y=4+2\sqrt{2} \Rightarrow x=8+2\sqrt{2}$ și pentru $y=4-2\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x=8-2\sqrt{2}$, de unde rezultă $\frac{x}{y} \in \{3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\} \Rightarrow \left[\frac{x}{y}\right] \in \{1,4\}$;

perechile $(x,y) \in \{(8+2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}),(8-2\sqrt{2},4-2\sqrt{2})\}$ nu verifică prima ecuație.

Singurele soluții sunt $(x,y) \in \{(5,2),(6,5)\}$.

30*. a) Fie $x=a+\alpha, y=b+\beta$, unde $a,b \in \mathbb{Z}, \alpha,\beta \in [0,1)$. Din ultima relație rezultă $\alpha+\beta \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha+\beta=1 \Rightarrow \beta=1-\alpha$. A doua ecuație se mai scrie: $(a+\alpha)^2+(b+1-\alpha)^2=12{,}5 \Rightarrow a^2+b^2+2\alpha(a-b)+2b+\alpha^2+$
$+(1-\alpha)^2=12{,}5$ $(*)$. Rezultă că $\alpha^2+(1-\alpha)^2=\frac{k}{2}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\alpha^2-4\alpha+1-k=0 \Rightarrow (2\alpha-1)^2 \equiv k-1$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $k \geq 2 \Rightarrow \alpha \notin [0,1) \Rightarrow k = 1$ și $\alpha = \frac{1}{2}$.

Relația (*) devine $a^2 + b^2 + a + b = 12$ și $2a + b = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0, b = 3 \Rightarrow x = a + \alpha = \frac{1}{2}, y = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

b) Fie $x = [x] + \{x\} = m + t$ și $y = [y] + \{y\} = n + \alpha$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$ și $t \in [0,1)$, dar deoarece $x - y \in \mathbb{Z}$ rezultă $t = \alpha$, deci $x = m + t$ și $y = n + t$. Din ecuația întâi rezultă $m^2 + n^2 = 4$

$\Rightarrow m, n \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$ (1). Observăm că x și y nu pot fi simultan întregi. Ecuația a doua se scrie: $(m + t)^2 + (n + t)^2 = 2{,}5 \Rightarrow m^2 + n^2 +$

$+2t(m + 1) + 2t^2 = 2{,}5$ (2).

Apar situațiile: I) $m = \pm 2 \Rightarrow n = 0$ și ecuația (2) devine:

$2t^2 \pm 4t + 4 - 2{,}5 = 0, 2t^2 \pm 4t + 1{,}5 = 0, t_{1,2} = \frac{\pm 2 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow t \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Pentru $m = 2 \Rightarrow t \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ care nu convin.

Pentru $m = -2 \Rightarrow t \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 + \frac{1}{2}$ și $y = 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$x = -\frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$,

deci cauza simetriei sistemului rezultă și soluția $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$.

II) Dacă $m = \pm 1 \Rightarrow n = \pm 2, n \notin \mathbb{Z}$ sau $m = 0 \Rightarrow n = \pm 2$ și se obține situația (I). Așadar, soluțiile sistemului sunt: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Iuliana Coravu

31.** Se disting cazurile:

I) $\{x\}, \{y\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ și atunci sistemul devine:

$\begin{cases} x + \{y\} = 6{,}5 \\ y + \{x\} = 2{,}1 \end{cases}$ și prin scădere termen cu termen $\Rightarrow [x] - [y] = 4{,}4$, fals.

II) $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ și $\{y\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - \{y\} = 6{,}5 \\ y + \{x\} = 2{,}1 \end{cases}$ și prin adunare termen cu termen rezultă $[x] + [y] + 2\{x\} = 7{,}6$, atunci avem $\{x\} = 0{,}3,\ y = 1{,}8,\ x = 6{,}3$.

III) $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ și $\{y\} \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + \{y\} = 6{,}5 \\ y + 1 - \{x\} = 2{,}1 \end{cases}$ și prin adunare rezultă $[x] + [y] + 2\{y\} = 7{,}6 \Rightarrow \{y\} = 0{,}3, x = 6{,}2$, în contradicție cu $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$, deci nu avem soluții.

Scanned with OKEN Scanner

IV) $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ și $\{y\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - \{y\} = 6{,}5 \\ y + 1 - \{x\} = 2{,}1 \end{cases}$ și prin adunare rezultă $[x] + [y] = 6{,}6$, fals. Așadar, soluția sistemului este: $x = 6{,}3$; $y = 1{,}8$.

O.L. Argeș, 2015, Concurs Ucraina, 2013

32***. Presupunem $m \geq n \Rightarrow x > 1, y > 1$.
Cazul $n = 1 \Rightarrow x^m = [x] + m + 1$ (1).
α) Dacă $m = 1$, sistemul nu are soluție.
β) Dacă $m = 2$, ecuația (1) devine $3 + [x] = x^2 \geq [x]^2 \Rightarrow [x] \in \{1,2\}$.
Analizând, rezultă soluția: $(\sqrt{5}, 3) = S_1$.
γ) Dacă $m \geq 3$, atunci ecuația (1) nu are soluție pentru $[x] \geq 2$.
Într-adevăr, dacă $[x] \geq 2$ și din $2^{m-1} > m$, avem $m + 1 = x^m - [x] \geq$
$\geq [x]^m - [x] = [x]([x]^{m-1} - 1) \geq 2(m - 1) \geq m + 1$, deci ecuația nu are soluție. Cazul $[x] = 1 \Rightarrow x \in (\sqrt[m]{m+2}, m) = S_2$. Cazul $n \geq 2$. Adunând cele două ecuații rezultă: $(x^m - [x]) + (y^n - [y]) = m + n$ (2). Dacă $m \geq 3$ și $[x], [y] \geq 2$, analog ca în cazul γ) demonstrăm că $x^m - [x] \geq m$ și $y^n - [y] \geq n$, deci ecuația (2) nu are soluții. Analizând cele două cazuri, găsim:

a) Dacă $m = n = 2$, atunci soluțiile sunt: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (2,2)$.
b) Dacă $m \geq 3, n \geq 2$, atunci soluția este: $(\sqrt[m]{m+1}, \sqrt[n]{n+1})$.

Considerăm situațiile:
Dacă $m = n = 1$, atunci $S = \emptyset$. Dacă $n = 1, m = 2$, atunci $S = \{(\sqrt{5}, 3)\}$.
Dacă $n = 1, m \geq 3$, atunci $S = \{(\sqrt[m]{m+2}, 2)\}$. Dacă $n = 2, m = 2$, atunci $S = \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (2,2)\}$. Dacă $n \geq 2, m \geq 3$, atunci $S = \{(\sqrt[m]{m+1}, \sqrt[n]{n+1})\}$.

Marius Gherga, G.M. nr. 2/2005

33**. Din sistem rezultă $2x, 2y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\}, \{y\} \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.
Considerăm cazurile:

a) $\{x\} = \{y\} = 0$; $\begin{cases} x + 2y = a \\ y + 2x = b \end{cases}$
b) $\{x\} = \frac{1}{2}, \{y\} = 0$; $\begin{cases} [x] + 2[y] = a \\ [y] + 2[x] + 1 = b \end{cases}$
c) $\{x\} = 0, \{y\} = \frac{1}{2}$; $\begin{cases} [x] + 2[y] + 1 = a \\ [y] + 2[x] = b \end{cases}$
d) $\{x\} = \{y\} = \frac{1}{2}$. $\begin{cases} [x] + 2[y] + 1 = a \\ [y] + 2[x] + 1 = b \end{cases}$

Din cele patru situații rezultă: din a) $a + b \vdots 3$; din b), c) $(a + b - 1) \vdots 3$ și din d) $(a + b - 2) \vdots 3$. În cazul $(a + b - 1) \vdots 3$, cele două sisteme au

Scanned with OKEN Scanner

soluție, în celelalte cazuri avem o singură soluție (deoarece din cele trei numere consecutive $a+b, a+b-1, a+b-2$ numai unul dintre ele este divizibil cu 3).

§ 3.

34.** a) Se scade ecuația a treia din suma primelor două ecuații și rezultă $\{x\}+[y]=0 \Rightarrow \{x\}=0, [y]=0$ (3). Utilizând (3) în prima ecuație, rezultă: $[x]+\{z\}=1{,}1 \Rightarrow [x]=1, \{z\}=0{,}1$ (4). Utilizând (4) în ecuația a doua, rezultă: $y+[z]=2{,}2 \Rightarrow \{y\}+[z]=2{,}2 \Rightarrow [z]=2, \{y\}=0{,}2$ (5). Din (3), (4) și (5) rezultă $x=1, y=0{,}2, z=2{,}1$.

Titu Andreescu, R.M.T., 1981

b) Adunând toate ecuațiile rezultă $x+y+z=7{,}02$. Adunând două câte două ecuațiile din sistem rezultă:

$$\begin{cases}[z]+\{x\}=3{,}27\\ [x]+\{y\}=1{,}33\\ [y]+\{z\}=2{,}42\end{cases} \Rightarrow [z]=3, [x]=1, [y]=2, \{x\}=0{,}27, \{y\}=0{,}33$$

$\Rightarrow \{z\}=0{,}42 \Rightarrow x=1{,}27, y=2{,}33, z=3{,}42.$

Mihaly Bencze, Octogon

c) Adunând cele trei ecuații rezultă

$2(x+y+z)=14{,}4 \Rightarrow x+y+z=7{,}2$. Din ecuația întâi avem:

$x+y-\{y\}+z-[z]=3{,}8 \Rightarrow [z]+\{y\}=7{,}2-3{,}8=3{,}4.$

Din ecuația a doua rezultă: $x+z-\{z\}+x-[x]=5{,}7 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x]+\{z\}=1{,}5$ și din ecuația a treia avem: $\{x\}+[y]=2{,}3$.

De unde rezultă $[x]=1, [y]=2, [z]=3$ și $\{x\}=0{,}3, \{y\}=0{,}4,$

$\{z\}=0{,}5 \Rightarrow (x, y, z)=(1{,}3; 2{,}4; 3{,}5)$.

35.** Adunând cele trei ecuații rezultă: $[x]+[y]+[x]=81$.

Adunând două câte două ecuațiile din sistem, se obține:

$$\begin{cases}y-\{z\}=27\\ z-\{x\}=27\\ x-\{y\}=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[y]+\{y\}-\{z\}=27\\ [z]+\{z\}-\{x\}=27\\ [x]+\{x\}-\{y\}=27\end{cases}$$ de unde rezultă

$[x]=[y]=[z]=27$ și $\{x\}=\{y\}+\{z\}=0 \Rightarrow x=y=z=27.$

Octogon V. 24/2016

36.** Adunând ecuațiile două câte două, obținem:

$$\begin{cases}x^2+[y]^2+\{z\}^2=0{,}9\\ y^2+[z]^2+\{x\}^2=0{,}1\\ z^2+[x]^2+\{y\}^2=0{,}82\end{cases}.$$

Din prima ecuație rezultă $[y]^2<1 \Rightarrow [y]=0$.

Analog rezultă $[x]=0, [z]=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul dat devine: $\begin{cases} z^2 = 0{,}81 \\ x^2 = 0{,}09 \\ y^2 = 0{,}01 \end{cases}$, dar cum $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0{,}3, y = 0{,}1, z = 0{,}9.$

Marin Chirciu, R.M.T. nr. 4/2016

37*.** Sistemul se mai scrie: $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = a + \dfrac{1}{10} \\ y + [z] + \{x\} = a + \dfrac{2}{10} \\ z + [x] + \{y\} = a + \dfrac{3}{10} \end{cases}$.

Adunând membru cu membru, rezultă: $2(x + y + z) = 3a + \dfrac{6}{10}$

$\Rightarrow x + y + z = \dfrac{3a}{2} + \dfrac{3}{10}$ (1).

Din primele două ecuații, ținând seama de (1) $\Rightarrow x + y + z + [y] + \{x\} =$

$= 2a + \dfrac{3}{10} \Rightarrow [y] + \{x\} = \dfrac{a}{2}$ (2). La fel din ultimele două ecuații, ținând

seama de (1) $\Rightarrow x + y + z + [z] + \{y\} = 2a + \dfrac{5}{10} \Rightarrow$

$[z] + \{y\} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{10}$ (3).

În mod analog rezultă: $[x] + \{y\} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{10}$ (4).

Obținem sistemul $\begin{cases} [y] + \{x\} = \dfrac{a}{2} \\ [z] + \{y\} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{10} \\ [x] + \{z\} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{10} \end{cases}$ și considerând cele două situații

cu a par, respectiv impar, obținem: $x = \dfrac{a}{2}, y = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{10}, z = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{10}$.

Concurs Lituania, 2010

38*.** Notăm $x = [x] + \{x\} = a + \alpha$, $y = [y] + \{y\} = b + \beta$,

$z = [z] + \{z\} = c + \gamma$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1)$ și sistemul devine:

$\begin{cases} 2a + 2\alpha - b + \gamma = 3{,}7 \\ b + \beta - 2c - \alpha = -5{,}1 \\ 2c + 2\gamma - a - \beta = 4 \end{cases}$ (*).

Adunând termen cu termen se obține: $a + \alpha + 3\gamma = 2{,}6$ (1) și adunând numai ecuația a doua și a treia din (*) rezultă: $b - a + 2\gamma - \alpha = -1{,}1$ (2).

Scanned with OKEN Scanner

Introducând α și (1) în (2) rezultă $b+5\gamma=1,5$ (3). Din (3) rezultă următoarele situații:

1) $b=0,\gamma=0,3$;
2) $b=1,\gamma=0,1$;
3) $b=-1,\gamma=0,3$;
4) $b=-2,\gamma=0,7$;
5) $b=-3,\gamma=0,9$.

1) $b=0,\gamma=0,3$, atunci din prima ecuație $(*)$ rezultă: $a+\alpha=1,7\Rightarrow$ $\Rightarrow a=1,\alpha=0,7$ și din ecuația a doua din $(*)$ rezultă: $2c-\beta=4,4$ care nu are soluție;

2) $b=1,\gamma=0,1\Rightarrow a+\alpha=2,3\Rightarrow a=2,\alpha=0,3\Rightarrow 2c-\beta=5,8\Rightarrow$ $\Rightarrow c=3,\beta=0,2$ și $b=1,\gamma=0,1\Rightarrow x=2,3,y=1,2,z=3,1$;

3) $b=-1,\gamma=0,5$ și din prima ecuație din $(*)\Rightarrow a+\alpha=1,1\Rightarrow$ $\Rightarrow a=1,\alpha=0,1$ și din $2c-\beta=4\Rightarrow c=2,\beta=0\Rightarrow x=1,1,y=-1,$ $z=2,5$;

4) $b=-2,\gamma=0,7\Rightarrow a+\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow a=0,\alpha=0,5$ și din a treia ecuație și din$(*)$ rezultă: $2c-\beta=2,6$ care nu are soluție;

5) $b=-3,\gamma=0,9\Rightarrow a+\alpha=-0,1\Rightarrow a=-1,\alpha=0,9$, deci $2c-\beta=1,2\Rightarrow c=1,\beta=0,8\Rightarrow x=-0,1,y=-2,2,z=1,9$. Prin urmare, următoarele triplete sunt soluții:
$(2,3;1,2;3,1);(1,1;-1;2,5);(-0,1;-2,2;1,9)$.

39*.** a) Notăm $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(t)=t^2+t+\frac{1}{2},g(t)=-t^2-t+\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \text{Im}f=\left[\frac{1}{4},\infty\right),\text{Im}g=\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$ deci $f(t)\geq\frac{1}{4}\Rightarrow[f(t)]\geq 0,\forall\, t\in\mathbb{R}$ (1)

$g(t)\leq\frac{3}{4}\Rightarrow[g(t)]\leq 0,\forall\, t\in\mathbb{R}$ (2). Sistemul se mai scrie:

$\begin{cases}[f(x)]=[g(y)]\\ [f(y)]=[g(z)]\\ [f(z)]=[g(x)]\end{cases}$ și din (1) și (2) rezultă că egalitățile din sistem se realizează numai dacă sunt egale cu zero. Din prima ecuație rezultă

$0\leq f(x)<1\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right),0\leq g(y)<1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\in\left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

Din a doua ecuație $\Rightarrow y \in \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right), z \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Din a treia ecuație $\Rightarrow z \in \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right), x \in \left[\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Prin urmare, toate părțile întregi sunt nule dacă

$x, y, z \in \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) În mod analog, dacă $f(t) = -2t^2 - t + 1, g(t) = t^2 - t + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(t) \leq \frac{9}{8} \\ g(t) \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow [f(t)] \leq 1 \text{ și } [g(t)] \geq 0.$$

Sistemul se mai scrie: $\begin{cases} [f(x)] = [g(y)] \\ [f(y)] = [g(z)]. \\ [f(z)] = [g(x)] \end{cases}$

Fiecare dintre cele trei ecuații poate să ia o valoare 0 sau 1. Apar trei situații:

I. Pentru prima ecuație avem:

$$[f(x)] = [g(y)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ y \in (0,1) \end{cases} \text{ sau}$$

$$[f(x)] = [g(y)] = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ y \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \end{cases}.$$

II. Pentru a doua ecuație avem:

$$[f(y)] = [g(z)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ z \in (0,1) \end{cases}$$

$$[f(y)] = [g(z)] = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ z \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \end{cases}.$$

III. Pentru a treia ecuație avem:

$$[f(z)] = [g(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x \in (0,1) \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$[f(z)] = [g(x)] = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} z \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \end{cases}.$$

De remarcat că sistemul are soluții fie când toate părțile întregi sunt nule, adică dacă $x, y, z \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, fie dacă toate părțile întregi sunt egale cu -1, adică dacă $x, y, z \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. În celelalte cazuri, de exemplu, când egalitatea la prima ecuație este 0 și la a doua este 1, iar la a treia 0 sau 1, sistemul nu are soluție.

Octogon V. 20 (2)/2012

40***. Notăm $x = [x] + \{x\} = a + \alpha,\ y = b + \beta,\ z = c + \gamma,$ unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1)$.

Prima ecuație devine $\alpha^2 + 2016\beta = 2018(c + \gamma) - \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha^2 + 2017\beta -$

$-2018\gamma + \frac{1}{4} = 2018c$ (1).

$2018c = \alpha^2 + 2017\beta - 2018\gamma + \frac{1}{4} < 2018 + \frac{1}{4} < 2019 \Rightarrow c < 1 \Rightarrow c \leq 0.$

Dacă $c \leq -1$, atunci din (1) rezultă $\alpha^2 + 2016\beta - 2018\gamma + \frac{1}{4} = -2018 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^2 + 2016\beta + 2018(1 - \gamma) + \frac{1}{4} = 0$, fals.

Prin urmare, $c = 0$. Din celelalte ecuații rezultă în mod analog că $a = b = 0$.

Sistemul devine: $\begin{cases} \alpha^2 + 2016\beta - 2018\gamma + \frac{1}{4} = 0 \\ \beta^2 + 2016\gamma - 2018\alpha + \frac{1}{4} = 0. \\ \gamma^2 + 2016\alpha - 2018\beta + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$

Presupunem că $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$. Scăzând ecuația a doua din prima, rezultă:

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2016(\beta - \gamma) - 2018(\alpha - \gamma) + \frac{1}{4} = 0$$

de unde rezultă că $\alpha = \beta = \gamma$. Din prima ecuație rezultă: $\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0,1)$. Prin urmare, $x = y = z = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mihaly Bencze, Octogon V. 24 (2)/2016

Scanned with OKEN Scanner

41***. Considerăm funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(t)=\dfrac{f(t)}{g(t)}=\dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$.

Se obține ușor că $\text{Im}f\left[\dfrac{1}{3},3\right]\Rightarrow[f(t)]=\{0,1,2,3\}\Rightarrow$
$g(x),g(y),g(z)\in\{0,1,2,3\}$, dar cum $g(t)\neq 0\Rightarrow$
$g(t)\in\{1,2,3\}\Leftrightarrow g(x),g(y),g(z)\in\{1,2,3\}$.

Dacă $g(y)\geq 1\Rightarrow\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]\geq 1\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 1\Rightarrow x\geq 0$. Analog $y\geq 0, z\geq 0$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că:
$[h(x)]=\max\{[h(x)],[h(y)],[h(z)]\}$. Se disting trei situații:

a) $[h(x)]=3\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=3\Leftrightarrow x=1$ și din sistem rezultă:
$g(y)=3\Leftrightarrow y^2-y+1=3\Rightarrow y\in\{-1,2\}\Rightarrow y=2\ \ (y\geq 0)$, deci din
$[h(y)]=g(z)\Rightarrow[h(y)]=\left[\dfrac{7}{3}\right]=2\Rightarrow g(z)=2\Rightarrow z^2-z+1=2\Rightarrow$
$\Rightarrow z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, atunci din $h(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2-z+1}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow$
$[h(z)]=\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=2\Rightarrow x^2-x+1=2$, contradicție cu $x=1$.

b) $[h(x)]=2\Rightarrow y^2-y+1=2\Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ \ (y\geq 0)$, deci
$\left[h\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]=2\Rightarrow z^2-z+1\Rightarrow z_0=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow[h(z_0)]=g(x)$, dar
$[h(z_0)]=2\Rightarrow x^2-x+1=2\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Așadar, $x=y=z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
soluție a sistemului.

c) $[h(x)]=1\Rightarrow[h(y)]=[h(z)]=1\ \ (*)=x^2-x+1=$
$=y^2-y+1=z^2-z+1=1$. Din $z^2-z+1\Rightarrow x\in\{0,1\}$.
Dar pentru $x=1\Rightarrow[h(1)]=3$, contradicție cu $(*)$.
Prin urmare, $x=y=z=0$ este cea de-a doua soluție.

Mihai Onucu Drîmbe, G.M. nr. 7-8/1986

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Dumitru Acu – *Aritmetica şi teoria numerelor*, Editura Universităţii „Lucian Blaga", 1999;
2. N. Agahanov, O. Padlipsky – *Olimpiade matematice ruseşti – Moscova 1993-2002*, Editura GIL, 2004;
3. Toma Albu, Ion D. Ion – *Complemente de algebră*, Editura Academiei, 1984;
4. Ştefan Alexe, Marin Chirciu – *Algebră clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, 2005;
5. Titu Andreescu, Marius Ghergu, Dinu Şerbănescu, Gabriel Popa, A. Zaharia, Gheorghe Andrei, I. Chesca, A. Ghioca, Lucian Dragomir – *Olimpiade de matematică*, Editura GIL, 2004;
6. Titu Andreescu, Cosmin Pohoaţa – *Editors Mathematical Reflections*, 2008-2013;
7. Titu Andreescu, Dorin Andrica – *360 de probleme de matematică pentru concursuri*, Editura GIL, 2002;
8. Titu Andreescu, Zuming Feng – *Mathematical Olimpiads*, 1998-1999;
9. Gheorghe Andrei – *Radicali*, Editura Ex Ponto, 2005;
10. Gheorghe Andrei – *Şiruri şi progresii*, Editura Paralela 45, 2002;
11. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea, Ion Cucurezeanu, Gheorghe Bordea – *Probleme de algebră pentru concursurile şi olimpiadele şcolare clasa a IX-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1993;
12. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea – *Probleme alese de matematică*, Editura GIL, 1999;
13. Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu, Constantin Caragea – *Probleme de algebră (Funcţiile partea întreagă, partea fracţionară)*, Editura GIL, 1996;
14. Marian Andronache, Nicolae Ghiciu, Ion Savu – *Algebra vol. I, clasa a IX-a*, Editura Aritmas, 2000;
15. Marius Andronache, Marcel Chiriţă, Teodor Dănel, Mircea Fianu, Vulpescu Jatea, D.M. Bătineţu-Giurgiu – *Buletin Matematic*, I.S. Bucureşti, 1990;
16. Marian Andronache, Marcel Ţena, Dinu Şerbănescu, Gheorghe Andrei, C. Chiteş, Valentin Vornicu – *Olimpiade de matematică clasele IX-X, 2003*, Editura GIL, 2004;

Scanned with OKEN Scanner

17. Valentin Baltag, Boris Chiric, Ion Goian, Valeriu Guțu, Mihaiu Izman – *Olimpiade de matematică R. Moldova 1987-2001*, Editura GIL, 2010;
18. D.M. Bătineţu-Giurgiu, Maria Bătineţu-Giurgiu, Augustin Semenescu – *Algebră clasa a IX-a*, Editura Matrix, Bucureşti, 2001;
19. D.M. Bătineţu-Giurgiu, N. Stanciu, G. Tica – *Din tainele numerelor Fibonnaci şi Lucas*, Editura Sitech, 2013;
20. D.M. Bătineţu-Giurgiu, M. Bătineţu-Giurgiu, I.V. Maftei, Augustin Semenescu, Ioan Tomescu, Flavia Vornicescu – *Olimpiade Naţionale de Matematică*, Editura Enciclopedică, 2004;
21. Mircea Becheanu, Bogdan Enescu – *Balcan Mathematical Olimpiads 1984-2006*, Editura GIL, 2007;
22. Mihaly Bencze, J.Z. Diaz Barero – *Mathematical contest Notebook – 2015*, Studis Publishing House, Iaşi, 2015;
23. Mihaly Bencze, Marius Drăgan – *600 selected Problems for Mathematical contest*, Studis Publishing House, Iaşi, 2017;
24. Cornel Berceanu, Gabriel Andrei, Marian Popa, Vasile Stoica – *Concursul interjudeţean de matematică „Gheorghe Vrânceanu" 2003-2014*, Editura GIL, 2004;
25. George Berzpenyi, Stephen B. Maurer – *The contest problem Book V-1997*, (AHSME, AIME, 1983-1988);
26. Peter Bogvedlenkov, Emil Kolov, Oleg Mushkarov, Nicolai Nicolev – *Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006*;
27. Iurie Boreico, Andrei Ciupan, Tudor Mica, Laszlö Szillard – *Olimpiade de matematică*, Editura GIL, 2006;
28. Iurie Boreico, Marius Pachiţariu, A. Ungureanu, A. Zahariuc – *Olimpiade de matematică – 2004 (clasele IX-X)*, Editura GIL, 2004;
29. Carmen Botea, Viorel Botea, Ion Nedelcu, Vasile Şerdean, Lucian Tuţescu – *Probleme de matematică pentru concursurile şcolare*, Editura Reprograph, 2010;
30. Dan Brânză, Ioan Şerdean, Vasile Şerdean – *Olimpiade Balcanice de matematică (juniori)*, Editura Plus, 2003;
31. Dan Brânzei, Gabriel Popa, Lucian Georges-Lădunca, Gh. Iurea, Cristian Lazăr etc. – *Pregătirea permanentă a olimpiadelor pentru matematică*, Editura Paralela 45, 2005;
32. Dan Brânzei, Dumitru Goleşteanu, Marian Ionescu, Marian Teler – *Matematica în concursurile şcolare*, Editura Paralela 45, 2008;

Scanned with OKEN Scanner

33. Marius Burtea, Georgeta Burtea – *Matematica clasa a IX-a*, Editura Carminis, 2006;
34. Dumitru Buşneag, Alex Dincă, Dumitru Ebâncă, Constantin P. Niculescu, Mariana Popescu, George Vraciu – *Concursul de matematică „Gh. Ţiţeica" 1979-1998*;
35. Dumitru Buşneag, I.V. Maftei – *Teme pentru concursurile de matematică şi concursurile şcolare*, Editura Scrisul românesc, 1983;
36. Igor L. Cemenov – *Ahte u Mahticca, Cbornik Zadab*, 2005;
37. Marcel Chiriţă, Daniel Grigorescu – *Funcţii – proprietăţi şi aplicaţii*, Editura Humanitas Educational, 2003;
38. Andrei Chiteş, Gabriel Dospinescu, Andrei Călin, Popa Gabriel Kreidler, Claudiu Raicu, A. Zaharia – *Probleme de matematică pentru pregătirea Olimpiadelor Naţionale*, Editura GIL, 2003;
39. Gabriela Constantinescu, Cătălin Zârnă şi colaboratorii – *Pas cu pas prin matematică, clasa a IX-a*, Editura Crizon, 2010;
40. Constantin Costara, Dumitru Popa – *Berkeley Preliminary Exams – culegere de probleme*, Editura Ex Ponto, 2000;
41. Vlad Crişan, Vlad Matei – *Probleme de matematică (lista scurtă) 2002-2014*, Editura GIL, 2015;
42. Ion Cucurezeanu – *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Tehnică, 1976;
43. Ion Cucurezeanu – *Ecuaţii în numere întregi*, Editura Aramis, 2006;
44. Adriana Dragomir, Lucian Dragomir, Ovidiu Bădescu, Ion Bîrchi – *Exerciţii şi probleme de matematică, clasa a IX-a*, Editura Bîrchi, 2006;
45. Mihai Onucu Drîmbe, Monica Drîmbe, Marius Ursărescu – *200 de ecuaţii funcţionale în* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, Editura GIL, 2003;
46. Mihai Onucu Drîmbe – *200 de identităţi şi inegalităţi*, Editura GIL, 2004;
47. Gh. Echstein, A. Blaga. C. Mortici, D. Bîrchi, M. Prajea, D. Şt. Marinescu, L. Dragomir – *Olimpiade şi concursurile de matematică (clasele IX-X), 2002*, Editura Bîrchi, 2005;
48. Arthur Engel – *Probleme de matematică – Strategii şi rezolvări* (Traducere Mihai Bălună), Editura GIL, 2006;
49. Mircea Ganga – *Probleme rezolvate din manualele de matematică – clasa a IX-a*, Editura Mathpress, 2008;
50. Mircea Ganga – *Teme şi probleme de matematică*, Editura Tehnică, 1991;

Scanned with OKEN Scanner

51. A.M. Iaglom, I.M. Iaglom – *Probleme neelementare tratate elementar* (Traducere din rusă), Editura Tehnică, 1976;
52. Gh. Iurea, Gabriel Popa, Vasile Nechita – *Concursuri Ieşene*, Editura GIL, 2006;
53. Amir Hossein Parvardi – *1220 Number Theory Problems*, 2012;
54. P. Radovici-Mărculescu – *Probleme de teoria elementară a numerelor*, Editura Tehnică, 1986;
55. Cristinel Mortici – *Probleme pregătitoare pentru concursurile de matematică*, Editura GIL, 1999;
56. Cristinel Mortici – *Bazele matematicii. Teme şi probleme*, Editura S Minus, 2007;
57. Cristinel Mortici – *600 de probleme de matematică pentru concursuri*, Editura GIL, 2001;
58. Nicolae Muşuroia, Dana Heuberger, Gh. Boroica, Florin Bojor, Vasile Popa – *Matematica de excelenţă*, Editura Paralela 45, 2013;
59. C. Năstăsescu, C. Niţă, M.B. Brandiburu, C. Joiţa – *Exerciţii şi probleme de algebră clasele IX-XII*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1981;
60. Ion Nedelcu, Anca Ţuţescu, Lucian Ţuţescu – *Probleme de matematică pentru concursuri*, Editura Reprograph, 2007;
61. Liliana Niculescu – *Probleme de matematică pentru liceu clasa a IX-a*, Editura Cardinal, 1998;
62. Liliana Niculescu, Ion Pătraşcu, Dan Secleman, Monalisa Găleteanu – *Exerciţii şi probleme de matematică clasa a IX-a*, Editura Cardinal, 2004;
63. Laurenţiu Panaitopol, Dinu Şerbănescu – *Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori*, Editura GIL, 2003;
64. Laurenţiu Panaitopol, M. Bălună, B. Enescu – *Matematica – manual*, Editura GIL, 2006;
65. L. Panaitopol, Alexandru Gica – *Probleme de matematică şi teoria numerelor*, Editura GIL, 2006;
66. Marius Perianu, Florin Dumitrel – *Matematica clasa a IX-a*, Editura Art – Clubul matematicienilor, 2017;
67. Adrian Petruşel, Violin Gorcu, Adrian Măgdas, Ilie Diaconu, Adrian Vasile – *Algebră clasele IX-XII pentru grupele de performanţă*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010;

Scanned with OKEN Scanner

68. Vasile, Pop, Viorel Lupşor, Gh. Lobonţ, Eugen Jecan – *Matematica pentru grupele de performanţă – clasa a IX-a*, Editura Dacia Educaţional, Cluj, 2004;
69. Dragoş Popescu, George Oboroceanu – *Exerciţii şi probleme de algebră, combinatorică şi teoria numerelor*, Editura Pedagogică, 1979;
70. Florea Puican, Vasile Gorgota, Nicolae Pavelescu – *Olimpiade şi concursuri Vâlcene 1990-2000*, Editura Paralela 45, 2000;
71. Viorel Radu – *Teme şi probleme de matematică pentru concursul „Traian Lalescu"*, Editura Mirton, 1999;
72. David A. Santos – *Number Theory for Mathematical contests*, 2005;
73. Ion Savu, Sorin Rădulescu, D. Şt. Marinescu, M. Prajea, C. Chiteş etc. – *Probleme pregătitoare pentru olimpiadele şcolare*, Editura Art, 2006;
74. Traian Tămâian – *Matematica – probleme pentru examene şi concursuri şcolare*, Editura Paralela 45, 2008;
75. Valentin Vornicu – *Olimpiade de matematică*, Editura GIL, 2003;
76. Romeo Zamfir, Vasile Popa, Oana Mădălina Jagîte – *Concursul interjudeţean „Cristian Calude" 2000-2006*, Editura Sinteze, 2007.

Alte publicaţii

1. *Gazeta Matematică* (Seria A, B) (SSM);
2. *Didactica matematica* (SSM);
3. *R.M.T.*;
4. *R.M.C.S.*;
5. *Recreaţii matematice*;
6. Revista *Argument*;
7. Revista – *Galaţi*;
8. Revista *Arhimede*;
9. Revista *Cardinal*;
10. *A.M.M.*;
11. *Crux Mathematicorum*;
12. *Kvant*;
13. *Matematica v scole*;
14. *400 de probleme din A.M.M.*, Editura MIR Moscova;
15. *Seria de culegeri de probleme anuale, olimpiade şcolare, locale, judeţene şi naţionale din România*, Editura Paralela 45;
16. *Romanian Mathematical Competitions R.M.C. 2005-2017 (S.S.M.)*, coordonator Radu Gologan;
17. Seria de cărţi *Reflections*, coordonator Titu Andreescu;
18. Seria de cărţi *Octogon*, coordonator Mihaly Bencze.

Scanned with OKEN Scanner

Profesorii Andrei şi Caragea sunt renumiți azi şi prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar şi prin probleme propuse la etapele olimpiadelor româneşti.

Culegerea de față este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă şi partea fracționară a unui număr. De această noțiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică.

Cele nouăsprezece capitole ale cărții fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noțiunea de parte întreagă sau parte fracționară. Acestea conțin peste 1700 de probleme, prezentate gradat şi având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu şi liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta mințile deschise ale copiilor.

Prof. univ. dr. Radu Gologan,
Preşedintele Societății de Ştiințe Matematice
din România

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ
supersucces®

ISBN 978-973-47-2693-6
Vol. I ISBN 978-973-47-2694-3

Preț cu TVA: 40 LEI

Scanned with OKEN Scanner